

ТЕОРЕМА МАЗУРА–УЛАМА С РАССТОЯНИЕМ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА.

С. А. БОГАТЫЙ, А. А. ТУЖИЛИН

Знаменитая теорема Мазура–Улама 1932 года утверждает, что *всякое сюръективное изометрическое отображение действительных нормированных пространств является линейным*.

Одно из направлений усиления теоремы Мазура–Улама родилось из теоремы Hyers–Ulam 1945 года. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств *искажением* называется

$$\text{dis } f = \sup\{|f(x)f(x')| - |xx'| : x, x' \in X\}. \quad (1)$$

Отображение f называется ε -nearisometry если $\text{dis } f \leq \varepsilon$. Теорема Hyers–Ulam утверждает, что для всякой сюръективной ε -nearisometry $f: V \rightarrow W$, $f(0) = 0$, действительных гильбертовых пространств существует биективная линейная изометрия $U: V \rightarrow W$ такая, что

$$\|f(v) - U(v)\| \leq M = 10\varepsilon \quad \text{for every } v \in V. \quad (2)$$

Расширению области справедливости теоремы Hyers–Ulam посвящено много работ.

Наш доклад посвящен доказательству эквивалентности различных условий, в которых в теореме Мазура–Улама условие изометричности ослабляется.

Теорема 0.1. *Для действительных банаховых пространств V и W следующие условия эквивалентны*

- 1) *пространства V и W линейно изометричны;*
- 2) *пространства V и W изометричны;*
- 3) $d_{GH}^c(V, W) = 0$;
- 4) $d_{GH}^c(V, W) < \infty$;
- 5) $d_{GH}(V, W) = 0$;
- 6) $d_{GH}(V, W) < \infty$;
- 7) *единичные шары B_V и B_W изометричны.*

Здесь d_{GH} означает классическое расстояние Громова–Хаусдорфа, а d_{GH}^c означает непрерывное расстояние Громова–Хаусдорфа, которому будем посвящен доклад А. А. Тужилина на одном из следующих заседаний семинара.

Будет рассказано компилятивное доказательство новой существенной импликации 6) $\implies$ 1). Наше доказательство является простым применением глубоких усилений теоремы Hyers–Ulam. Будет дана краткая история исследований ε -nearisometry.

Для конечномерных пространств Иван Михайлов в 2024 году (в 2024-2026 опубликовал) дал автономное достаточно продвинутое доказательство этой импликации, которое не опирается на исследования ε -nearisometry.

Будет рассказано третье доказательство в конечномерном случае.

В качестве следствия приводится новое условие в теореме Банаха–Стоуна.

Следствие 0.2. *Для компактных хаусдорфовых пространств X и Y следующие условия эквивалентны*

- 0) пространства X и Y гомеоморфны;*
- 1) банаховы пространства $V = C(X)$ и $W = C(Y)$ действительных непрерывных функций с суп-нормой линейно изометричны;*
- 2) метрические пространства $V = C(X)$ и $W = C(Y)$ изометричны;*
- 3) $d_{GH}^c(C(X), C(Y)) = 0$;*
- 4) $d_{GH}^c(C(X), C(Y)) < \infty$;*
- 5) $d_{GH}(C(X), C(Y)) = 0$;*
- 6) $d_{GH}(C(X), C(Y)) < \infty$;*
- 7) единичные шары $B_{C(X)}$ и $B_{C(Y)}$ изометричны.*