Введение в топологию

Ольга Викторовна Сипачева
Кафедра общей топологии и геометрии
o-sipa@yandex.ru

Термин «топология» впервые появился в 1847 г. в книге Листинга «Предварительные исследования по топологии», где топология определялась так:

> Под топологией будем понимать учение о модальных отношениях пространственных образов — или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей, тел и их частей или их совокупности в пространстве, независимо от отношений мер и величин.

Предмет топологии в том виде, в каком он понимается сейчас, определил Клейн в своей «Эрлангенской программе» — лекции, прочитанной в 1872 г. в Эрлангенском университете. В этой программе Клейн выдвинул идею алгебраической классификации разных плохо согласованных наук, на которые разделилась геометрия к середине девятнадцатого века (евклидова, проективная, сферическая, риманова и пр. геометрии), в соответствии с группами тех преобразований, с точностью до которых рассматриваются объекты в этих науках.

Клейн определил топологию (*analysis situs*) как науку, которая изучает свойства объектов, инвариантные относительно преобразований, «составленных из бесконечно малых деформаций», т.е. преобразований, непрерывных вместе со своими обратными (сейчас такие преобразования называются *топологическими преобразованиями*, или *гомеоморфизмами*).

Впоследствии Пуанкаре охарактеризовал топологию как «особую геометрию, чисто качественную... которая не предполагает известными ни понятие прямой, не понятие плоскости...». Соответственно определяются и сами объекты топологии (топологические пространства) — это множества, снабжённые структурой, позволяющей определить понятие непрерывного отображения.

Эйлер: задача о семи мостах Кёнигсберга (1736); формула $\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2$, связывающая число вершин В, число рёбер Р и число граней Г выпуклого многогранника (1758).

Гаусс: создал теорию узлов.

Мёбиус: в 1840 г. сформулировал проблему четырёх красок (всякую ли карту можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы любые две страны, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета?), которая была решена (положительно) лишь в 1976 г.; в 1858 г. придумал одностороннюю поверхность — лист Мёбиуса

Жордан + Веблен: теорема о том, что простая кривая на плоскости делит плоскость на две области, внутреннюю и внешнюю (1905)

Бетти, Риман, Рисс, Фреше ...

Алгебраическая топология — подход, основанный на использовании алгебры в изучении топологических свойств.

Дифференциальная топология занимается гладкими многообразиями и гладкими функциями на них (строго говоря, это не раздел топологии как таковой, поскольку рассматривает не топологические, а дифференциальные инварианты).

Общая, или теоретико-множественная, топология изучает непрерывность в наиболее общем смысле. Явилась результатом развития теории подмножеств прямой, введения понятия многообразия и исследования метрических пространств (в частности, нормированных линейных пространств в функциональном анализе). И хотя в современном виде общая топология окончательно оформилась лишь к сороковым годам прошлого века, будучи наиболее общей и универсальной теорией, она лежит в основе всех прочих топологических теорий, подобно тому как теория множеств лежит в основе всей математики.

Система аксиом ZFC

Аксиома существования: множества существуют.

(В виде формулы эта аксиома может выглядеть так: $\exists x (x = x)$.)

Аксиома объёмности: два множества равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы, т.е. каждый элемент одного множества принадлежит другому и наоборот.

Аксиома пары: для любых множеств x и y существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — x и y (*неупорядоченная пара* элементов x и y).

Аксиома объединения: для любого множества x существует множество $y = \bigcup x$ — объединение множеств-элементов x; его элементами являются в точности все элементы элементов множества x.

Схема аксиом выделения: любому множеству x и любому свойству φ отвечает множество, состоящее в точности из тех элементов множества x, которые обладают свойством φ.

Из схемы аксиом выделения и аксиомы существования вытекает существование **пустого множества**, не имеющего вообще никаких элементов (оно обозначается $\varnothing$): достаточно в качестве $\varphi(t)$ взять $\neg(t = t)$.

Множество всех $y \in x$, обладающих свойством φ, обозначается $\{y \in x : \varphi(y)\}$. Когда рассматриваются элементы фиксированного множества x, иногда пишут $\{y : \varphi(y)\}$.

Схема аксиом подстановки: если $\varphi(u, v)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества x определено множество y, элементами которого являются те и только те множества z, для которых $\varphi(a, z)$ истинно при некотором $a \in x$.

Здесь формулу φ можно воспринимать как класс-отображение, которое каждому a ставит в соответствие то единственное множество b, для которого высказывание $\varphi(a, b)$ истинно; тогда y — не что иное как образ множества x при этом «отображении».

Аксиома бесконечности: существует множество, которое содержит (в качестве элемента) $\varnothing$ и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ ($x \cup \{x\}$ — множество, элементами которого являются все элементы множества x и само множество x).

Аксиома множества подмножеств: для любого множества x существует множество y, состоящее из всех подмножеств множества x; для него используются обозначения $\mathscr{P}(x)$, 2^x и $\exp x$.

Аксиома регулярности: каждое непустое множество x содержит элемент y такой, что $x \cap y = \varnothing$.

Аксиома выбора: для каждого множества x, состоящего из непересекающихся непустых элементов, существует множество, которое пересекается с каждым элементом множества x ровно по одному элементу.

Отношения и отображения

Аксиома множества подмножеств вместе со схемой аксиом подстановки даёт возможность образовывать одноэлементное множество $\{x\}$ из любого множества x:

$$\{x\} = \{y \in \mathscr{P}(x) : y = x\}.$$

Отсюда и из аксиомы пары вытекает, что для любых двух множеств x и y существует множество

$$\{\{x\}, \{x, y\}\};$$

оно называется упорядоченной парой элементов x и y и обозначается (x, y). При этом x называется первым элементом, а y — вторым элементом пары (x, y).

Знакомое всем понятие декартова произведения $X \times Y$ двух множеств X и Y определяется как множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Подмножества декартова произведения называются бинарными отношениями, или просто отношениями, между X и Y. Отношение между X и X называется отношением на X. Важнейший частный случай отношения между множествами — отображение, а важнейший частный случай отношения на множестве — порядок.

Отображения

Отображение между множествами X и Y (ещё говорят «отображение множества X в Y» или «отображение из X в Y») — это любое подмножество f декартова произведения $X \times Y$ со свойствами

- $\forall x \in X \exists y \in Y ((x, y) \in f)$ и
- $((x, y) \in f) \wedge ((x, z) \in f) \to (y = z)$.

(Подмножества $X \times Y$, удовлетворяющие лишь второму условию, называются частичными отображениями.) Множество X называется областью определения отображения f, а множество Y — областью значений.

Для отображения f из X в Y с фиксированной областью значений Y используется обозначение $f\colon X \to Y$.

Образом $f(x)$ точки $x \in X$ при отображении f, или значением отображения f в точке x, называется та единственная точка $y \in Y$, для которой $(x, y) \in f$. Говорят при этом, что точка x переходит в точку y при отображении f, или что f переводит x в y, и пишут $x \mapsto y$. Определены также образ $f(A)$ множества $A \subset X$ при отображении f и полный прообраз $f^{-1}(B)$ множества $B \subset Y$:

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A((x, y) \in f)\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \exists y \in B((x, y) \in f)\}.$$

Образ $f(X)$ всего множества X называется образом отображения f. Просто прообразом множества B называется любое множество $C \subset X$, для которого $f(C) = B$.

Иногда (когда ясно из контекста, что речь идёт именно о полном прообразе) слово «полный» опускают и называют полный прообраз просто прообразом. Если множество B одноточечно, т.е. $B = \{y\}$ для некоторого $y \in Y$, вместо $f^{-1}(\{y\})$ обычно пишут $f^{-1}(y)$ и говорят о (полном) прообразе точки y, имея в виду (полный) прообраз одноточечного множества $\{y\}$. В случае, когда этот прообраз тоже состоит из одной точки (а также когда речь идёт об обратном отображении — см. ниже), под $f^{-1}(y)$ часто подразумевают не сам прообраз, а его единственный элемент.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется сюръективным, если $f(X) = Y$ (в этом случае иногда пишут $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$), и инъективным, если прообраз каждой точки $y \in Y$ содержит не более одной точки множества X. Отображение, одновременно являющееся сюръективным и инъективным, называется биективным, или взаимно однозначным. Сюръективные (инъективные, биективные) отображения называются также сюръекциями или наложениями (инъекциями или вложениями, биекциями).

Отображения во множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел называются функциями. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена, если существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in X$.

Простейший пример отображения — пустое отображение. Один из простейших примеров непустого отображения — тождественное отображение непустого множества X на себя; оно равно диагонали $\{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ декартова произведения $X \times X$ (переводит каждую точку множества X в себя). Для такого отображения используется обозначение id_X.

Свойства образов и прообразов отображений

Для любого отображения $f\colon X \to Y$ и любых множеств $A_1 \subset A_2 \subset X$

$$f(A_1) \subset f(A_2),$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2),$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2),$$

и для любых множеств $B_1 \subset B_2 \subset Y$

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f(B_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Порядок

Частичный порядок, или просто порядок, на множестве X — это подмножество $\leqslant$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leqslant y$ вместо $(x, y) \in \leqslant$; кроме того, мы иногда пишем $y \geqslant x$ вместо $x \leqslant y$):

- $((x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z)) \to (x \leqslant z)$ (транзитивность);
- $\forall x \in X (x \leqslant x)$ (рефлексивность);
- $((x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x)) \to (x = y)$ (антисимметричность).

Множество X вместе с заданным на нём порядком (т.е. пара $(X, \leqslant)$) называется (частично) упорядоченным множеством; про множество X говорят, что оно (частично) упорядочено отношением $\leqslant$. Запись $x \leqslant y$ читается «элемент x не больше элемента y» или «элемент x не превосходит элемента y», а запись $x \geqslant y$ — «элемент x не меньше элемента y».

Для каждого порядка $\leqslant$ на X однозначно определено соответствующее отношение $<$ строгого порядка: $x < y$, если $x \leqslant y$ и $x \neq y$. При этом говорят, что элемент x меньше элемента y, а y больше x. И наоборот, по строгому порядку $<$ очевидным образом восстанавливается порядок $\leqslant$, которому он соответствует.

Два элемента x и y множества X, упорядоченного отношением $\leqslant$, сравнимы, если либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Говорят, что $y \in X$ лежит между $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leqslant y \leqslant z$. Элемент x множества $Y \subset X$ называется минимальным (максимальным) элементом этого множества, если $\forall y \in Y((y \leqslant x) \to (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y((x \leqslant y) \to (y = x))$). Элемент x ограничивает множество $Y \subset X$ сверху (снизу), или является верхней (нижней) гранью множества Y, если $\forall y \in Y(y \leqslant x)$ (соответственно $\forall y \in Y(x \leqslant y)$). Если при этом x принадлежит множеству Y, то он называется наименьшим (наибольшим) элементом Y и обозначается $\min Y$ ($\max Y$). Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется ограниченным сверху (ограниченным снизу, ограниченным). Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества Y, если она существует, называется также точной верхней (нижней) гранью, или супремумом (инфимумом), множества Y и обозначается $\sup Y$ ($\inf Y$).

Интервалом упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ называется любое его подмножество I с тем свойством, что для любых $x, y \in I$ всякий элемент $z \in X$ между x и y принадлежит I. Интервалы бывают восьми типов:

$$\begin{array}{rlrl}
\text{а)} & \{x : x \leqslant a\}, & \text{д)} & \{x : a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b], \\
\text{б)} & \{x : x < a\}, & \text{е)} & \{x : a < x < b\} = (a, b), \\
\text{в)} & \{x : a \leqslant x\}, & \text{ё)} & \{x : a \leqslant x < b\} = [a, b), \\
\text{г)} & \{x : a < x\}, & \text{ж)} & \{x : a < x \leqslant b\} = (a, b],
\end{array}$$

где $a, b \in I$. Интервалы типов а), в) и д) называются замкнутыми, интервалы типов б), г) и е) — открытыми, а интервалы типов ё) и ж) — полуоткрытыми интервалами, а иногда просто полуинтервалами. Интервалы типов а)–г) называют лучами, а интервалы типов д)–ж) — ограниченными интервалами (хотя если множество $(X, \leqslant)$ содержит наименьший или наибольший элемент, лучи тоже могут быть ограниченными). Интервалы типов а) и б) называют также начальными интервалами.

