Линейная алгебра и геометрия

Лекция 1. Векторные пространства, линейная зависимость

Резниченко Евгений Александрович
Кафедра общей топологии и геометрии

Векторные пространства

Векторное, или линейное, пространство над полем K — это тройка $(V, +, \cdot)$, где $+ : V \times V \to V$ — операция сложения элементов V (сумма $+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ обозначается $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$) и $\cdot : K \times V \to V$ — операция умножения элементов V на числа из K (произведение $\cdot(\boldsymbol{x}, \lambda)$ обозначается $\lambda\boldsymbol{x}$), для которых выполнены следующие аксиомы:

1. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ (ассоциативность);
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ (коммутативность);
3. в V существует такой элемент $\boldsymbol{0}$ (нуль), что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in V$;
4. для любого элемента $\boldsymbol{x} \in V$ существует такой элемент $-\boldsymbol{x} \in V$ (противоположный элемент), что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$;
5. $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$ для любых $\lambda \in K$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;
6. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$ для любых $\lambda, \mu \in K$ и $\boldsymbol{x} \in V$;
7. $(\lambda\mu)\boldsymbol{x} = \lambda(\mu\boldsymbol{x})$ для любых $\lambda, \mu \in K$ и $\boldsymbol{x} \in V$;
8. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in V$.

Элементами векторного пространства $(V, +, \cdot)$ считаются элементы множества V.

Вместо $(V, +, \cdot)$ пишут просто V.

Элементы множества V обычно (и именно в качестве элементов V как векторного пространства) называют векторами. При этом они могут быть одновременно многочленами, или функциями, или классами равных направленных отрезков и т.п. Операции сложения векторов и умножения вектора на число часто называют линейными операциями.

Следствия из аксиом векторного пространства

1. Вектор $\mathbf{0}$ единствен.
2. Противоположный вектор единствен.
3. Для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ уравнение $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ имеет единственное решение, равное $\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$. Это решение называется разностью векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ и обозначается $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.
4. Сумма произвольного числа векторов не зависит от расстановки скобок. ($\Longrightarrow$ мы будем часто опускать скобки)
5. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого $\lambda \in K$.
6. $\lambda(-\boldsymbol{x}) = -\lambda\boldsymbol{x}$ для любых $\lambda \in K$, $\boldsymbol{x} \in V$.
7. $\lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{y}$ для любых $\lambda \in K$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.
8. $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ для любого $\boldsymbol{x} \in V$.
9. $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in V$.
10. $(\lambda - \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} - \mu\boldsymbol{x}$ для любых $\lambda, \mu \in K$ и $\boldsymbol{x} \in V$.

Упражнения

1. Докажите следствия из аксиом векторного пространства.
2. Докажите, что аксиома 2 вытекает из остальных.
3. Выясните, какие ещё аксиомы вытекают из остальных.

Примеры

- Обычные векторы (классы направленных отрезков) в обычном пространстве, рассматриваемом в элементарной геометрии.
- Любое поле K является векторным пространством над полем K относительно операций поля. Любое поле K является также векторным пространством над любым своим подполем F.
- Множество действительных (комплексных, со значениями в поле K) функций с фиксированной областью определения является векторным пространством над полем действительных чисел (над полем комплексных чисел, над полем K). Операции определяются поточечно. Вместо всех функций можно рассматривать непрерывные функции, дифференцируемые функции ...
- Многочлены, многочлены степени, ограниченной некоторым числом ...

Примеры

- Частный случай — множество функций, определённых на $\{1, 2, \ldots, n\}$. Значения любой функции $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to K$ можно записать в столбец:

$$f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}.$$

- Арифметическое векторное пространство K^n над полем K — пространство строк или столбцов чисел (элементов K) фиксированного размера n.
Операции:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \ldots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

- Матрицы.
- Функции от нескольких переменных, многочлены от нескольких переменных.

Примеры

- Пусть X — любое множество, и пусть $\mathscr{P}(X)$ — множество всех его подмножеств. Для $A, B \subset X$ положим $A + B = A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $0A = \varnothing$ и $1A = A$. Множество $\mathscr{P}(X)$ с так определёнными операциями — векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$. В этом легко убедиться, если вместо множеств $A \subset X$ рассмотреть их характеристические функции $\chi_A \colon X \to \mathbb{F}_2$.

