Линейная алгебра и геометрия

Лекция 2. Координаты векторов, изоморфизмы линейных пространств, сумма и пересечение линейных подпространств

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Координаты векторов

Теорема

Система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в конечномерном векторном пространстве V является базисом пространства V, если и только если каждый вектор $\boldsymbol{x} \in V$ единственным образом выражается через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Так как система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ полна, то $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$. Так как система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейна независима, то из лемма о единственности представления вектора как линейной комбинации линейно независимых векторов вытекает, что $\boldsymbol{x}$ единственным образом выражается через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.
$(\Leftarrow)$ Так как каждый вектор $\boldsymbol{x} \in V$ выражается через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ полна. Так как нулевой вектор $\mathbf{0}$ единственным образом выражается через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то $\mathbf{0}$ выражается через $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ только через тривиальную линейную комбинацию, то есть вектора $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы. □

Определение

Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ есть базис в конечномерном векторном пространстве V, $\boldsymbol{x} \in V$ и

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n.$$

Коэффициенты $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ называются координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Пусть V — векторное пространство над полем K конечной размерности $\dim V = n$, и пусть $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — какой-нибудь фиксированный базис.

Если в базисе $\boldsymbol{E}$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $(x_1, \dots, x_n)$, а вектор $\boldsymbol{y}$ — координаты $(y_1, \dots, y_n)$, т.е. $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n$, то

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{e}_1 + \dots + (x_n + y_n)\boldsymbol{e}_n \quad \text{и} \quad \lambda\boldsymbol{x} = (\lambda \cdot x_1)\boldsymbol{e}_1 + \dots + (\lambda \cdot x_n)\boldsymbol{e}_n,$$

т.е. вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ имеет координаты $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, а вектор $\lambda\boldsymbol{x}$ — координаты $(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$.

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Поэтому *строка (столбец) координат линейной комбинации векторов есть линейная комбинация с теми же коэффициентами строк (столбцов) координат этих векторов.*

Отсюда следует, что векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы строки (столбцы) их координат.

Изоморфизм векторных пространств

Определение

Векторные пространства V и W над полем K изоморфны, если существует биекция $\varphi\colon V \to W$, сохраняющая операции сложения и умножения на число:

1. $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;
2. $\varphi(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$ для любых $\lambda \in K$ и $\boldsymbol{x} \in V$.

Обозначение: $V \cong W$. Биекция φ называется изоморфизмом пространств V и W.

Свойства изоморфизма

- $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ и $\varphi^{-1}(\mathbf{0}_W) = \mathbf{0}_V$.
- Обратное отображение $\varphi^{-1}\colon W \to V$ существует и является изоморфизмом.

  Доказательство. Для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ и $\lambda \in K$ имеем $\varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) + \varphi^{-1}(\boldsymbol{y})) = \varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})) + \varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ и $\varphi(\lambda\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})) = \lambda\boldsymbol{x}$. Применив φ^{-1} к обеим частям этих равенств, видим, что $\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ и $\lambda\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) = \varphi^{-1}(\lambda\boldsymbol{x})$. □
- Если V, U и W — векторные пространства над одним и тем же полем, $V \cong U$ и $U \cong W$, то $V \cong W$.

Теорема

Всякое векторное пространство V над полем K размерности n изоморфно арифметическому пространству K^n.

Доказательство. Зафиксируем базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ в V. Рассмотрим отображение $\varphi\colon V \to K^n$, которое каждому вектору $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ ставит в соответствие строку его координат $(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе $\boldsymbol{E}$. Разложение вектора по базису единственно $\implies$ это отображение корректно определено. Ясно, что это биекция, удовлетворяющая условиям 1 и 2 из определения изоморфизма. $\square$

Пусть V — конечномерное векторное пространство и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — *фиксированный* базис в нём. Доказанная теорема позволяет отождествлять каждый вектор $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ в V со строкой или столбцом его координат $x_1, \ldots, x_n$ и писать $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ или $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. В частности, для $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in V$, где $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, имеем $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \ldots & x_{kn} \end{pmatrix}$.

Теорема

Конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеет одинаковую размерность.