Порядок $\leqslant$ на X называется линейным, если любые два элемента x и y множества X сравнимы. В этом случае пара $(X, \leqslant)$ называется линейно упорядоченным множеством, а пара $(X, <)$ — строго линейно упорядоченным множеством.

Порядок $\leqslant$ на X полон, если он линеен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в Y) элемент. Пара $(X, \leqslant)$, где $\leqslant$ — полный порядок, называется вполне упорядоченным множеством, а пара $(X, <)$ — строго вполне упорядоченным множеством. Всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент (хотя наибольший элемент существовать не обязан), и для всякого его элемента, который не является наибольшим, определён элемент, непосредственно следующий за ним.

На каждом подмножестве Y упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ естественно возникает индуцированный порядок, или сужение порядка $\leqslant$ на Y — это пересечение порядка $\leqslant$ (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линеен или полон, если таковым является порядок $\leqslant$ на X. В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

Отображение $f : X \to Y$ между упорядоченными множествами $(X, \leqslant)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ называется порядковым изоморфизмом, а сами эти упорядоченные множества — порядково изоморфными, если f взаимно однозначно и для любых $x, y \in X$ соотношение $x \leqslant y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f(x) \preccurlyeq f(y)$. В случае линейно упорядоченных множеств любая изотонная (т.е. сохраняющая порядок, «монотонно неубывающая») биекция является порядковым изоморфизмом.

Теорема Цермело и лемма Цорна

Теорема Цермело

Любое множество можно вполне упорядочить.

Лемма Цорна

Пусть $(X, \leqslant)$ *— частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества* $Y \subset X$*, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в* X *есть максимальный элемент.*

Трансфинитная индукция и рекурсия

Понятие вполне упорядоченного множества и теорема Цермело позволяют распространить метод математической индукции на произвольные множества. Пусть X — любое непустое множество и $\varphi(x)$ — любое высказывание об элементах X. Предположим, что нам удалось ввести полный порядок $\leqslant$ на X так, что мы умеем доказывать $\varphi(x_0)$ для наименьшего элемента x_0 и умеем выводить утверждение $\varphi(x)$ из утверждения «$\varphi(y)$ верно для всех $y < x$». Тогда мы смело можем утверждать, что утверждение $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$. Действительно, если это не так, т.е. если множество $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\}$ непусто, то мы можем взять наименьший элемент в этом множестве и сразу получить противоречие.

Теорема об изоморфизме

Пусть $(X, \leqslant)$ *и* $(Y, \preccurlyeq)$ *— любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует* $x_* \in X$ *такой, что начальный интервал* $\{x \in X : x < x_*\}$ *множества* X *порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству* Y*, либо существует* $y_* \in Y$ *такой, что вполне упорядоченное множество* X *порядково изоморфно начальному интервалу* $\{y \in Y : y \prec y_*\}$ *множества* Y*, либо сами множества* $(X, \leqslant)$ *и* $(Y, \preccurlyeq)$ *порядково изоморфны.*

Отношения эквивалентности

Отношение эквивалентности на множестве X — это подмножество $\sim$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами:

- $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \to (x \sim z)$ (транзитивность);
- $\forall x \in X (x \sim x)$ (рефлексивность);
- $(x \sim y) \to (y \sim x)$ (симметричность).

Запись $x \sim y$ читается «элемент x эквивалентен элементу y» или «элемент x $\sim$-эквивалентен элементу y».

Для каждого элемента $x \in X$ множество $\{y \in X : y \sim x\}$ называется классом эквивалентности элемента x и обозначается $[x]$ или $[x]_\sim$. Множество Y классов эквивалентности состоит из непересекающихся подмножеств множества X, и $\bigcup Y = X$, т.е. Y является разбиением множества X. Множество классов эквивалентности называется фактормножеством множества X по отношению $\sim$ и обозначается $X/\sim$.

Для каждого отношения эквивалентности $\sim$ на множестве X правило $x \mapsto [x]$ определяет сюръективное отображение $q\colon X \to X/{\sim}$. Оно называется естественным отображением множества X на фактормножество $X/{\sim}$. С другой стороны, каждая сюръекция $f: X \to Y$ порождает отношение эквивалентности $\sim_f$, для которого она является естественным отображением: $x \sim_f y$, если $f(x) = f(y)$; при этом $Y = X/{\sim_f}$.

Таким образом, по сути отношения эквивалентности и сюръективные отображения — взаимозаменяемые понятия, и выбор языка эквивалентностей или отображений — не более чем вопрос удобства и предпочтений.

Операции над множествами

Бинарные операции — это $\cap$ (пересечение), $\cup$ (объединение), $\setminus$ (разность) и $\vartriangle$ (симметрическая разность ($A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$). Унарные операции — переход к подмножеству и (при наличии фиксированного множества U, содержащего все рассматриваемые множества в качестве подмножеств) дополнение — разность между U и данным множеством; дополнение множества A обозначается A^{c} или $\overline{A}$. Последовательность выполнения операций над множествами задаётся скобками. При отсутствии скобок сначала выполняется операция дополнения, затем операции пересечения и разности, которые имеют одинаковый приоритет, и в последнюю очередь — операции объединения и симметрической разности.

Основные свойства операций

- Операции $\cap$, $\cup$ и $\triangle$ ассоциативны.
- Операции $\cap$, $\cup$ и $\triangle$ коммутативны.
- Операции $\cap$ и $\cup$ дистрибутивны друг относительно друга: для любых множеств A, B и C выполнены соотношения
$$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$$
и
$$A \cup B \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$
- Операция $\cap$ дистрибутивна относительно $\triangle$: для любых множеств A, B и C выполнено равенство
$$(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C).$$
- Для любого множества A $A \cap \varnothing = \varnothing$ и $A \cup \varnothing = A$.
- Дополнение множества A до фиксированного объемлющего множества U обладает свойствами
$$A^c \cap A = \varnothing, \quad A^c \cup A = U, \quad A^c \vartriangle A = U, \quad (A^c)^c = A,$$
$$\varnothing^c = U, \quad U^c = \varnothing.$$

Законы де Моргана

Для любых множеств A, B и C

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

и

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Декартово произведение $A \times B$ множеств A и B — это множество упорядоченных пар $\{(a, b) : a \in A,\ \ b \in B\}$ (эта операция естественным образом обобщается до n-арной операции декартова произведения n множеств).

Возведение в степень: для любых множеств A и B множество A^B («A в степени B») определяется как множество всех отображений из B в A:

$$A^B = \{f : B \to A\}.$$

Это множество пусто в том и только том случае, когда A пусто, а B непусто. Если $B = \varnothing$, то $A^B = \{\varnothing\}$.

Всякое подмножество A любого множества X однозначно определяется его характеристической функцией $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, так что множество всех подмножеств множества X естественно отождествляется с множеством 2^X, и для множества всех подмножеств наряду с обозначением $\mathscr{P}(X)$ широко используется обозначение 2^X.

Операции над семействами множеств

Для семейства множеств $\mathscr{F}$ его объединение — это множество всех элементов всех множеств из $\mathscr{F}$, а пересечение — это множество тех x, которые принадлежат каждому множеству из семейства $\mathscr{F}$.

Для объединения семейства множеств $\mathscr{F}$ используются также обозначения $\bigcup\{X : X \in \mathscr{F}\}$ и $\bigcup\limits_{X \in \mathscr{F}} X$. Возможны вариации — например, если семейство задано некоторым свойством φ, пишут $\bigcup\{X : \varphi(X)\}$. Аналогичные обозначения используются для пересечений.

Пусть заданы множество A, семейство множеств $\mathscr{F}$ и сюръективное отображение $f\colon A \to \mathscr{F}$. Для $\alpha \in A$ положим $X_\alpha = f(\alpha)$ (множества с разными индексами могут совпадать). Семейство $\mathscr{F}$ вместе с отображением f называется индексированным семейством и обозначается $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Множество A называется множеством индексов или индексным множеством, а его элементы — индексами элементов индексированного семейства. Элементами индексированного семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ считаются множества X_α. Если $f(\alpha) = f(\beta)$ для $\alpha \neq \beta$, то X_α и X_β — одно и то же множество, но разные элементы индексированного семейства.

В индексированных семействах индексами снабжены только сами множества из этих семейств, но не их элементы. Поэтому объединения и пересечения индексированных семейств определяются точно так же, как объединения и пересечения соответствующих неиндексированных семейств, и ничем от них не отличаются, зато добавляются наглядные варианты обозначений $\bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ (то же для пересечений).

Для объединений и пересечений семейств выполнены законы дистрибутивности и де Моргана в сильной форме: для любого множества X и любого индексированного (для удобства) семейства множеств $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$

- $X \cap \bigcup\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in A}(X \cap Y_\alpha)$,
- $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in A}(X \setminus Y_\alpha)$,
- $X \cup \bigcap\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in A}(X \cup Y_\alpha)$,
- $X \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in A}(X \setminus Y_\alpha)$.

Декартово произведение семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ определяется так:

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : \forall \alpha \in A(f(\alpha) \in X_\alpha)\}.$$

Элемент $f : A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ принято записывать не в виде отображения, а в специальном виде $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где подразумевается, что $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого α. При этом x_α называется α-й координатой элемента $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Канонической проекцией произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β, где $\beta \in A$, называется отображение $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha \in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Когда ясно из контекста, что речь идёт именно о канонических проекциях, мы будем называть их просто проекциями.

Операции над отображениями

Сужение, подотображение, продолжение, обратное отображение …

- Композиция отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — это отображение $g \circ f\colon X \to Z$, определённое правилом $x \mapsto g(f(x))$.
- Декартовым произведением отображений $f_1\colon X_1 \to Y_1$ и $f_2\colon X_2 \to Y_2$ называется отображение $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, определённое правилом $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Более общо, декартово произведение семейства отображений $\{f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha\}$ — это отображение
$$\prod_{\alpha\in A} f_\alpha\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha, \qquad (x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A}.$$

- Диагональное произведение, или диагональ, отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$, определённых на одном и том же множестве, — это отображение $f \mathbin{\Delta} g\colon X \to Y \times Z$, заданное правилом $x \to (f(x), g(x))$, а диагональ семейства отображений $\{f_\alpha\colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — это отображение

  $$\mathop{\Delta}_{\alpha\in A} f_\alpha\colon X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha, \qquad x \mapsto (f_\alpha(x))_{\alpha\in A}.$$

  Всякое отображение $f\colon X \to \prod Y_\alpha$ является диагональным произведением своих «координат» $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ (каждое f_α переводит точку $x \in X$ в α-ю координату её образа $f(x)$).

Мощность множества

Мощность множества X обозначается $|X|$. Два множества X и Y называются равномощными, если существует биекция между ними; в этом случае говорят ещё, что мощности X и Y равны, и пишут $|X| = |Y|$. В наивной (канторовской) теории множеств мощность $|X|$ множества X понимается как класс всех множеств Y, для которых существует биекция $X \rightleftarrows Y$.

Мощности множеств можно сравнивать: $|X| \leqslant |Y|$, если X равномощно подмножеству Y, т.е. если существует инъекция из X в Y (или, что равносильно, сюръекция из Y на X). Хорошо известная теорема Кантора–Бернштейна гласит, что если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|X| = |Y|$.

