

Задачи к лекции 5

1. а) Покажите, что если последовательность сходится к некоторой точке, то и всякая подпоследовательность этой последовательности сходится к той же точке.
б) Верно ли, что точка топологического пространства является предельной точкой последовательности в этом пространстве тогда и только тогда, когда к ней сходится некоторая подпоследовательность данной последовательности?
в) Приведите пример последовательности, которая имеет предельную точку, не являющуюся ни пределом этой последовательности, ни предельной точкой множества значений этой последовательности.
2. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Напомним, что Y — множество типа G_δ или G_δ -множество в X , если Y является пересечением счётного числа открытых в X множеств. Вместо «одноточечное множество типа G_δ » говорят «точка типа G_δ ».
Приведите пример топологического пространства, в котором нет нетривиальных сходящихся последовательностей, однако все точки имеют тип G_δ .
3. Пусть Y — счётное множество, $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на Y и $p \notin Y$. Положим $X = Y \cup \{p\}$ и снабдим множество X топологией, в которой все точки $y \in Y$ изолированы, а окрестности точки p — все элементы ультрафильтра $\mathcal{U}$. Докажите, что X с этой топологией является счётным недискретным топологическим пространством, в котором все сходящиеся последовательности тривиальны.
4. Покажите, что для топологического пространства X следующие условия равносильны:
а) X дискретно;
б) все точки пространства X изолированы;
в) все подпространства пространства X дискретны;
г) все подпространства пространства X замкнуты.
5. Пусть κ — произвольный бесконечный кардинал.
а) Приведите пример недискретного топологического пространства, в котором все подпространства мощности, не превосходящей κ , дискретны.
б) Покажите, что в топологическом пространстве все подпространства мощности, не превосходящей κ , дискретны тогда и только тогда, когда все подпространства мощности, не превосходящей κ , замкнуты.
6. Топологическое пространство X называется *пространством Фреше–Урысона*, если к любой точке прикосновения x любого множества $A \subset X$ сходится некоторая последовательность точек множества A (иными словами, если точка $x \notin A$ предельна для множества A тогда и только тогда, когда к x сходится некоторая последовательность точек множества A).
а) Заметьте, что каждое пространство с первой аксиомой счётности является пространством Фреше–Урысона.
б) Приведите пример пространства Фреше–Урысона без первой аксиомы счётности.