Доказательство

Необходимость. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — изоморфизм векторных пространств V и W и $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис пространства V. Покажем, что $\{\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)\}$ — базис пространства W. Эта система линейно независима, так как если $\lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + \lambda_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \mathbf{0}_W$, то

$$\varphi^{-1}(\lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + \lambda_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)) = \lambda_1\varphi^{-1}(\varphi(\boldsymbol{e}_1)) + \dots + \lambda_n\varphi^{-1}(\varphi(\boldsymbol{e}_n)) = \\ = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}_V,$$

а значит, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Любой вектор $\boldsymbol{x} \in W$ линейно выражается через $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$, так $\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, а значит, $\boldsymbol{x} = \lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + \lambda_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)$. Итак, $\{\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)\}$ — базис пространства W. Следовательно, $\dim W = \dim V$.

Достаточность вытекает из предыдущей теоремы. □

Упражнения

1. Покажите, что в любом векторном пространстве V все базисы имеют одну и ту же мощность (она называется размерностью пространства V).
2. Докажите, что векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.
3. Покажите, что для бесконечного множества X и любого поля K пространство всех функций $f\colon X \to K$ с поточечными операциями сложения и умножения на число бесконечномерно. Что, если множество X конечно, но зато поле K бесконечно?
4. Вспомните, что множество $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств множества X с операциями, определёнными правилами $A + B = A \vartriangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$, $0A = \varnothing$ и $1A = A$ для $A, B \subset X$, является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$. Найдите размерность этого пространства.
5. Пусть V — n-мерное векторное пространство над произвольным полем K и $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_n$ — базисы V. Перенумеруем векторы в базисах: $\boldsymbol{E}_i = \{\boldsymbol{e}_{i1}, \boldsymbol{e}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{in}\}$, $i \leqslant n$. Верно ли, что перенумерацию всегда можно осуществить таким образом, что все системы $\{\boldsymbol{e}_{1i}, \boldsymbol{e}_{2i}, \ldots, \boldsymbol{e}_{ni}\}$, $i \leqslant n$, тоже окажутся базисами?

Матрица перехода

Пусть даны два базиса $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ векторного пространства V. Выразим каждый вектор $\boldsymbol{e}'_j \in \boldsymbol{E}'$ через базис $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{e}'_j = t_{1j}\boldsymbol{e}_1 + t_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + t_{nj}\boldsymbol{e}_n.$$

Выразим эти равенства в матричном виде

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{E}$ к базису $\boldsymbol{E}'$. Она всегда невырождена, так как в противном случае вектора $\boldsymbol{E}'$ вектора были бы линейно зависимы.

Формула связи координат в разных базисах

Если вектор $\boldsymbol{x} \in V$ имеет координаты $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в базисе $\boldsymbol{E}$ и координаты $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ в базисе $\boldsymbol{E}'$, то

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}.$$

Докажем эту формулу.

Имеем

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n = x_1'\boldsymbol{e}_1' + x_2'\boldsymbol{e}_2' + \dots + x_n'\boldsymbol{e}_n'. \tag{$\star$}$$

Подставим выражения для $\boldsymbol{e}_j'$:

$$\boldsymbol{x} = x_1'(t_{11}\boldsymbol{e}_1 + t_{21}\boldsymbol{e}_2 + \dots + t_{n1}\boldsymbol{e}_n) + x_2'(t_{12}\boldsymbol{e}_1 + t_{22}\boldsymbol{e}_2 + \dots + t_{n2}\boldsymbol{e}_n) + \\ + \dots + x_n'(t_{1n}\boldsymbol{e}_1 + t_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \dots + t_{nn}\boldsymbol{e}_n).$$

Соберём коэффициенты при каждом векторе $\boldsymbol{e}_i$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = {} & (x_1'\cdot t_{11} + x_2'\cdot t_{12} + \dots + x_n'\cdot t_{1n})\boldsymbol{e}_1 + \\ & + (x_1'\cdot t_{21} + x_2'\cdot t_{22} + \dots + x_n'\cdot t_{2n})\boldsymbol{e}_2 + \\ & + \dots + (x_1'\cdot t_{n1} + x_2'\cdot t_{n2} + \dots + x_n'\cdot t_{nn})\boldsymbol{e}_n. \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