Кантор называл мощности множеств кардиналами и обозначал бесконечные кардиналы буквой $\aleph$ («алеф», первая буква еврейского алфавита) с индексами; индексы были упорядочены так, что бо́льшим индексам соответствовали бо́льшие кардиналы. Самый маленький алеф — это $\aleph_0$ (мощность множества натуральных чисел). Все множества мощности $\aleph_0$ (т.е. находящиеся во взаимно однозначном соответствии с множеством натуральных чисел) называются счётными, а не являющиеся счётными бесконечные множества называются несчётными. Наименьшая мощность несчётного множества обозначается $\aleph_1$, наименьшая мощность, бо́льшая $\aleph_1$, обозначается $\aleph_2$ и т.д.

Чем индексировать кардиналы?

Чтобы ответить на этот вопрос, вдобавок ко взаимно однозначным соответствиям между множествами Кантор рассмотрел порядковые изоморфизмы между вполне упорядоченными множествами. Классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств он назвал порядковыми типами, или ординалами. Теорема об изоморфизме для вполне упорядоченных множеств даёт прекрасный инструмент для сравнения ординалов — достаточно заметить, что никакое вполне упорядоченное множество $(X, \leqslant)$ не изоморфно никакому своему собственному начальному интервалу $\{x \in X : x < x^*\}$, где $x^* \in X$. После этого останется лишь объявить, что порядковый тип вполне упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ меньше порядкового типа вполне упорядоченного множества $(Y, \preccurlyeq)$, если $(X, \leqslant)$ порядково изоморфно начальному интервалу множества $(Y, \preccurlyeq)$. Именно ординалами Кантор и индексировал алефы.

В современной (аксиоматической) теории множеств теория кардиналов и ординалов вполне формализована. Под ординалами понимаются не классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств, а конкретные вполне упорядоченные множества. В определении ординала фигурирует понятие транзитивности: множество X транзитивно, если каждый элемент X является его подмножеством; иными словами, для каждого $y \in X$ все элементы множества y являются также элементами X. Ординал (другие названия — порядковый тип и порядковое число) — это любое транзитивное множество, строго вполне упорядоченное отношением $\in$. Соответствующий нестрогий порядок обозначается стандартным символом $\leqslant$, а сами ординалы обычно обозначаются первыми буквами греческого алфавита.

Из определения видно, что каждый элемент ординала сам является ординалом: если α — ординал и $\beta \in \alpha$, то β — тоже ординал, причём $\beta = \{\gamma \in \alpha : \gamma < \beta\}$. Иными словами, любой элемент ординала является начальным интервалом этого ординала и наоборот.

Из теоремы об изоморфизме для вполне упорядоченных множеств вытекает, что если α и β — два неизоморфных ординала, то либо один из них изоморфен начальному интервалу (= элементу) другого, либо наоборот. Легко видеть, что в данном случае изоморфизм означает равенство: если α и β — два разных ординала, то либо $\alpha \in \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Таким образом, отношение $\in$ (и $\leqslant$) упорядочивает не только сами ординалы, но и позволяет сравнивать любые ординалы друг с другом; допуская некоторую вольность, можно сказать, что это отношение является порядком на классе всех ординалов.

Итак, для любых двух ординалов α и β либо $\alpha \leqslant \beta$, либо $\beta \leqslant \alpha$, причём записи $\alpha < \beta$ и $\alpha \in \beta$ означают ровно одно и тоже, а запись $\alpha \leqslant \beta$ означает, что либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$. Кроме того, в силу аксиомы регулярности в любом непустом множестве ординалов имеется наименьший элемент, т.е. класс ординалов строго вполне упорядочен отношением $\in$.

Из теоремы Цермело и того, что всякое вполне упорядоченное множество изоморфно ординалу, следует, что мощность любого множества равна мощности некоторого ординала, а значит, и мощности некоторого ω_α. Отсюда немедленно вытекает сравнимость мощностей любых множеств и существование наименьшего несчётного кардинала $\aleph_1$ (а также и существование всех прочих алефов). В современной теории множеств кардиналы (мощности множеств) определяются как ординалы вида ω_α; другими словами, кардинал — это любой ординал α с тем свойством, что мощность всякого ординала $\beta < \alpha$ меньше мощности α, т.е. никакой ординал $\beta < \alpha$ нельзя сюръективно отобразить на α; можно ещё сказать, что ординал является кардиналом, если он равен своей собственной мощности.

Таким образом, символы ω_α и обозначают одно и то же, и сейчас ω_α используются для обозначения кардиналов даже чаще, чем $\aleph_\alpha$ (хотя использовать $\aleph_\alpha$ для обозначения соответствующих ординалов, когда они рассматриваются именно как ординалы, а не кардиналы, не принято). Итак, кардиналы — это конкретные ординалы, и класс всех кардиналов вполне упорядочен тем же отношением $\leqslant$, что и ординалы. Кардиналы обычно обозначаются буквами из середины греческого алфавита или алефом с индексами.
Кардиналы отличаются от ординалов арифметикой.

Метрические пространства

Определение

Метрикой на множестве X называется функция $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ со свойствами

1. $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$ (аксиома тождества);
2. $d(x,y)=d(y,x)$ для любых $x,y\in X$ (аксиома симметрии);
3. $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ для любых $x,y,z\in X$ (неравенство треугольника).

Множество X с метрикой d называется метрическим пространством и обозначается (X,d) или просто X. Точками метрического пространства считаются точки множества X. Значение $d(x,y)$ называется расстоянием между точками x и y в метрике d или в метрическом пространстве (X,d). Расстояние между непустыми множествами $A,B\subset X$ определяется формулой $d(A,B)=\inf\{d(x,y) : x\in A, y\in B\}$. Вместо $d(\{x\},A)$ пишут $d(x,A)$.

Из определения метрики вытекает, что $d(x, y) > 0$ для любых различных $x, y \in X$.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Множество

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

называется ε-окрестностью точки x, или открытым шаром радиуса ε с центром в точке x, а множество

$$\overline{B}_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) \leqslant \varepsilon\}$$

— замкнутым шаром радиуса ε с центром в x.

Говорят, что множество $U \subset X$ открыто, если для любого $x \in U$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. Всякое множество $F \subset X$, для которого $X \setminus F$ открыто, называется замкнутым.

Иначе, множество U открыто, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ε-окрестность этой точки, и F замкнуто, если у любой не принадлежащей F точки найдётся ε-окрестность, не пересекающая F.

В силу неравенства треугольника все открытые шары $B_d(x, \varepsilon)$ действительно открыты: если $y \in B_d(x, \varepsilon)$, то $d(y, x) < \varepsilon$, а значит, найдётся $\delta > 0$, для которого $d(y, x) < \varepsilon - \delta$; для любой точки $z \in B_d(y, \delta)$ по неравенству треугольника имеем $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon - \delta + \delta = \varepsilon$, а это означает, что $B_d(y, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Очевидно также, что все замкнутые шары $\overline{B}_d(x, \varepsilon)$ замкнуты.

Итак, открытые множества — это всевозможные объединения множеств вида $B_d(x, \varepsilon)$ (с разными x и ε). Иными словами, множество $U \subset X$ открыто $\iff$ $U = \bigcup\{B_d(x, \varepsilon_x) : x \in A\}$, где A — любое подмножество X и ε_x, $x \in A$, — любые положительные числа.

Непрерывность отображений метрических пространств, сходимость последовательности в метрическом пространстве и т.п. определяются точно так же, как и в случае числовых функций — например, отображение f непрерывно в точке x, если для любой ε-окрестности U точки $f(x)$ найдётся δ-окрестность V точки x, для которой $f(V) \subset U$.

Топологическое пространство

Определение

Пусть X — множество и каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие семейство $\mathscr{U}(x)$ подмножеств X так, что выполнены следующие условия-аксиомы:

1. любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$ содержит точку x;
2. для любых $U, V \in \mathscr{U}(x)$ найдётся $W \in \mathscr{U}(x)$ такое, что $W \subset U \cap V$;
3. для любого множества $U \in \mathscr{U}(x)$ и любой точки $y \in U$ найдётся $V \in \mathscr{U}(y)$ такое, что $V \subset U$.

Семейство $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in X}$ называется системой открытых окрестностей. Множество X вместе с заданной на нём системой открытых окрестностей называется топологическим пространством; точками топологического пространства считаются точки множества X.

Подмножество U топологического пространства X называется открытым, если для любой точки $x \in U$ существует $V \in \mathscr{U}(x)$ такое, что $V \subset U$. Множество $F \subset X$ замкнуто, если $X \setminus F$ открыто. Любое открытое множество U, содержащее точку $x \in X$, называется открытой окрестностью этой точки.

Условие 3 в этом определении равносильно тому, что любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$, $x \in X$, открыто, а условия 1 и 3 вместе — тому, что любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$ является открытой окрестностью точки x.

Определение топологического пространства

Топологическое пространство — это множество X вместе с семейством $\mathscr{T}$ его подмножеств, удовлетворяющим следующим условиям-аксиомам:

1. $\varnothing \in \mathscr{T}$, $X \in \mathscr{T}$;
2. если $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}$, то $\bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{T}$ (иными словами, если A — произвольное индексное множество и для всякого $\alpha \in A$ $\ U_\alpha \in \mathscr{T}$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathscr{T}$);
3. если $U, V \in \mathscr{T}$, то $U \cap V \in \mathscr{T}$.

Семейство $\mathscr{T}$ называется топологией на множестве X, его элементы — открытыми множествами, а их дополнения — замкнутыми множествами. Множества, являющиеся одновременно и открытыми, и замкнутыми, называются открыто-замкнутыми.

Для топологического пространства (множества X с топологией $\mathscr{T}$) используется обозначение $(X, \mathscr{T})$ или X; его точками считаются элементы множества X.

Множество $U \subset X$ называется открытой окрестностью точки $x \in X$, если $U \ni x$ и $U \in \mathscr{T}$. Любое подмножество X, содержащее открытую окрестность точки x, называется окрестностью точки x, а любое подмножество вида $N \setminus \{x\}$, где N — окрестность точки x, называется проколотой окрестностью x.

Окрестности определены и для подмножеств X: открытой окрестностью множества $A \subset X$ называется любое открытое подмножество X, содержащее A, а окрестностью множества A называется любое подмножество X, содержащее некоторую открытую окрестность множества A.

Определение

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ называется базой топологии $\mathscr{T}$, или базой топологического пространства X, если любое открытое множество U в X является объединением элементов $\mathscr{B}$.

Очевидно, семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ является базой топологии $\mathscr{T}$ на множестве X тогда и только тогда когда для каждой точки $x \in X$ и любой её окрестности U найдётся $V \in \mathscr{B}$, удовлетворяющее условиям $x \in V \subset U$.

Предложение

Семейство $\mathscr{B}$ подмножеств множества X является базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда

1. $\bigcup \mathscr{B} = X$ *и*
2. *для любых $U, V \in \mathscr{B}$ и любой точки $x \in U \cap V$ найдётся $W \in \mathscr{B}$ со свойством $x \in W \subset U \cap V$, т.е. пересечение любых двух элементов $\mathscr{B}$ является объединением некоторого семейства элементов $\mathscr{B}$.*

Определение

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ называется **предбазой топологии** $\mathscr{T}$, или **предбазой топологического пространства** X, если семейство всех конечных пересечений элементов $\mathscr{B}$ является базой топологии $\mathscr{T}$.

Предложение

Семейство $\mathscr{B}$ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда $\bigcup \mathscr{B} = X$.

Определение

Семейство $\mathscr{B}(x)$ (открытых) окрестностей точки x топологического пространства $(X, \mathscr{T})$ называется (открытой) локальной базой топологии $\mathscr{T}$ в точке x, или базой (открытых) окрестностей точки x в пространстве $(X, \mathscr{T})$, если любая окрестность точки x содержит окрестность из $\mathscr{B}(x)$.

