Задачи к лекции 6

1. Отображение $f\colon (X,d)\to(Y,\rho)$ метрических пространств называется *липшицевым*, если существует такое число L (*константа Липшица* отображения f), что $\rho(f(x),f(y))\leqslant L\cdot d(x,y)$ для любых точек $x,y\in X$. Покажите, что всякое липшицево отображение метрических пространств непрерывно.

2. Приведите пример отображения $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, которое непрерывно ровно в одной точке.

3. Отображение $f\colon X\to Y$ топологических пространств называется *открытым* (*замкнутым*), если при этом отображении образ всякого открытого множества открыт (замкнут).

а) Заметьте, что отображение $f\colon X\to Y$ открыто тогда и только тогда, когда в пространстве X существует база, образ каждого элемента которой открыт в Y.

б) Покажите, что образ любой (не обязательно открытой) окрестности точки x топологического пространства X при открытом отображении $f\colon X\to Y$ является окрестностью точки $f(x)$ в пространстве Y.

4. Приведите пример топологических пространств X и Y и непрерывной сюръекции $f\colon X\to Y$, которая

а) не является ни открытым, ни замкнутым отображением;

б) является открытым, но не является замкнутым отображением;

в) является замкнутым, но не является открытым отображением;

г) является замкнутым и взаимно однозначным, но не открытым отображением;

д) является открытым и замкнутым отображением, но не является гомеоморфизмом.

5. Верно ли, что если график $\operatorname{Gr} f$ отображения $f\colon X\to Y$ топологических пространств гомеоморфен пространству X, то f непрерывно?

6. Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Покажите, что связность сохраняется непрерывными отображениями, т.е. непрерывный образ любого связного пространства связен.

7. Отображение $f\colon X\to Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и непрерывно, причём обратное отображение $f^{-1}\colon Y\to X$ тоже непрерывно.

а) Покажите, что биекция $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда она монотонна (т.е. либо всюду возрастает, либо всюду убывает). Верно ли это для произвольного линейно упорядоченного пространства с порядковой топологией?

б) Покажите, что всякое непрерывное взаимно однозначное отображение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на себя является гомеоморфизмом. Верно ли это для произвольного топологического пространства?

8. Покажите, что отображение $f\colon X\to Y$ топологических пространств

а) непрерывно и замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{f(A)}^{Y}=f\bigl(\overline{A}^{X}\bigr)$ для любого множества $A\subset X$;

б) непрерывно и открыто тогда и только тогда, когда $\overline{f^{-1}(B)}^{X}=f^{-1}\bigl(\overline{B}^{Y}\bigr)$ для любого $B\subset Y$.

9. Покажите, что метрика $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ на топологическом пространстве $(X,\mathscr{T})$ непрерывна относительно топологии произведения на $X\times X$ тогда и только тогда, когда порождаемая ею метрическая топология $\mathscr{T}_d$ слабее (нестрого) топологии $\mathscr{T}$. В частности, на метризуемом пространстве непрерывна всякая метрика, порождающая его топологию.