$(\star) + (\star\star) +$ единственность разложения вектора по базису $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1'\cdot t_{11} + x_2'\cdot t_{12} + \dots + x_n'\cdot t_{1n}, \\ x_2 &= x_1'\cdot t_{21} + x_2'\cdot t_{22} + \dots + x_n'\cdot t_{2n}, \\ &\dots \\ x_n &= x_1'\cdot t_{n1} + x_2'\cdot t_{n2} + \dots + x_n'\cdot t_{nn}, \end{aligned} \quad \text{т.е.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Доказательство с помощью матриц

Имеем

$$(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Используя формулу $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)T$, получаем

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

откуда вытекает

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Свойства матрицы перехода

Здесь для базисов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ будем обозначать матрицу перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$ через $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}$.

1. Если $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ — два базиса конечномерного векторного пространства V, то
$$T_{\boldsymbol{E}_1\to\boldsymbol{E}_2} = T^{-1}_{\boldsymbol{E}_2\to\boldsymbol{E}_1}.$$
2. Если $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ и $\boldsymbol{E}_3$ — три базиса конечномерного векторного пространства V, то
$$T_{\boldsymbol{E}_1\to\boldsymbol{E}_3} = T_{\boldsymbol{E}_1\to\boldsymbol{E}_2}T_{\boldsymbol{E}_2\to\boldsymbol{E}_3}.$$
3. Если V — векторное пространство размерности n и $\boldsymbol{E}$ — любой базис этого пространства, то всякая невырожденная квадратная матрица размера $n\times n$ является матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{E}$ к некоторому другому базису.

Упражнение

Докажите эти свойства.

Параметрические уравнения подпространства

Пусть V — конечномерное векторное пространство и $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V$. Предположим, что $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ — базис в V и $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_k\}$ — базис в U $(k \leqslant n)$. Пусть каждый вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ имеет в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ координаты $(a_{1i}, \dots, a_{ni})$, т.е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + \dots + a_{ni}\boldsymbol{e}_n.$$

Запишем эти равенства в матричной форме:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_k) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Для любого вектора $\boldsymbol{x} \in U \ \ \exists\, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_k \in K$ такие, что

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n = x'_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + x'_k \boldsymbol{\varepsilon}_k. \qquad (\star)$$

Снова подставим выражения для $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ и соберём коэффициенты при каждом $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{x} = (x'_1 \cdot a_{11} + x'_2 \cdot a_{12} + \cdots + x'_k \cdot a_{1k})\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (x'_1 \cdot a_{n1} + x'_2 \cdot a_{n2} + \cdots + x'_k \cdot a_{nk})\boldsymbol{e}_n. \quad (\star\star)$$

$(\star) + (\star\star) +$ единственность разложения вектора по базису $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cdot a_{11} + x'_2 \cdot a_{12} + \cdots + x'_k \cdot a_{1k}, \\ x_2 &= x'_1 \cdot a_{21} + x'_2 \cdot a_{22} + \cdots + x'_k \cdot a_{2k}, \\ &\ldots \\ x_n &= x'_1 \cdot a_{n1} + x'_2 \cdot a_{n2} + \cdots + x'_k \cdot a_{nk}, \end{aligned}.$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix}. \qquad (\star\star\star)$$

Доказательство $(\star\star\star)$ с помощью матриц

Так как

$$(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_k)\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix}$$

и

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_k) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix},$$

то

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix}.$$

Считая $(x'_i)_i = (t_i)_i$ параметрами, получаем

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \cdot a_{11} + t_2 \cdot a_{12} + \dots + t_k \cdot a_{1k}, \\ x_2 = t_1 \cdot a_{21} + t_2 \cdot a_{22} + \dots + t_k \cdot a_{2k}, \\ \quad \dots \\ x_n = t_1 \cdot a_{n1} + t_2 \cdot a_{n2} + \dots + t_k \cdot a_{nk}, \end{cases}$$

— система уравнений, определяющая U.