Всякая предбаза топологии $\mathscr{T}$ на множестве X однозначно определяет некоторую базу той же топологии, а значит, и саму топологию. Семейство локальных баз топологии во всех точках $x \in X$ образует систему окрестностей и тоже однозначно определяет топологию. Однако одна и та же топология может иметь (и почти всегда имеет) много разных баз и локальных баз. Если семейство $\mathscr{B}$ является базой некоторой топологии $\mathscr{T}$ на множестве X, то любое семейство $\mathscr{B}' \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$, тоже является базой $\mathscr{T}$.

Определение

Наименьшая мощность локальной базы топологии топологического пространства X в точке $x \in X$ называется характером X в точке x и обозначается $\chi(x, X)$:

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathscr{B}(x)| : \mathscr{B}(x) \text{ — локальная база топологии } X \text{ в точке } x\}.$$

Супремум кардиналов $\chi(x, X)$ по всем точкам $x \in X$ называется характером пространства X и обозначается $\chi(X)$:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Если характер пространства X не более чем счётен, т.е. X имеет не более чем счётную локальную базу в каждой точке, то говорят, что X удовлетворяет первой аксиоме счётности.

Определение

Наименьшая мощность базы топологии топологического пространства X называется весом этого пространства и обозначается $w(X)$:

$$w(X) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{ — база топологии } X\}.$$

Если вес пространства X не более чем счётен, то говорят, что X удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Для любого топологического пространства X имеет место неравенство

$$\chi(X) \leqslant w(X),$$

поскольку любая база любой топологии на множестве X содержит открытую локальную базу той же топологии в каждой точке $x \in X$.

Определение

Пусть X — метрическое пространство. Семейство $\mathscr{B} = \{\mathscr{B}(x) : x \in X\}$, где $\mathscr{B}(x) = \{B_d(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ — множество всех ε-окрестностей точки x метрического пространства (X, d), образует систему открытых окрестностей, а значит, порождает некоторую топологию $\mathscr{T}_d$, называемую метрической топологией. Семейство $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ является базой этой топологии.

Если (X, d) — любое метрическое пространство и $\mathscr{T}_d$ — топология, порождённая метрикой d, то характер пространства $(X, \mathscr{T}_d)$ всегда не более чем счётен: любая окрестность любой точки $x \in X$ содержит $\frac{1}{n}$-окрестность x для некоторого n; значит, семейство $\frac{1}{n}$-окрестностей x для всех $n \in \mathbb{N}$ образует локальную базу топологии $\mathscr{T}_d$ в точке x, а это семейство не более чем счётно.

Разные метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X могут порождать одну и ту же топологию $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$ на X.

Определение

Две метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X эквивалентны, если они порождают одну и ту же метрическую топологию, т.е. если $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$.

Примеры метрических пространств

- Произвольное множество X с дискретной метрикой $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, которая определяется так:
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \qquad x, y \in X.$$
Эта метрика порождает дискретную топологию $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$, в которой все подмножества X открыты (и замкнуты).
- Вещественная прямая $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $d\colon (x, y) \mapsto |x - y|$.
- На любом нормированном векторном пространстве V с нормой $\|\cdot\|$ стандартным образом определяется метрика $d(x, y) = \|x - y\|$. Таким образом, на векторном пространстве со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ возникает метрика $d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$ — она порождена нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

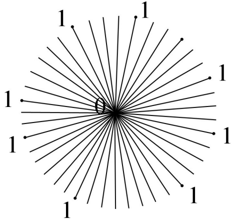
В частности, стандартное скалярное произведение на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, определённое правилом $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ для $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{y} = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$, задаёт евклидову норму $|\mathrm{x}|_n = \sqrt{\sum_{i \leqslant n} x_i^2}$ и евклидову метрику $d_n(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sqrt{\sum_{i \leqslant n} (x_i - y_i)^2}$. Топологию, порождённую этой метрикой на $\mathbb{R}^n$, мы будем называть евклидовой топологией.

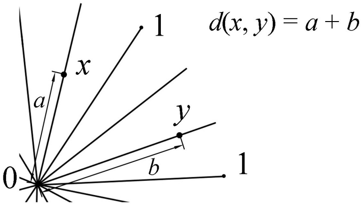
- Гильбертово пространство числовых последовательностей
$$\ell^2 = \Big\{ \mathsf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty \Big\}$$
  со скалярным произведением $(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n$ и нормой $\|\mathsf{x}\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{x_n^2}$.

  Пространство ℓ^2 входит в серию нормированных пространств
$$\ell^p = \big\{ \mathsf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \big\}, \quad \|\mathsf{x}\|_p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[p]{|x_n|^p},$$
  где $p \in \mathbb{N}$; сюда же относится пространство ℓ^∞ всех ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|\mathsf{x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

- Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с p-адической нормой, которая определяется так: Пусть p — простое число. Любое не равное нулю рациональное число r можно представить в виде $p^n\frac{a}{b}$, где n, a и b — целые числа, причём a и b не делятся на p. Положим $|r|_p = p^{-n}$ и $|0|_p = 0$. Так определённая функция $|\cdot|_p$ является нормированием поля $\mathbb{Q}$, и она удовлетворяет условию $|r+s|_p \leqslant \max\{|r|_p, |s|_p\}$, а значит, порождённая ею метрика d_p удовлетворяет сильному неравенству треугольника
$$d_p(x,z) \leqslant \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\} \qquad \text{для любых} \quad x,y,z \in \mathbb{Q}.$$
Метрики с этим свойством называются неархимедовыми метриками, или ультраметриками.

- **Метрический ёж $J(\varkappa)$ колючести $\varkappa$** (где $\varkappa$ — любой кардинал) — это объединение $\varkappa$ копий единичного отрезка (иголок) с общим началом 0. Формально: $J(\varkappa) = \{0\} \cup (0,1] \times \varkappa$. Расстояние между точками x и y определяется как обычное расстояние $|x-y|$ между точками единичного отрезка, если x и y принадлежат одной иголке, и как сумма расстояний от этих точек до 0, если они принадлежат разным иголкам.





Формальное определение: $\quad d(0,0) = 0, \quad d(0,(x,\alpha)) = x,$

$$d((x,\alpha),(y,\beta)) = \begin{cases} |x-y|, & \alpha = \beta, \\ x+y, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

для любых $x, y \in (0,1]$ и $\alpha, \beta \in \varkappa$.

Новые метрики можно строить из уже имеющихся. Если $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — метрика на множестве X, то для любого $\lambda > 0$ отображения $\lambda \cdot d\colon (x, y) \mapsto \lambda \cdot d(x, y)$ и $\min(d, \boldsymbol{\lambda})\colon (x, y) \mapsto \min\{d(x, y), \lambda\}$ (здесь $\boldsymbol{\lambda}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, тождественно равная λ) тоже являются метриками на X, и они порождают ту же топологию. Вообще, если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция такая, что $f(0) = 0$ и $f(a + b) \leqslant f(a) + f(b)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$, то $f \circ d\colon (x, y) \to f(d(x, y))$ — метрика, эквивалентная d. Кроме того, сумма

$$d_1 + d_2\colon (x, y) \mapsto d_1(x, y) + d_2(x, y)$$

и максимум

$$\max(d_1, d_2)\colon (x, y) \mapsto \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$$

любых двух метрик d_1 и d_2 на одном и том же множестве тоже являются метриками.

Примеры топологических пространств

Определение

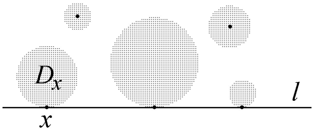
Топологическое пространство метризуемо, если его топология метризуема, т.е. является метрической топологией, порождённой некоторой метрикой.

Предложение

Всякое метризуемое топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности.

- На пустом или одноточечном множестве X существует ровно одна топология $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$, но на всяком непустом неодноточечном X есть по меньшей мере две разные топологии: $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$ и $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$. Топология $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$ называется антидискретной, и она никогда не метризуема для непустых неодноточечных X. Топология $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ называется дискретной, и она порождена дискретной метрикой.
- Всякий линейный порядок $\leqslant$ на множестве X порождает порядковую, или интервальную, топологию на X; её предбазу составляют все открытые лучи $\{x : x < a\}$ и $\{x : a < x\}$, где $a \in X$, а базу — все открытые интервалы.

- Плоскость Немыцкого. Как множество это верхняя полуплоскость $L \subset \mathbb{R}^2$ вместе с граничной прямой l, а топология $\mathscr{T}_N$ на ней задаётся такой системой открытых окрестностей: открытая локальная база в каждой точке $x \notin l$ состоит из всех содержащихся в $L \setminus l$ открытых окрестностей точки x в евклидовой топологии плоскости $\mathbb{R}^2$, а локальная база в каждой точке $x \in l$ образована всеми множествами вида $D_x \cup \{x\}$, где D_x — расположенный в верхней полуплоскости открытый круг, граница которого касается l в точке x.



Подпространства

Определение

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $Y \subset X$. Тогда сужение $d_Y = d|_{Y \times Y}$ метрики $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ на $Y \times Y$ является метрикой на множестве Y. Метрическое пространство (Y, d_Y) называется подпространством метрического пространства (X, d), а метрика d_Y называется индуцированной, или относительной, метрикой.

Предложение

Пусть (X, d) *— метрическое пространство и* (Y, d_Y) *— его подпространство. Множество* $U \subset Y$ *открыто в метрическом пространстве* (Y, d_Y) *тогда и только тогда, когда* $U = V \cap Y$ *для некоторого открытого в* (X, d_X) *множества* V*.*

Доказательство. Множество $U \subset Y$ открыто в метрическом пространстве (Y, d_Y) $\iff$ для любой точки $y \in U$ найдётся $\varepsilon_y > 0$ такое, что её ε_y-окрестность $B_{d_Y}(y, \varepsilon_y)$ содержится в U, т.е. $U = \bigcup\{B_{d_Y}(y, \varepsilon_y) : y \in U\}$. С другой стороны, ясно, что ε-окрестностью любой точки y в (Y, d_Y) является пересечение ε-окрестности этой точки в (X, d) с Y, т.е. $B_{d_Y}(y, \varepsilon_y) = B_d(y, \varepsilon_y) \cap Y$. Значит,

$$U = \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) \cap Y : y \in U\} = Y \cap \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) : y \in U\},$$

так что U является пересечением с Y множества $V = \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) : y \in Y\}$, которое открыто в (X, d).

Обратно, множество V открыто в (X, d) $\iff$ $V = \bigcup\{B_d(x, \varepsilon_x) : x \in V\}$ для некоторых $\varepsilon_x > 0$. Ясно, что $V \cap Y \subset \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) : y \in V \cap Y\}$. Следовательно,

$$V \cap Y = \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) \cap Y : y \in V \cap Y\} = \bigcup\{B_{d_Y}(y, \varepsilon_y) : y \in V \cap Y\},$$

а это множество открыто в метрическом пространстве (Y, d_Y). ☐

Определение

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство и $Y \subset X$. Тогда семейство $\mathscr{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{T}\}$ является топологией на множестве Y. Топологическое пространство $(Y, \mathscr{T}_Y)$ называется подпространством топологического пространства $(X, \mathscr{T})$, а топология $\mathscr{T}_Y$ называется индуцированной, или относительной, топологией.

Таким образом, если X — топологическое пространство и $Y \subset X$, то множество $A \subset Y$ открыто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда $A = U \cap Y$ для некоторого открытого в X множества $U \subset X$, и $A \subset Y$ замкнуто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда $A = F \cap Y$ для некоторого замкнутого в X множества $F \subset X$.

В силу доказанного предложения о подпространствах метрических пространств если (X, d) — метрическое пространство и (Y, d_Y) — его подпространство с индуцированной метрикой, то топологическое пространство $(Y, \mathscr{T}_{d_Y})$ с метрической топологией является подпространством пространства $(X, \mathscr{T}_d)$.

Наследственные свойства

Пусть $\mathscr{P}$ — свойство топологических пространств и $\star$ — какое-нибудь условие на подпространства топологических пространств.