Подпространства

Определение

Непустое подмножество U векторного пространства V над полем K называется подпространством векторного пространства V (обозначение: $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V$), если оно замкнуто относительно линейных операций, т.е.

1. для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ имеем $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$ и
2. для любых $\boldsymbol{x} \in U$ и $\lambda \in K$ имеем $\lambda\boldsymbol{x} \in U$.

Подпространство векторного пространства само является векторным пространством относительно тех же операций. Подпространство $U \underset{\text{lin}}{\subseteq} V$ собственное, если $U \neq V$, т.е. $U \underset{\text{lin}}{\subsetneq} V$.

Упражнения

1. Покажите, что в определении подпространства вместо непустоты множества U и выполнения условия 1 можно потребовать, чтобы множество U являлось подгруппой аддитивной группы V — получится равносильное определение.
2. Докажите, что отношение «быть подпространством» транзитивно

Примеры

- V, $\{\mathbf{0}\}$
- Множество обычных векторов, параллельных данной прямой или плоскости.
- Множество непрерывных функций — подпространство пространства всех функций, множество дифференцируемых функций — подпространство пространства непрерывных функций и пространства всех функций, множество полиномиальных функций (не многочленов!) — подпространство пространств всех дифференцируемых функций, всех непрерывных функций и всех функций ...
- Множество (кольцо) $K[x]$ всех многочленов с коэффициентами из K, рассматриваемое как векторное пространство над K, — подпространство множества $K_{\leqslant n}[x]$ всех многочленов степени, не превосходящей k.
- Множество строк $(x_1, \dots, x_n)$ чисел, компоненты которых удовлетворяют уравнению вида $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = 0$, — подпространство арифметического векторного пространства K^n .

Линейная зависимость и линейные комбинации векторов, подпространства

Система векторов — упорядоченный набор векторов, в котором элементы могут повторяться. По традиции записывается как множество с перенумерованными элементами.

Определение

Конечная система векторов $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\} \subset V$ называется линейно зависимой, если найдутся $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, не все равные нулю, для которых $\lambda \boldsymbol{x}_1 + \ldots \lambda \boldsymbol{x}_m = 0$.

Конечное множество векторов линейно зависимо, если при любой нумерации его элементов получается линейно зависимая система.

Бесконечное подмножество V называется линейно зависимым, если некоторое его непустое конечное подмножество линейно зависимо.

Подмножество, не являющееся линейно зависимым, называется линейно независимым.

Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in V$.

Определение

Всякое выражение вида $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, называется линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$. Если не все $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ равны нулю, то линейная комбинация $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m$ называется нетривиальной, в противном случае линейная комбинация называется тривиальной.

Говорят, что вектор $\boldsymbol{x} \in V$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, если он равен некоторой их линейной комбинации.

Говорят, что вектор $\boldsymbol{x} \in V$ линейно выражается через подмножество $S \subset V$, если он линейно выражается через некоторые векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in S$.

Соглашение

Значение пустой линейной комбинации принимается равным нулевому вектору.

Определение

Пусть $X \subset V$. Совокупность всевозможных (конечных) линейных комбинаций векторов из X называется линейной оболочкой множества X и обозначается $\langle X \rangle$. Говорят, что пространство V порождается множеством X, или натянуто на множество X, если $\langle X \rangle = V$.

Линейная оболочка $\langle X \rangle$ множества $X \subset V$ — это наименьшее подпространство пространства V, содержащее X.

Замечание

Если $X \subset Y \subset V$, то $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$. Для любого множества $X \subset V$ $\langle\langle X \rangle\rangle = \langle X \rangle$.

Если $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n \rangle$, то система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ линейно зависима.