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}.$$

Сумма и пересечение подпространств

Пусть V — любое векторное пространство над полем K, а U и W — его подпространства. Легко проверить, $U \cap W$ — тоже подпространство V. Однако $U \cup W$ не обязано быть подпространством.

Определение

Сумма $U + W$ подпространств U и W векторного пространства V — это множество

$$U + W = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{w} \in W\}.$$

Упражнения

1. Докажите, что $U + W$ — наименьшее подпространство пространства V, содержащее $U \cup W$.
2. Докажите, что если $U + W = U \cup W$, то либо $U \subset W$, либо $W \subset U$.

Определение

Сумма $U + W$ подпространств U и W называется прямой суммой и обозначается $U \oplus W$, если каждый вектор $\boldsymbol{v} \in U + W$ единственным образом представляется в виде $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{u} \in U$ и $\boldsymbol{w} \in W$. При этом $\boldsymbol{u}$ называется проекцией вектора $\boldsymbol{v}$ на подпространство U (параллельно подпространству W), а $\boldsymbol{w}$ — проекцией вектора $\boldsymbol{v}$ на W (параллельно подпространству U).

Теорема (о прямой сумме)

Сумма подпространств U и W произвольного векторного пространства является прямой $\iff$ $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. $\implies$: Пусть $U + W = U \oplus W$. Любой вектор $\boldsymbol{v} \in U \cap W$ можно представить как $\boldsymbol{v} + \mathbf{0}$ и как $\mathbf{0} + \boldsymbol{v}$. Представление единственно $\implies$ $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.
$\impliedby$: Пусть $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2$. Тогда $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1 \in U \cap W$. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ $\implies$ $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$. $\square$

Лемма

Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *система линейно независимых векторов. Тогда* $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.

Доказательство. Ясно, $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$. В силу теоремы, достаточно проверить $I = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \cap \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in I$. Так как $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$, то $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k$ для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$. Так как $-\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$, то $-\boldsymbol{x} = \lambda_{k+1} \boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$ для некоторых $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in K$. Тогда

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n.$$

Так как вектора $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ линейно независимы, то все λ_i равны 0. Следовательно, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. □

Теорема

Для любых двух подпространств U и W конечномерного векторного пространства V над полем K справедлива формула Грассмана

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}\,.$$

Доказательство. Выберем базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ в подпространстве $U \cap W$ и дополним его векторами $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l$ до базиса подпространства U и векторами $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m$ до базиса подпространства W. Положим $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l\}$ и $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m\}$. Покажем, что $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}$ — базис суммы $U + W$.

Положим $U' = \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l \rangle$ и $W' = \langle \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m \rangle$. Из леммы вытекает

$$U = U' \oplus (U \cap W) \quad \text{и} \quad W = W' \oplus (U \cap W).$$

Для $\boldsymbol{v} \in U + W$ имеем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$. Вектор $\boldsymbol{u}$ выражается через $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{w}$ выражается через $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{G}$ $\implies$ $\boldsymbol{v}$ выражается через $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}$. Следовательно, система $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}$ полна в $U + W$.

Осталось показать, что система $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}$ линейно независима. Пусть

$$\underbrace{\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{e}_k}_{\boldsymbol{a}} + \underbrace{\beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \beta_l \boldsymbol{f}_l}_{\boldsymbol{b}} + \underbrace{\gamma_1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + \gamma_m \boldsymbol{g}_m}_{\boldsymbol{c}} = \mathbf{0}. \qquad (\star)$$

Тогда

$$\boldsymbol{a} \in U' \subset U, \quad \boldsymbol{b} \in U \cap W, \quad \boldsymbol{c} \in W' \subset W.$$

Так как $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, то

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \in W, \quad \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in U.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in U \cap W.$$

Так как $\boldsymbol{a} \in U' \cap (U \cap W)$ и $U = U' \oplus (U \cap W)$, то из теоремы о прямой сумме вытекает $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Анологично, так как $\boldsymbol{c} \in W' \cap (U \cap W)$ и $W = W' \oplus (U \cap W)$, то из теоремы о прямой сумме вытекает $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$. Тогда $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$. Системы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ линейно независимы $\Longrightarrow$ линейная комбинация $(\star)$ тривиальна. $\square$