Определение

Говорят, что свойство $\mathscr{P}$ топологических пространств наследуется подпространствами, удовлетворяющими условию $\star$, если все удовлетворяющие условию $\star$ подпространства любого пространства со свойством $\mathscr{P}$ тоже обладают этим свойством. Свойство топологического пространства называется наследственным, если оно наследуется всеми подпространствами.

Предложение

Метризуемость, свойство удовлетворять первой аксиоме счётности и свойство удовлетворять второй аксиоме счётности — наследственные свойства.

Лемма

Пусть X — топологическое пространство и Y — его подпространство.

1. *Если $\mathscr{B}$ — база топологии X, то семейство $\mathscr{B}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{B}\}$ — база топологии Y.*
2. *Если $\mathscr{B}(y)$ — (открытая) локальная база топологии X в точке $y \in Y$, то семейство $\mathscr{B}_Y(y) = \{U \cap Y : U \in \mathscr{B}(y)\}$ — (открытая) локальная база топологии Y в точке y.*

Доказательство. 1. По определению топологии подпространства все элементы семейства $\mathscr{B}_Y$ открыты в Y и для любого открытого в Y множества $U \subset Y$ существует открытое в X множество V такое, что $U = V \cap Y$, а по определению базы $V = \bigcup\{W \in \mathscr{B} : W \subset V\}$, откуда

$$U = \bigcup\{W \cap Y : W \in \mathscr{B},\ W \subset V\} = \bigcup\{W \in \mathscr{B}_Y : W \subset U\};$$

значит, $\mathscr{B}_Y$ является базой топологии Y.

2. По определению окрестности всякая окрестность N любой точки $y \in Y$ в пространстве Y содержит некоторую открытую в Y окрестность U этой точки, а по определению топологии подпространства $U = V \cap Y$ для некоторого открытого в X множества V (которое является открытой окрестностью точки y в X). По определению (открытой) локальной базы существует (открытая) окрестность W точки y в X, которая содержится в V и принадлежит $\mathscr{B}(y)$. Имеем $W \cap Y \in \mathscr{B}_Y$; ясно, что $W \cap Y$ — (открытая) окрестность y в Y. □

Сравнение топологий

Определение

Топология $\mathscr{T}_1$ на множестве X сильнее, или тоньше, топологии $\mathscr{T}_2$ на том же множестве, если $\mathscr{T}_1 \supset \mathscr{T}_2$; в этом случае говорят также, что $\mathscr{T}_2$ слабее, или грубее, топологии $\mathscr{T}_1$. Топология $\mathscr{T}_1$ строго сильнее топологии $\mathscr{T}_2$, если $\mathscr{T}_1 \supset \mathscr{T}_2$ и $\mathscr{T}_1 \neq \mathscr{T}_2$.

Если топология $\mathscr{T}_1$ на множестве X сильнее топологии $\mathscr{T}_2$ на X, а топология $\mathscr{T}_2$ сильнее топологии $\mathscr{T}_1$, то топологии $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ совпадают. Кроме того, если топология $\mathscr{T}_2$ сильнее топологии $\mathscr{T}_1$, а топология $\mathscr{T}_3$ на X сильнее топологии $\mathscr{T}_2$, то $\mathscr{T}_3$ сильнее $\mathscr{T}_1$. Таким образом, отношение «быть сильнее» — частичный порядок на семействе всех топологий на множестве X.

На каждом множестве X есть самая слабая (антидискретная) и самая сильная (дискретная) топология. Однако если X содержит хотя бы две точки, то на нём есть и несравнимые топологии.

Типы точек по отношению к множеству

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Точка x называется точкой прикосновения множества A, если всякая её окрестность пересекает A. Точка x называется предельной точкой множества A, если всякая её окрестность пересекает $A \setminus \{x\}$. Точка $x \in A$ изолирована в A, если у неё есть окрестность, пересечение которой с A есть $\{x\}$. Если некоторая окрестность точки x целиком содержится в A, то x называется внутренней точкой множества A. Предельные точки множества A, не являющиеся внутренними, называются граничными точками A. Точка $x \in X$ называется точкой накопления множества A, если пересечение всякой её окрестности с A бесконечно.

Для топологических пространств, в которых все одноточечные множества замкнуты, понятия точки накопления и предельной точки совпадают, поэтому в теории метрических пространств термин «точка накопления» не используется.

Определение

Множество всех точек прикосновения множества A в топологическом пространстве X называется замыканием множества A и обозначается через $\overline{A}$ (встречаются также обозначения $\mathrm{cl}(A)$, $[A]$ и др.). Если нужно указать, в каком пространстве берётся замыкание, используется обозначение $\overline{A}^X$ ($\mathrm{cl}_X(A)$, $[A]_X$ и др.).

Множество всех предельных точек множества A в пространстве X называется производным множеством множества A и обозначается A' или A^{d}.

Множество всех внутренних точек множества A в пространстве X называется внутренностью множества A и обозначается $\operatorname{Int} A$. Если нужно указать, в каком пространстве берётся внутренность, используется обозначение $\operatorname{Int}_X A$.

Множество всех граничных точек множества A в пространстве X называется границей множества A и обозначается $\operatorname{Fr} A$ или $\operatorname{Bd} A$. Если нужно указать, в каком пространстве берётся граница, используется обозначение $\operatorname{Fr}_X A$ или $\operatorname{Bd}_X A$.

Все точки любого множества $A \subset X$ являются точками прикосновения этого множества, и любая точка прикосновения является либо предельной, либо изолированной, причём все изолированные точки принадлежат A. Следовательно, $\overline{A} = A \cup A'$. Кроме того, по определению $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

Положив $A = X$, мы получим определение перечисленных выше типов точек в само́м топологическом пространстве X, а не по отношению к некоторому его подмножеству. Однако при этом некоторые типы становятся тривиальными. Так, все точки любого пространства X являются точками прикосновения X, и все они внутренние, так что $\overline{X}^X = \operatorname{Int}_X X = X$, а множество граничных точек всегда пусто. Однако понятия изолированных и предельных точек (а также точек накопления) топологического пространства вполне осмыслены и полезны.

Оператор замыкания

Операция замыкания в топологическом пространстве X сопоставляет каждому множеству $A \in \mathscr{P}(X)$ множество $\overline{A} \in \mathscr{P}(X)$, причём это соответствие удовлетворяет таким условиям:

1. $A \subset \overline{A}$ (экстенсивность);
2. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ (монотонность);
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (идемпотентность).

Любое отображение $\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ с этими свойствами называется оператором замыкания на X. Примеры: операции взятия линейной или выпуклой оболочки множества в векторном пространстве, операция порождения подгруппы множеством в произвольной группе. Оператор замыкания в топологическом пространстве обладает ещё и свойством

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(из которого вытекает монотонность). Такие операторы замыкания называются операторами топологического замыкания.

Теорема

Множество A в топологическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \overline{A}$, другими словами, тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки.

Доказательство. Если A замкнуто, то $X \setminus A$ открыто, так что у любой точки $x \notin A$ есть окрестность $X \setminus A$, не пересекающая A.
Обратно, если A не замкнуто, то $X \setminus A$ не открыто; значит, у некоторой точки $x \notin A$ нет окрестности, целиком лежащей в $X \setminus A$, а это означает, что любая окрестность x пересекает A, т.е. x — предельная точка множества A. ☐

Следствие

Замыкание $\overline{A}$ множества A — это наименьшее замкнутое множество, содержащее A, т.е. пересечение всех содержащих A замкнутых множеств.

Оператор внутренности

На всяком топологическом пространстве определён оператор, двойственный оператору замыкания — это **оператор внутренности** Int, который каждому множеству ставит в соответствие его внутренность; как и оператор замыкания, он идемпотентен и монотонен, однако экстенсивность заменяется двойственным свойством:

1. $\operatorname{Int} A \subset A$;
2. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$;
3. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Дополнительное свойство оператора топологического замыкания тоже заменяется двойственным свойством:

4. $\operatorname{Int} A \cap B = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

Теорема

Множество A в топологическом пространстве открыто тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{Int} A$, другими словами, тогда и только тогда, когда все точки A внутренние.

Следствие

Внутренность $\operatorname{Int} A$ множества A — это наибольшее открытое множество, содержащееся в A, т.е. объединение всех содержащихся в A открытых множеств.

Двойственность между операторами внутренности и замыкания: Для $A \subset X$
$$\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}.$$
Действительно, для любого $A \subset X$ множество $X \setminus \operatorname{Int} A$ замкнуто и содержит $X \setminus A$, поэтому $X \setminus \operatorname{Int} A \supset \overline{X \setminus A}$, т.е. $\operatorname{Int} A \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$. С другой стороны, множество $X \setminus \overline{X \setminus A}$ открыто и содержится в $A = X \setminus (X \setminus A)$, поэтому $\operatorname{Int} A \supset \overline{X \setminus A}$.

Замыкание и внутренность в подпространствах: Для $A \subset Y \subset X$
$$\overline{A}^{Y} = \overline{A}^{X} \cap Y, \quad \operatorname{Int}_Y A = Y \cap \operatorname{Int}_X (X \setminus Y \cup A).$$

Плотные множества

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Множество $A \subset Y$ плотно в Y, если $\overline{A} \supset Y$. Множество, плотное во всём пространстве X, называется просто плотным, или всюду плотным. Множество $Y \subset X$ нигде не плотно, если его замыкание $\overline{Y}$ не содержит никакого непустого открытого множества.

- если Y плотно в X и $Y \subset Z \subset X$, то Z тоже плотно в X;
- если Y нигде не плотно и $Z \subset Y$, то Z тоже нигде не плотно;
- если $Y \subset X$ плотно в X, а Z нигде не плотно, то $Y \backslash Z$ плотно в X;
- если $Z \subset Y \subset X$, Z плотно в Y и Y плотно в X, то Z плотно в X.

Множество $Y \subset X$ нигде не плотно в X $\iff$ $X \setminus Y$ содержит *открытое* плотное множество.

Предложение

Если X *— пространство,* U *— открытое подмножество* X *и* Y *— плотное подмножество* X*, то*

$$\overline{U} = \overline{U \cap Y}.$$

Доказательство. Если x — предельная точка множества U, то для любой открытой окрестности V точки x имеем $V \cap U \neq \varnothing$.
Поскольку Y плотно в X, имеем также $V \cap U \cap Y \neq \varnothing$.
Значит, x является предельной точкой множества $U \cap Y$, откуда $\overline{U} \subset \overline{U \cap Y}$.
Обратное включение в доказательстве не нуждается. □

Сепарабельность

Определение

Наименьшая мощность плотного подмножества топологического пространства X называется плотностью этого пространства и обозначается $d(X)$:

$$d(X) = \min\{|A| : A \subset X, \overline{A} = X\}.$$

Если плотность пространства X не более чем счётна, т.е. X содержит какое-нибудь не более чем счётное плотное подмножество, то говорят, что X сепарабельно.

В отличие от метризуемости и свойства удовлетворять первой или второй аксиоме счётности сепарабельность — ненаследственное свойство. Однако открытыми подпространствами она наследуется.

Теорема

Всякое сепарабельное метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Доказательство. Пусть X — пространство, топология которого порождается метрикой d, и пусть Y — плотное множество в X. Тогда семейство

$$\mathscr{B} = \left\{B_d\left(y, \frac{1}{n}\right) : y \in Y,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

— база топологии X. Действительно, если U — открытое множество в X и $x \in U$, то $B_d(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и для любого натурального $n \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$ имеем $B_d(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Выберем любую точку $y \in B_d(x, \frac{1}{2n}) \cap Y$ (она существует, так как Y плотно в X). В силу неравенства треугольника $x \in B_d(x, \frac{1}{2n}) \subset B_d(y, \frac{1}{n}) \subset U$.

Мы показали, что $\mathscr{B}$ — база топологии X. Осталось заметить, что если множество Y счётно, то семейство $\mathscr{B}$ тоже счётно. □

Теорема

Любое пространство со второй аксиомой счётности сепарабельно.