Лемма о единственности представления вектора как линейной комбинации линейно независимых векторов

Если система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ линейно независима, а система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ линейно зависима (в частности, если $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$), то вектор $\boldsymbol{x}$ единственным образом линейно выражается выражается через вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n.$$

Доказательство. Так как вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация

$$\mu_1 \boldsymbol{x}_1 + \mu_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{x}_n + \mu \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

равная $\boldsymbol{0}$. Если $\mu = 0$, то нетривиальная линейная комбинация

$$\mu_1 \boldsymbol{x}_1 + \mu_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

равна $\boldsymbol{0}$, что противоречит линейной независимости $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Следовательно, $\mu \neq 0$. Положим $\lambda_i = -\frac{\mu_i}{\mu}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n.$$

Покажем единственность такого представления. Предположим, что

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1' \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2' \boldsymbol{x}_2 + \dots + \lambda_n' \boldsymbol{x}_n.$$

Тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_1')\boldsymbol{x}_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')\boldsymbol{x}_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_n')\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}.$$

Так как система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ линейно независима, то эта линейная комбинация тривиальна, то есть $\lambda_i - \lambda_i' = 0$ для $i = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Еще факты о линейной зависимости

- Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима.
- Векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.
- Пусть векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ линейно независимы. Вектор $\boldsymbol{x}$ линейно выражается через $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}$ линейно зависимы.

Ранг системы векторов.

Пусть X система векторов. *Рангом* системы векторов X называется число

$$\operatorname{rank} X = \sup\{n : \text{существует линейно независимая система из } n \text{ векторов } \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X\}.$$

Определение

Систему $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in X$ из линейно независимых векторов множества X назовем *максимальной*, если эту систему нельзя увеличить до линейно независимой системы векторов из X, то есть система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}$ линейна зависима для любого $\boldsymbol{x} \in X$.

Из этого определения и леммы о единственности представления вектора как линейной комбинации линейно независимых векторов, вытекает:

Лемма о максимальной системе линейно независимых векторов

Если система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X$ является максимальной линейно независимой системой множества X, то $X \subset \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$.

Лемма о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной

Если $\operatorname{rank} X < \infty$, *то любая система линейно независимых векторов* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in X$ *дополняется до максимальной в* X *системы* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X$ *линейно независимых векторов.*

Доказательство. Предположим противное. Построим по индукции последовательность векторов $\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_{k+2} \cdots \in X$, такую что система $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ линейно независима для всех $n \geq k$.

Предположим, что для $n \geq k$ построена линейно независимая система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X$. По нашему предположению, эта система векторов не максимальна, поэтому существует $x_{n+1} \in X$, так что вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, x_{n+1}$ линейно независимы.

Построение завершено. Пусть $n > \operatorname{rank} X$. Тогда вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in X$ линейно независимы. Противоречие с определением $\operatorname{rank} X$. □

Известный факт из алгебры: *ранг матрицы = рангу столбцов матрицы = рангу строк матрицы.* Из этого факта вытекает

Основная лемма о линейной зависимости

Если векторное пространство V *порождается* n *векторами, то всякие* $m > n$ *векторов пространства* V *линейно зависимы.*

Этот факт можно сформулировать так:

Если $X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ *и* $Y \subset \langle X \rangle$, *то* $\operatorname{rank} Y \le n$.

Доказательство. Пусть $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ и $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n \subset U$. Тогда $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{v}_i$ для некоторой матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$. В матричном виде этот факт записывается следующим образом:

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} A \leq n$ и $n < m$, то столбцы матрицы A линейно зависимы. Следовательно некоторая нетривиальная линейная комбинация столбцов

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

равна нулю. Запишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \boldsymbol{u}_j\right) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (0),$$

то есть нетривиальная линейная комбинация $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \boldsymbol{u}_j = 0$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ равна нулю. $\square$

Теорема (о монотонности ранга)

Пусть $X \subset V$, $Y \subset \langle X \rangle$ *и* $\operatorname{rank} X < \infty$. *Тогда* $\operatorname{rank} Y \leq \operatorname{rank} X$.

Доказательство. Так как ранг $\operatorname{rank} X$ конечен, то $\operatorname{rank} X$ достигается, то есть для $n = \operatorname{rank} X$, существует линейно независимая система $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n \in X$ из n векторов. Тогда эта система максимальна в X. Из леммы о максимальной системе линейно независимых векторов вытекает, что $X \subset \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n \rangle$. Из основной лемме о линейной зависимости вытекает $\operatorname{rank} Y \leq n$. □

Базис и размерность конечномерного пространства

Говорят, что система векторов $X = \{\boldsymbol{x}_\alpha : \alpha \in A\}$ в векторном пространстве V полна, если $V = \langle X \rangle$.

Если система векторов $X = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ конечна, то X полна, если любой вектор $\boldsymbol{x} \in V$ выражается через $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Определение

Базис — это полная линейно независимая система векторов.

