Задачи к лекции 7

В этом наборе задач используются следующие обозначения:

- $\mathbb{R}^n$ — n-мерное *евклидово пространство* с евклидовой топологией (порождённой обычной евклидовой метрикой);
- $D^n_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\} \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный *открытый диск* (то же, что *шар*) радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$;
- $\overline{D}^n_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leqslant r\} \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный *замкнутый диск* (*шар*) радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0 \in \in \mathbb{R}^n$;
- $S^n_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : d_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — n-мерная *сфера* радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0$;
- $D^n = D^n_1(\mathbf{0})$, $\overline{D}^n = \overline{D}^n_1(\mathbf{0})$, $S^{n-1} = S^{n-1}_1(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$;
- $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ раз}} \subset \mathbb{R}^{2n}$ — n-мерный *тор*.

Подразумевается, что все перечисленные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ снабжены индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией.

1. Ниже перечислены наборы топологических пространств (их обозначения можно найти в конце вводной главы). Покажите, что пространства из каждого набора гомеоморфны друг другу, а пространства из разных наборов — нет:

а) любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$, диск $\overline{D}^1$ и любой диск $\overline{D}^1_r(x_0)$, где $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$;

б) любые полуоткрытые интервалы $[a, b)$ и $(a, b]$, где $a, b, \in \mathbb{R}$, $a < b$, и замкнутые лучи $(-\infty, c]$ и $[c, \infty)$, где $c \in \mathbb{R}$;

в) любой открытый интервал (a, b), где $a < b$, любые открытые лучи $(-\infty, c)$ и (c, ∞), прямая $\mathbb{R}$, окружность без точки $S^1 \setminus \{s\}$, где $s \in S^1$, любая дуга $\smile AB \subset S^1$ без концов (где $A, B \in S^1$, $A \neq B$), диск D^1 и любой диск $D^1_r(x_0)$, где $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$;

г) открытое полупространство $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$, сфера S^n без точки, n-мерный сферический сегмент без границы (т.е. пересечение сферы S^n с произвольным открытым полупространством при условии, что пересечения S^n с самим этим полупространством и с его дополнением непусты; сферический сегмент без границы можно представлять себе как усечённую сферу или как сферу, из которой вырезали кружок вместе с границей), пространство $\mathbb{R}^n$, диск D^n и любой диск $D^n_r(\mathbf{x}_0)$, где $r > 0$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, для произвольного $n \geqslant 2$;

д) замкнутый диск $\overline{D}^{2k}$, произведение обычных плоских дисков $\underbrace{\overline{D}^2 \times \ldots \times \overline{D}^2}_{k \text{ раз}}$, $2k$-мерный куб $[-1, 1]^{2k}$ и $2k$-мерный сферический сегмент с границей для $k \geqslant 1$.

2. Докажите, что тор T^2 гомеоморфен «бублику» — поверхности в $\mathbb{R}^3$, получаемой вращением окружности S^1 вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей её.

3. а) Вложите $\overline{D}^2 \times S^1$, $\overline{D}^1 \times T^2$ и $\overline{D}^1 \times S^2$ в $\mathbb{R}^3$.

б) Докажите, что тор T^n вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$ для любого натурального n.

4. Вещественная прямая с топологией, порождённой базой $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, называется *прямой Зоргенфрея* и обычно обозначается S. Подпространство $[0, 1) \subset S$ прямой Зоргенфрея называется *стрелкой Зоргенфрея*.

Докажите, что прямая Зоргенфрея гомеоморфна стрелке Зоргенфрея.

5. Придумайте два негомеоморфных пространства X и Y, для которых существуют непрерывные биекции $X \to Y$ и $Y \to X$.

6. Докажите, что для любых двух счётных всюду плотных подмножеств A и B вещественной прямой $\mathbb{R}$ существует гомеоморфизм $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию $f(A) = B$.

7. Покажите, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам отделимости T_0 и T_3, регулярно. Верно ли, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_4, нормально?

8. Докажите, что любое пространство с топологией линейного порядка наследственно нормально (т.е. все его подпространства нормальны).

9. Пусть $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией, и пусть $W_0 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega\}$ — множество всех конечных ординалов вместе с первым бесконечным, тоже с порядковой топологией (т.е. сходящаяся последовательность вместе с её пределом ω). Пространство $W_1 \times W_0$ с топологией произведения называется *плоскостью Тихонова*. Докажите, что

а) пространство $W_1 \times W_0$ нормально;

б) пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ не нормально;

в) пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ не содержит несчётных замкнутых дискретных подпространств.

10. а) Покажите, что всякое регулярное пространство со счётной базой нормально. Всякое ли хаусдорфово пространство со счётной базой нормально?

б) Покажите, что всякое счётное регулярное пространство нормально. Всякое ли счётное хаусдорфово пространство нормально?

11. Пусть X — произвольное пространство, Z — регулярное пространство, Y — плотное подпространство X и $f: Y \to Z$ — непрерывное отображение. Докажите, что отображение f продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$ тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного отображения $Y \cup \{x\} \to Z$ для каждой точки $x \in X \setminus Y$.

12. а) Приведите пример двух разных функций $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сужения которых на всюду плотное в $\mathbb{R}$ множество $\mathbf{P}$ иррациональных чисел непрерывны и совпадают.

б) Приведите пример двух разных функций $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые в каждой точке всюду плотного в $\mathbb{R}$ множества $\mathbf{P}$ непрерывны и совпадают.

13. Докажите, что

а) $|X| \leqslant 2^{w(X)}$ для любого T_1-пространства X;

б) $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$ для любого хаусдорфова пространства X;

в) $w(X) \leqslant 2^{d(X)}$ для любого T_3-пространства X.