Доказательство. Достаточно взять любую не более чем счётную базу и выбрать по точке в каждом её непустом элементе. Множество всех выбранных точек плотно и не более чем счётно. □

Следствие

Любое сепарабельное метризуемое пространство наследственно сепарабельно.

Доказательство. Свойство удовлетворять второй аксиоме счётности наследственно. □

Свойство Суслина

Определение

Говорят, что семейство множеств дизъюнктно, если его элементы попарно не пересекаются.

Супремум мощностей дизъюнктных семейств непустых открытых подмножеств топологического пространства $(X, \mathscr{T})$ называется числом Суслина, или клеточностью, этого пространства и обозначается $c(X)$:

$$c(X) = \sup\{|\mathscr{U}| : \mathscr{U} \subset \mathscr{T} \setminus \{\varnothing\},\ \mathscr{U} \text{ дизъюнктно}\}.$$

Если число Суслина пространства X не более чем счётно, т.е. каждое семейство непустых попарно непересекающихся открытых множеств в X не более чем счётно, то говорят, что X обладает свойством Суслина.

Свойство Суслина наследуется открытыми и плотными подпространствами.

Предложение

Всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина.

Доказательство. Действительно, если в пространстве X есть счётное плотное подмножество Y, то каждое непустое открытое множество в X содержит хотя бы одну точку из Y, а если такие множества не пересекаются, то они содержат различные точки из Y. Поэтому дизъюнктное семейство непустых открытых множеств не может быть несчётным — не хватит точек множества Y. ☐

Теорема

Всякое метризуемое пространство со свойством Суслина удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Доказательство. Достаточно доказать, что всякое метризуемое пространство со свойством Суслина сепарабельно. Пусть X — метризуемое пространство, топология которого порождена метрикой d. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим максимальное дизъюнктное семейство $\mathscr{B}_n$ шаров радиуса $\frac{1}{n}$. Оно существует в силу леммы Цорна (применённой к упорядоченному по включению множеству дизъюнктных семейств шаров радиуса $\frac{1}{n}$). Благодаря свойству Суслина каждое $\mathscr{B}_n$ счётно. Выберем по точке в каждом шаре из каждого семейства и обозначим полученное множество точек Y.
Пусть U — любое непустое открытое множество в X. Оно содержит шар $B_d(x, \frac{1}{n})$ для некоторых $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$. Шар $B_d(x, \frac{1}{3n})$ пересекается с каким-то шаром B из семейства $\mathscr{B}_{3n}$ (иначе это семейство не было бы максимальным).
В силу неравенства треугольника $B \subset B_d(x, \frac{1}{n})$. Значит, множество U содержит шар B вместе с выбранной в нём точкой из Y. □

Сходимость

Последовательности

Определение

Последовательностью элементов множества X, или просто последовательностью в X, называется любое отображение $f\colon \mathbb{N} \to X$. Точка $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется n-м членом, или n-м элементом, последовательности f. Обычно последовательность записывается в виде $(x_1, x_2, \dots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или просто (x_n); при этом подразумевается, что $x_n = f(n)$. Множество $f(\mathbb{N}) \subset X$ называется множеством значений последовательности.

Последовательность тривиальна, если все её члены начиная с некоторого равны. Если последовательность тривиальна, то множество её значений конечно, но не наоборот.

Подпоследовательность последовательности $f\colon \mathbb{N} \to X$ — это последовательность вида $f \circ g\colon \mathbb{N} \to X$, где $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — любая строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Подпоследовательности обычно записываются в виде $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$; при этом подразумевается, что $k_n = g(n)$.

Определение

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек топологического пространства X сходится к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in U$ для всех $n \geqslant N$ (иными словами, все члены последовательности, начиная с некоторого, принадлежат U). В этом случае говорят, что точка x является пределом последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишут $x \in \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. В тех случаях, когда последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ заведомо не может иметь больше одного предела, вместо $x \in \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ пишут $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Последовательность называется сходящейся, если она сходится к некоторой точке.

Точкой накопления, или предельной точкой, последовательности называется точка, любая окрестность которой содержит бесконечно много членов последовательности (эти члены могут совпадать!).

Предельная точка (= точка накопления) последовательности может не быть таковой для множества значений этой последовательности (если множество значений конечно), а предельная точка множества значений не обязана быть предельной точкой последовательности.

В метрическом пространстве X всякая предельная точка любого множества $A \subset X$ является пределом некоторой последовательности точек множества A. Топологические пространства с этим свойством называются пространствами Фреше–Урысона.

Теорема

Пусть X — топологическое пространство с первой аксиомой счётности и $A \subset X$. Тогда $x \in X$ является точкой прикосновения множества A, если и только если к ней сходится некоторая последовательность точек A.

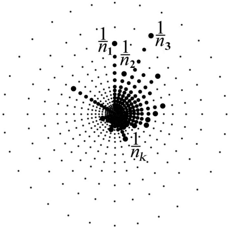
Доказательство. Пусть $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счётная база окрестностей точки x. Положив $V_n = \bigcap_{i \leqslant n} U_i$ для $n \in \mathbb{N}$, получим убывающие (не обязательно строго) окрестности $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ точки x, которые тоже образуют базу окрестностей x. Если x — предельная точка A, то каждая окрестность V_n содержит некоторую точку $a_n \in A$. Последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к x: любая окрестность U точки x содержит некоторую окрестность V_N, а значит, U содержит и все окрестности V_n с $n \geqslant N$, а вместе с ними и все точки a_n с $n \geqslant N$.

Обратное утверждение очевидно. ☐

Пример: счётный веер Фреше–Урысона

$$V(\aleph_0) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \times \mathbb{N}$$

Все точки $\left(\frac{1}{n}, k\right)$, где $n, k \in \mathbb{N}$, изолированы, а базу окрестностей общей точки 0 составляют всевозможные множества вида $\{0\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, k\right) : n, k \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_k \right\}$, где $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — любая последовательность натуральных чисел.



$V(\aleph_0)$ не удовлетворяет первой аксиоме счётности, но является пространством Фреше–Урысона: каково бы ни было множество $A \subset V(\aleph_0)$, точка $x = \left(\frac{1}{n}, k\right)$ является предельной для $A \iff x \in A$, а точка 0 является предельной для A $\iff \exists k \in \mathbb{N}$, для которого пересечение $A \cap \left\{ \left(\frac{1}{n}, k\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ бесконечно.

Пример: одноточечная линделёфикация дискретного пространства

$L(D) = D \cup \{\star\}$, где D — несчётное множество,
$\star$ — единственная неизолированная точка

Окрестности точки $\star$ — всевозможные дополнения до счётных подмножеств множества D

Пространство $L(D)$ недискретно, но в нём нет ни одной нетривиальной сходящейся последовательности.

Направленности

Определение

Множество X вместе с отношением $\leqslant$ на нём, удовлетворяющим условиям

1. $x \leqslant x$ для всех $x \in X$ (рефлексивность),
2. если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (транзитивность) и
3. для любых $x, y \in X$ существует такой $z \in X$, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$,

называется направленным (вверх) множеством.

Определение

Направленность в множестве X — это любое отображение $f\colon A \to X$, где A — множество, направленное вверх отношением $\leqslant$. Обычно направленности записываются в виде $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ или просто (x_α) (подразумевается, что $x_\alpha = f(\alpha)$). Направленность $g = (y_\beta)_{\beta \in B}$, где B — множество, направленное вверх отношением $\preccurlyeq$, называется поднаправленностью направленности $f = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, если существует отображение $\varphi\colon B \to A$ такое, что $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$ для всех $\beta \in B$ (т.е. $g = \varphi \circ f$) и $\forall \alpha_0 \in A \; \exists \beta_0 \in B$ с тем свойством, что $\alpha_0 \leqslant \varphi(\beta)$ при всех $\beta \succcurlyeq \beta_0$.

Определение

Направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в топологическом пространстве X сходится к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует $\alpha_0 \in A$ такое, что $x_\alpha \in U$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. В этом случае говорят, что точка x является пределом направленности $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ и пишут $x \in \lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ или $x_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} x$. В тех случаях, когда направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ заведомо не может иметь более одного предела, вместо $x \in \lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ пишут $x = \lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$. Направленность сходится, или является сходящейся, если она сходится к некоторой точке.

Точка x топологического пространства X называется предельной точкой направленности $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в этом пространстве, если для любой окрестности U точки x и любого $\alpha_0 \in A$ существует $\alpha \in A$ такое, что $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $x_\alpha \in U$.

Теорема

Точка x в топологическом пространстве X является точкой прикосновения множества $Y \subset X$ тогда только тогда, когда некоторая направленность в Y сходится к x.

Доказательство

Необходимость. Пусть x — точка прикосновения Y. Очевидно, множество $\mathscr{U}(x)$ всех окрестностей x направлено отношением $\leqslant$, обратным включению ($U \leqslant V$, если $U \supset V$). Пользуясь тем, что x — точка прикосновения множества Y, в каждой окрестности $U \in \mathscr{U}(x)$ выберем точку $y_U \in Y$. По построению $y_U \xrightarrow[\mathscr{U}(x)]{} y$.

Достаточность. Пусть $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ — сходящаяся к x направленность, причём $y_\alpha \in Y$ для всех $\alpha \in A$, и пусть $\leqslant$ — направление на A. По определению предела направленности для любой окрестности U точки x существует $\alpha_0 \in A$ такое, что $y_\alpha \in U$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$; значит, любая окрестность точки x содержит некоторую точку из Y, а это и есть определение точки прикосновения. □

Фильтры и ультрафильтры

Определение

Центрированное семейство множеств — это любое семейство $\mathscr{C}$ с тем свойством, что пересечение любого конечного множества его элементов непусто: если $n \in \mathbb{N}$ и $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$, то $C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \varnothing$.

Определение

Фильтром на множестве X называется непустое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
2. если $A, B \in \mathscr{F}$, то $A \cap B \in \mathscr{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$);
3. если $A \in \mathscr{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathscr{F}$. В частности, $X \in \mathscr{F}$.

Фильтр $\mathscr{F}$ называется свободным, если $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ является базой фильтра $\mathscr{F}$, если любое множество $F \in \mathscr{F}$ содержит множество $B \in \mathscr{B}$.

Определение

Максимальный (по включению) фильтр называется ультрафильтром. Ультрафильтр $\mathscr{U}$ называется главным, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

Теорема

Любое центрированное семейство $\mathscr{C}$ на произвольном множестве X содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X.

Доказательство. Упорядочим множество $\mathfrak{C}$ всех центрированных семейств на X, содержащих $\mathscr{C}$, отношением включения $\subset$. Если $\mathfrak{L}$ — любое линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{C}$, то $\bigcup \mathfrak{L}$ — центрированное семейство: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $F_1, \dots, F_n \in \bigcup \mathfrak{L}$ найдутся $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n \in \mathfrak{L}$ такие, что $F_i \in \mathscr{F}_i$ для $i \leqslant n$, и поскольку $\mathfrak{L}$ линейно упорядочено, без ограничения общности можно считать, что $\mathscr{F}_1 \subset \dots \subset \mathscr{F}_n$ (иначе перенумеруем $F_1, \dots, F_n$). Значит, $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}_n$, так что $\bigcap F_i \neq \varnothing$.

По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathscr{U}$, содержащее $\mathscr{C}$. Ясно, что $\mathscr{U}$ — ультрафильтр. □

Теорема (основное свойство ультрафильтров)

Фильтр $\mathscr{F}$ на множестве X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр на X, и пусть $A \subset X$. Если $F \setminus A = \varnothing$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$, то $F \subset A$, так что $A \in \mathscr{F}$. Предположим, что для любого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \neq \varnothing$. Если $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}$, то

$$(F_1 \setminus A) \cap \dots \cap (F_n \setminus A) = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \setminus A \neq \varnothing,$$

т.е. семейство $\{F \setminus A : F \in \mathscr{F}\}$ центрировано. Оно содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. Для каждого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \in \mathscr{U}$ и, значит, $F \in \mathscr{U}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, и из максимальности $\mathscr{F}$ вытекает, что $\mathscr{F} = \mathscr{U}$. Осталось заметить, что $X \setminus A \in \mathscr{U}$.