Базис можно определить также как *максимальную* (по включению) *линейно независимую систему векторов* или как *минимальную полную систему векторов*.

Определение

Векторное пространство называется конечномерным, если оно порождается конечным числом векторов, и бесконечномерным в противном случае.

Лемма (о ранге конечномерного пространства)

Векторное пространство V *конечномерно если и только если* $\operatorname{rank} V < \infty$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$. Из основной леммы о линейной зависимости вытекает, что $\operatorname{rank} V \leq n$.

$(\Leftarrow)$ Пустая система векторов является линейно независимой. Из лемма о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной вытекает, что в V существует конечная максимальная в V линейно независимая система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Из леммы о максимальной системе линейно независимых векторов вытекает $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$. $\square$

Теорема (о дополнении до базиса)

Пусть X — полная система векторов в конечномерном векторном пространстве V. Всякую линейно независимую систему векторов из X можно дополнить до базиса V.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in X$ — линейно независимая система. Так как $\operatorname{rank} V < \infty$, то из теоремы о монотонности ранга вытекает $\operatorname{rank} X \le \operatorname{rank} V < \infty$. Из леммы о дополнении системы линейно независимых векторов до максимальной вытекает, что вектора $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ дополняются до максимальной в X линейно независимой системы векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Из лемма о максимальной системе линейно независимых векторов вытекает, что $X \subset \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$. Так как $\langle X \rangle = V$, то $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle = V$, то есть система $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ полна. Следовательно, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ — базис. $\square$

Следствие

Во всяком конечномерном векторного пространстве есть базис.

Теорема

Все базисы конечномерного пространства V содержат одно и тоже число векторов.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ и $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_m\}$ — базисы. Они линейно независимы и полны. Основная лемма о линейной зависимости $\Longrightarrow$ $n \leqslant m$ и $m \leqslant n$. □

Определение

Число векторов в любом базисе конечномерного векторного пространства V называется размерностью пространства V и обозначается $\dim V$.

Примеры

- $\dim K^n = n$ для любого поля K. *Стандартный базис* состоит из векторов

$$(1, 0, \ldots, 0), \ (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots, \ (0, 0, \ldots, 1).$$

- Размерность пространства K^K всех функций $K \to K$ бесконечна $\iff$ поле K бесконечно. Для конечного поля $\dim K^K = |K|$.
- Размерность $\dim K[x]$ бесконечна для любого поля. Базис: 1, x, x^2, x^3, $\ldots$. $\dim K_{\leqslant n}[x] = n + 1$ для любого поля.
- Размерность $\mathbb{C}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$ равна 2.
- Размерность $\mathbb{R}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$ несчётна.

Теорема

Пусть V *конечномерное пространство и* $X \subset V$. *Тогда* $\langle X \rangle$ *конечномерно и* $\dim\langle X \rangle = \operatorname{rank} X$.

Доказательство. Так как V конечномерно, то из леммы о ранге конечномерного пространства вытекает $\operatorname{rank} V < \infty$ и из теоремы о монотонности ранга вытекает, что $\operatorname{rank}\langle X \rangle < \infty$ и, следовательно, подпространство $\langle X \rangle$ конечномерно. Множество X является полной в $\langle X \rangle$ системой. Из теоремы о дополнении до базиса вытекает, что существует базис $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k \in X$ подпространства $\langle X \rangle$. Тогда $\dim\langle X \rangle = k = \operatorname{rank} X$. □

Следствие

Если V *конечномерное пространство, то* $\dim V = \operatorname{rank} V$.

Тогда из теоремы о монотонности ранга вытекает

Теорема

Пусть V *конечномерное пространство и* $L \subset V$ *подпространство. Тогда* $\dim L \leq \dim V$.

Подпространство U пространства V называется собственным, если $U \neq V$.

Следствие

Если V — конечномерное векторное пространство и U — его собственное подпространство, то $\dim U < \dim V$.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ — базис U. Возьмем любой вектор $\boldsymbol{x} \in V \setminus U$. Тогда система $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ линейно независима, в противном случае из леммы о единственности представления вектора как линейной комбинации линейно независимых векторов вытекает, что $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle = U$. Тогда $\dim U' = k + 1$, где $U' = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$. Получаем $\dim U < \dim U' \leq \dim V$. □