

Задачи к лекциям 10–12

В задачах к этой лекции A — произвольное индексное множество.

1. Пусть X_α , $\alpha \in A$, — топологические пространства.
 - а) Покажите, что если $Y \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ плотно в $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, то проекция $\pi_\alpha(Y)$ множества Y на сомножитель X_α плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$.
 - б) Приведите пример произведения $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и множества $Y \subset X$ с тем свойством, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$, однако Y не плотно в X .
2. а) Приведите пример топологического произведения $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и замкнутого множества $Y \subset X$, для которых проекции $\pi_\alpha(Y)$ не замкнуты в X_α .
б) Приведите пример топологического произведения $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и незамкнутого множества $Y \subset X$ с тем свойством, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ замкнута в X_α для каждого $\alpha \in A$.
3. Докажите, что топологическое произведение непустых T_1 -пространств удовлетворяет первой аксиоме счётности (удовлетворяет второй аксиоме счётности, метризуемо) тогда и только тогда, когда все сомножители обладают тем же свойством и все, кроме не более чем счётного числа, одноточечны.
4. Докажите счётную мультипликативность сепарабельности (без использования теоремы Хьюитта–Марчевского–Пондичери).
5. Докажите, что канторово множество¹⁾ $C \subset \mathbb{R}$ гомеоморфно тихоновской степени $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ дискретного пространства $\{0, 1\}$.
6. Докажите, что всякое T_0 -пространство X , обладающее счётной базой из открыто-замкнутых множеств, гомеоморфно вкладывается в канторово множество¹⁾ $C \subset \mathbb{R}$ (и, следовательно, метризуемо).
7. Докажите, что любое счётное метризуемое пространство вкладывается в пространство $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел.
8. Докажите, что пространство $\mathbf{P}$ иррациональных чисел гомеоморфно топологическому произведению $\mathbb{N}^{\aleph_0}$.
9. Докажите, что топологическое произведение $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ не нормально.
10. Докажите, что если X — хаусдорфово пространство и $\mathcal{U}$ — семейство его подпространств, то пространство $\bigcap \{Y : Y \in \mathcal{U}\} \subset X$ с топологией, индуцированной из X , гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $\prod \{Y : Y \in \mathcal{U}\}$.
11. Пусть κ — любой бесконечный кардинал. Докажите, что счётная степень метрического ежа $J(\kappa)$ колючести κ с тихоновской топологией универсальна для всех метризуемых пространств веса κ , т.е. любое метризуемое пространство веса κ гомеоморфно подпространству пространства $J(\kappa)^{\aleph_0}$.

¹⁾ Канторово множество — подмножество отрезка $[0, 1]$, которое строится по индукции так: на первом шаге индуктивного построения имеется один отрезок $[0, 1]$, и из него удаляется средняя треть без концов (интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$), так что остаются два отрезка; на каждом следующем шаге из всех имеющихся на этом шаге отрезков удаляются средние трети без концов. Канторово множество получается после счётного числа шагов.