Достаточность. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр с тем свойством, что для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$, и пусть $\mathscr{U}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{F} \neq \mathscr{U}$, то найдется $A \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{F}$. По предположению $X \setminus A \in \mathscr{F}$, а поскольку $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, имеем $X \setminus A \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$. Значит, $\mathscr{F} = \mathscr{U}$, так что $\mathscr{F}$ — ультрафильтр. ☐

Следствие (основное свойство ультрафильтров)

Если $\mathscr{U}$ *— ультрафильтр на множестве* X, $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_m \subset X$ *и существует* $A \in \mathscr{U}$ *такой, что* $A \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$, *то* $A_i \in \mathscr{U}$ *для некоторого* $i \leqslant m$. *В частности, если* $A_1, \dots, A_m$ *— любые подмножества* X *со свойством* $A_1 \cup \dots \cup A_m = X$, *то* $A_i \in \mathscr{U}$ *для некоторого* $i \leqslant m$.

Доказательство. Предположим, что $A_i \notin \mathscr{U}$ для всех $i \leqslant m$. Тогда по доказанной теореме $X \setminus A_i \in \mathscr{U}$ для $i \leqslant m$. Значит, $(X \setminus A_1) \cap \dots \cap (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m) \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$ и $A \cap (X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m)) = \varnothing$. ☐

Определение

Фильтр $\mathscr{F}$ на топологическом пространстве X сходится к некоторой точке $x \in X$, если любая окрестность этой точки принадлежит $\mathscr{F}$. Для сходимости $\mathscr{F}$ к x используется обозначение $\mathscr{F} \to x$. Фильтр сходится, или является сходящимся, если он сходится к некоторой точке.

Теорема

Для топологического пространства X, множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ следующие условия равносильны:

а) *x является точкой прикосновения множества A;*

б) *существует фильтр $\mathscr{F}$ на X, который содержит A и сходится к x;*

в) *существует ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X, который содержит A и сходится к x.*

Доказательство. а)⇒в): Семейство $\mathscr{B}(x)$ всех окрестностей точки x в X центрировано. Поскольку x — точка прикосновения множества A, семейство $\{A \cap U : U \in \mathscr{B}(x)\}$ тоже центрировано и, значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$. Из свойства ③ вытекает, что $\mathscr{U}$ содержит как все окрестности x (а значит, $\mathscr{U} \to x$), так и множество A.

в)⇒б): тривиально.

б)⇒а): Поскольку фильтр $\mathscr{F}$ сходится к точке x, он содержит все окрестности x. То, что он содержит также и множество A, означает, что пересечение A с любой окрестностью x непусто (в силу свойства ①), т.е. x является точкой прикосновения множества A. ☐

Отображения направленностей и фильтров

Определение

Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение, A — любое направленное вверх множество и $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ — любая направленность в множестве X, т.е. любое отображение $\varphi\colon A \to X$, где $\varphi(\alpha) = x_\alpha$ для $\alpha \in A$. Направленность $f \circ \varphi\colon A \to Y$, т.е. $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$, называется образом направленности φ при отображении f.

Определение

Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение и $\mathscr{F}$ — любой фильтр на X. Семейство множеств

$$\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\} = \{A \subset Y : \exists F \in \mathscr{F}(f(F) \subset A)\}$$

называется образом фильтра $\mathscr{F}$ при отображении f.

Предложение

Образ любого фильтра при любом отображении является фильтром. Образ любого ультрафильтра при любом отображении является ультрафильтром.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение, и пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на X. То, что образ $\mathscr{F}$ при отображении f является фильтром, ясно: выполнение условий ① и ③ из определения фильтра очевидно, а выполнение условия ② вытекает из того, что $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ для любых множеств $A, B \subset Y$. Если при этом $\mathscr{F}$ является ультрафильтром, то из основного свойства ультрафильтров и очевидного равенства $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus (f^{-1}(A))$ следует, что образ $\mathscr{F}$ тоже является ультрафильтром. $\square$

Непрерывные отображения и гомеоморфизмы

Сначала рассмотрим непрерывность отображений метрических пространств.

Определение

Отображение f метрического пространства (X, d) в метрическое пространство (Y, ρ) называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in B_d(x_0, \delta)$ имеем $f(x) \in B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$. Отображение $f : X \to Y$ метрических пространств непрерывно, если оно непрерывно во всех точках пространства X.

Теорема

Для любого метрического пространства (X, d) *и любого непустого множества* $A \subset X$ *функция* $f : X \to \mathbb{R}$*, определённая правилом* $f(x) = d(x, A)$, $x \in X$*, непрерывна.*

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y) \qquad \text{для всех } x, y \in X; \tag{$\star$}$$

тогда в качестве δ из определения непрерывности можно будет взять ε.

Напомним, что $d(x,A) = \inf\{d(x,z) : z \in A\}$. Для любой точки $z \in A$ имеем $d(x,A) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. Переходя к инфимуму по $z \in A$, получаем $d(x,A) \leqslant d(x,y) + d(y,A)$. Меняя местами x и y, видим, что $d(y,A) \leqslant d(x,y) + d(x,A)$. Таким образом,

$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y) \qquad \text{и} \qquad d(y,A) - d(x,A) \leqslant d(x,y),$$

откуда вытекает неравенство $(\star)$, а с ним и теорема. ☐

Предложение

Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(U)$ всякого множества $U \subset Y$, открытого в Y, открыт в X.

Доказательство

Необходимость. Надо показать, что множество $f^{-1}(U)$ открыто, т.е. что каждая точка $x_0 \in f^{-1}(U)$ содержится в $f^{-1}(U)$ вместе со своей окрестностью. Пусть $x_0 \in f^{-1}(U)$. Множество U открыто в Y и $f(x_0) \in U \implies \exists \varepsilon > 0$, для которого $B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subset U$. Отображение f непрерывно в точке $x_0 \implies \exists \delta > 0$, для которого $f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subset U$, т.е. $B_d(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$, что и требовалось.

Достаточность. Для любой точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ множество $B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$ открыто в Y. Значит, $f^{-1}(B_\rho(f(x_0), \varepsilon))$ открыто в X. Поскольку точка x_0 принадлежит множеству $f^{-1}(B_\rho(f(x_0), \varepsilon))$, некоторая её окрестность $B_d(x_0, \delta)$ содержится в этом множестве $\implies$ f непрерывно в x_0. Из произвольности выбора x_0 следует непрерывность f. $\square$

Определение

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется непрерывным, если прообраз при этом отображении любого множества, открытого в Y, открыт в X.

Отображение f непрерывно в точке $x_0 \in X$, если прообраз любой окрестности точки $f(x_0)$ в пространстве Y является окрестностью точки x_0 в пространстве X, т.е. содержит открытую окрестность точки x_0.

Если для топологических пространств X и Y существует непрерывная сюръекция $f\colon X \to Y$, то говорят, что Y является непрерывным образом пространства X.

Из доказанного выше предложения видно, что отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно как отображение топологических пространств относительно порождённых метриками топологий.

Теорема

Для отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств следующие свойства равносильны:

① *f непрерывно, т.е. прообраз при f любого открытого множества открыт;*
② *прообраз при f любого замкнутого множества замкнут;*
③ *отображение f непрерывно в каждой точке пространства X;*
④ *образ при f замыкания любого множества $A \subset X$ в X содержится в замыкании образа $f(A)$ этого множества в Y;*
⑤ *замыкание в X прообраза $f^{-1}(B)$ любого множества $B \subset Y$ содержится в прообразе замыкания множества B в Y.*

Доказательство. ① ⇔ ② очевидно, ① ⇔ ③ доказывается как предложение выше.
②⇒④: Пусть $A \subset X$. В силу ② множество $f^{-1}\left(\overline{f(A)}^{Y}\right)$ замкнуто, и оно содержит A; значит, $\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}^{Y}\right)$.
④⇒⑤ следует из того, что $B = f(f^{-1}(B))$, так что $\overline{B} \supset f(\overline{f^{-1}(B)})$.
⑤⇒②: если $F \subset Y$ замкнуто в Y, то в силу ⑤ имеем $\overline{f^{-1}(F)}^{X} \subset f^{-1}(F)$, а значит, $\overline{f^{-1}(F)}^{X} = f^{-1}(F)$, т.е. множество $f^{-1}(F)$ замкнуто. □

Теорема

1. *Отображение* $f : X \to Y$ *метрических пространств непрерывно в точке* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда образ при* f *любой последовательности, сходящейся к* x, *сходится к* $f(x)$.
2. *Отображение* $f : X \to Y$ *топологических пространств непрерывно в точке* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда образ при* f *любой направленности, сходящейся к* x, *сходится к* $f(x)$.
3. *Отображение* $f : X \to Y$ *топологических пространств непрерывно в точке* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда образ при* f *любого ультрафильтра, сходящегося к* x, *сходится к* $f(x)$.

Доказательство. ③ Предположим, что образ при f любого сходящегося к точке $x \in X$ ультрафильтра сходится к $f(x)$. Пусть V — любая окрестность точки $f(x)$. Если её прообраз $f^{-1}(V)$ не является окрестностью (= не содержит ни одной окрестности) точки x в X, то семейство

$$\mathscr{F} = \{X \setminus f^{-1}(V)\} \cup \{U : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

центрировано, а значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. Этот ультрафильтр сходится к точке x, значит, его образ $\beta f(\mathscr{U})$ должен сходиться к $f(x)$. Однако $X \setminus f^{-1}(V) \in \mathscr{U} \implies f(X \setminus f^{-1}(V)) = f(X) \setminus V \in \beta f(\mathscr{U}) \implies V \notin \beta f(\mathscr{U})$. Это противоречие показывает, что $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x в X, т.е. f непрерывно в x.

Обратно, пусть f непрерывно в $x \in X$. Рассмотрим любой ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X, сходящийся к x. Если $\beta f(\mathscr{U})$ на Y не сходится к $f(x)$, то у этой точки есть окрестность $V \notin \beta f(\mathscr{U})$. По основному свойству ультрафильтров имеем $Y \setminus V \in \beta f(\mathscr{U})$, а по определению отображения ультрафильтров βf

$$f^{-1}(X \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V) \in \mathscr{U}$$

в противоречие с тем, что $\mathscr{U} \to x$ и $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x. □

Предложение

Для любых отображений $f\colon X \to Y$ *и* $g\colon Y \to Z$ *топологических пространств верны следующие утверждения:*

- *если* f *и* g *непрерывны, то композиция* $g \circ f$ *тоже непрерывна;*
- *если отображение* f *непрерывно в точке* $x \in X$, *а* g *непрерывно в точке* $f(x)$, *то композиция* $g \circ f$ *непрерывна в точке* x*;*
- *если отображение* f *непрерывно,* $x \in A \subset X$ *и* $f(A) \subset B \subset Y$, *то подотображение* $f \cap (A \times B)\colon A \to B$ *непрерывно. В частности, сужение* $f|_A\colon A \to Y$ *непрерывно;*
- *если отображение* f *непрерывно в точке* $x \in X$, $x \in A \subset X$ *и* $f(A) \subset B \subset Y$, *то подотображение* $f \cap (A \times B)\colon A \to B$ *непрерывно в точке* x*;*
- *если* f *непрерывно, то для любого пространства* Z, *содержащего* Y *в качестве подпространства, надотображение* $X \to Z$ *отображения* f *непрерывно;*
- *если* f *непрерывно в точке* $x \in X$, *то для любого пространства* Z, *содержащего* Y *в качестве подпространства, надотображение* $X \to Z$ *отображения* f *непрерывно в точке* x*.*

Очень полезное утверждение

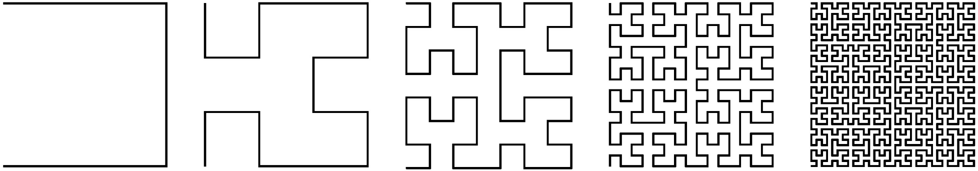
а) Если $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств и существует предбаза топологии Y, прообразы всех элементов которой открыты в X, то f непрерывно.

б) Если $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$ и существует локальная база топологии Y в точке $f(x)$, прообразы всех элементов которой являются окрестностями точки x в X (не обязательно открытыми), то f непрерывно в точке x.

Доказательство. а) Пусть $\mathscr{B}$ — предбаза топологии Y, прообразы всех элементов которой открыты, и пусть $\mathscr{U} = \{U_1 \cap \dots \cap U_n : n \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_n \in \mathscr{B}\}$ — порождённая ею база. Поскольку $f^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_n) = f^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f^{-1}(U_n)$ и конечные пересечения открытых множеств открыты, заключаем, что прообразы всех элементов $\mathscr{U}$ открыты, а из того, что любое открытое множество в Y есть объединение элементов базы и прообраз объединения любого семейства множеств всегда равен объединению прообразов элементов этого семейства, следует, что прообраз любого открытого подмножества Y открыт, т.е. f непрерывно. □

Примеры непрерывных отображений

- Любое отображение дискретного пространства куда угодно непрерывно.
- Отображение $f\colon X \to Y$ антидискретного пространства X в пространство Y непрерывно $\iff$ $f(X)$ с топологией, индуцированной из Y, антидискретно.
- Пусть $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ — две разные топологии на одном и том же множестве X. Тождественное отображение $\mathrm{id}_X\colon (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ (т.е. топологии $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ сравнимы и $\mathscr{T}_1$ сильнее).
- Существует непрерывное сюръективное отображение обычного отрезка $[0, 1]$ на квадрат. Такие отображения называются кривыми, заполняющими квадрат, или кривыми Пеано. Гильберт предложил такой вариант построения этого отображения:



- Простая проверка доказывает непрерывность следующих отображений (относительно обычной топологии на $\mathbb{R}$ и евклидовой топологии на $\mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned}
+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x+y;\\
-\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x-y;\\
\times\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x\cdot y;\\
/\colon \widetilde{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x/y\\
&\qquad \text{(здесь } \widetilde{\mathbb{R}^2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\});\\
\max\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto \max\{x,y\};\\
\min\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto \min\{x,y\};\\
\pi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x;\\
\pi_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto y;\\
|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto |x|.
\end{aligned}$$

- Для всякого топологического пространства X и любых непрерывных отображений $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ диагональ $f \Delta g\colon X \to \mathbb{R}^2$ (напомним, что это отображение, определенное правилом $x \mapsto (f(x), g(x))$) непрерывна. Чтобы убедиться в этом, в силу полезного утверждения достаточно заметить, что множества вида $\{(x, y) : a < x < b,\ \ c < y < d\}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, образуют базу топологии $\mathbb{R}^2$ и их прообразы $f^{-1}(a, b) \cap g^{-1}(c, d)$ открыты ввиду непрерывности отображений f и g.

С помощью конструкций из двух последних примеров легко доказывается такое утверждение:

Предложение

Если X — любое топологическое пространство и $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, то следующие функции $X \to \mathbb{R}$ тоже непрерывны:

- $x \mapsto f(x) + g(x)$;
- $x \mapsto f(x) - g(x)$;
- $x \mapsto f(x) \cdot f(y)$;
- $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$;
- $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$;
- $x \mapsto |f(x)|$.

Если при этом $0 \notin g(X)$, то непрерывна ещё и функция $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Гомеоморфизмы

Определение

Гомеоморфизмом, или **топологическим отображением**, между топологическими пространствами X и Y называется непрерывное взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ с тем свойством, что обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ тоже непрерывно. Говорят, что пространства X и Y **гомеоморфны**, и пишут $X \cong Y$, если существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y$. **Топологические свойства**, или **топологические инварианты**, — это те свойства топологических пространств, которые сохраняются гомеоморфизмами. Другими словами, $\mathscr{P}$ — топологическое свойство, если каковы бы ни были гомеоморфные топологические пространства X и Y, X обладает свойством $\mathscr{P} \iff Y$ обладает свойством $\mathscr{P}$.

Когда пространство X гомеоморфно некоторому подпространству Z пространства Y, говорят, что X **гомеоморфно вложено**, или просто **вложено**, или **вкладывается**, в пространство Y, а гомеоморфизм между X и Z называется **топологическим вложением**, или просто **вложением**.

Отношение $\cong$ («быть гомеоморфными») является отношением эквивалентности на классе топологических пространств.

Графики отображений

Определение

Графиком отображения $f\colon X \to Y$ называется множество

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, y) : x \in X,\ y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

Определение

На декартовом произведении $X \times Y$ двух топологических пространств имеется естественная топология произведения — она порождена базой

$$\mathscr{B} = \{U \times V :\ U \text{ открыто в } X,\ V \text{ открыто в } Y\}.$$

Топологическим произведением, или просто произведением, двух топологических пространств называется их декартово произведение с этой топологией.

Когда график отображения топологических пространств сам рассматривается как топологическое пространство, всегда имеется в виду, что его топология индуцирована топологией произведения.

Теорема

График Gr f *любого непрерывного отображения* $f\colon X \to Y$ *топологических пространств гомеоморфен пространству* X.

Доказательство. Отображение $\varphi\colon X \to \operatorname{Gr} f$, определенное правилом $\varphi(x) = (x, f(x))$ для любого $x \in X$, — гомеоморфизм. Действительно, оно, очевидно, является биекцией; непрерывность φ следует из того, что семейство

$$\widehat{\mathscr{B}} = \{W \cap \operatorname{Gr} f : W \in \mathscr{B}\} =$$
$$= \{(U \times V) \cap \operatorname{Gr} f : U \text{ открыто в } X,\ V \text{ открыто в } Y\}$$

является базой индуцированной топологии на графике, и прообраз

$$\varphi^{-1}\bigl((U \times V) \cap \operatorname{Gr} f\bigr) = U \cap f^{-1}(V)$$

любого элемента этого семейства открыт в силу непрерывности f; наконец, открытость отображения φ очевидна — образ $\varphi(U)$ любого открытого множества $U \subset X$ есть множество $(U \times Y) \cap \operatorname{Gr} f$, которое открыто в индуцированной топологии графика, поскольку $U \times Y$ открыто в топологии произведения. □

Сохранение топологических свойств непрерывными отображениями

Мы будем говорить, что топологическое свойство $\mathscr{P}$ сохраняется отображениями из класса $\mathscr{C}$, если, каково бы ни было пространство X со свойством $\mathscr{P}$ и отображение $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ из класса $\mathscr{C}$, образ $Y = f(X)$ обладает свойством $\mathscr{P}$. Среди тех свойств, что нам уже известны, только три сохраняются произвольными непрерывными отображениями — свойство иметь мощность $\leqslant \kappa$, свойство иметь плотность $\leqslant \kappa$ и свойство иметь число Суслина $\leqslant \kappa$. Сто́ит отметить, что многими «хорошими» свойствами обладают дискретные пространства, а любое отображение дискретного пространства непрерывно.

Определение

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется открытым, если образ каждого множества, открытого в X, открыт в Y, и замкнутым, если образ каждого множества, замкнутого в X, замкнут в Y.

Определение

Подпространство Y топологического пространства X называется ретрактом этого пространства, если существует непрерывное отображение $r\colon X \to Y$, тождественное на Y (т.е. такое, что $f(y) = y$ для всякого $y \in Y$). Такое отображение r называется ретракцией.

Теорема

Топологическое пространство Y является ретрактом пространства $X \supset Y$ тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $Y \to Z$ в любое пространство Z продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$.

Доказательство. Если $r\colon X \to Y$ — ретракция, то для любого непрерывного $f\colon Y \to Z$ композиция $f \circ r\colon X \to Z$ непрерывна и продолжает f.

Обратно, если любое непрерывное отображение $Y \to Z$ можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Z$, то и тождественное отображение $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Y$; любое такое продолжение, очевидно, является ретракцией. □

Теорема о неретрагируемости

Ни для какого натурального n не существует ретракции $r\colon \overline{D}^n \to S^{n-1}$.

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Для любого натурального n всякое непрерывное отображение $\overline{D}^n \to \overline{D}^n$ имеет неподвижную точку.

Теорема Брауэра легко выводится из теоремы о неретрагируемости, и наоборот:

предположим, что $f\colon \overline{D}^n \to \overline{D}^n$ — непрерывное отображение без неподвижной точки, и для каждой точки $x \in \overline{D}^n$ рассмотрим луч с началом $f(x)$, проходящий через точку x. Обозначим через $r(x)$ точку, в которой этот луч пересекает сферу S^{n-1}. Легко проверить, что отображение $r\colon x \mapsto r(x)$ — ретракция $\overline{D}^n$ на S^{n-1}.

Предположим теперь, что $r\colon \overline{D}^n \to S^{n-1}$ — ретракция. Пусть $i\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ — отображение $x \mapsto -x$. Тогда отображение $i \circ r\colon \overline{D}^n \to S^{n-1} \subset \overline{D}^n$ непрерывно и не имеет неподвижных точек.

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Обозначения

$\overline{D}^n$ и S^{n-1} — замкнутый единичный диск (шар) и сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{D}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\},$$

$$S^{n-1} = \{\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Диск $\overline{D}^n$ гомеоморфен n-мерному симплексу Δ^n — выпуклой оболочке $n+1$ аффинно независимых (т.е. не лежащих в одной $(n-1)$-мерной плоскости) точек $\mathrm{a}_0, \dots, \mathrm{a}_n$ аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant n$. Другими словами,

$$\overline{D}^n \cong \Delta^n = \{\mathrm{x} = \lambda_0 \cdot \mathrm{a}_0 + \lambda_1 \cdot \mathrm{a}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathrm{a}_n : \lambda_0, \dots, \lambda_n \geqslant 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}$$

(мы имеем дело с точками пространства $\mathbb{R}^m$, т.е. m-ками вещественных чисел; операции сложения m-ок и умножения их на число определяются покоординатно). Числа $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ называются барицентрическими координатами точки $\mathrm{x} \in \Delta^n$.

Точки $a_0, \ldots, a_n$ называются вершинами симплекса Δ^n, а симплексы с вершинами $a_{n_0}, \ldots, a_{n_k}$, где $k \leqslant n$ и $n_0, \ldots, n_k$ — различные числа из множества $\{0, \ldots, n\}$, называются k-мерными гранями симплекса Δ^n. Барицентр грани с вершинами $a_{n_0}, \ldots, a_{n_k}$ — это точка $\frac{a_{n_0}+\cdots+a_{n_k}}{k+1}$.

Триангуляция n-мерного симплекса Δ^n с вершинами $a_0, \ldots, a_n$ — это представление симплекса Δ^n в виде конечного объединения n-мерных симплексов $\Delta^n_0, \ldots, \Delta^n_k$, в котором пересечение любых двух симплексов Δ^n_i и Δ^n_j, $i \neq j$, либо пусто, либо является гранью каждого из симплексов Δ^n_i и Δ^n_j. Вершины симплексов $\Delta^n_0, \ldots, \Delta^n_k$ называются вершинами триангуляции. Триангуляция, вершинами которой являются барицентры *всех* граней симплекса Δ^n, называется барицентрическим подразделением симплекса Δ^n.

Предположим, что вершины k-мерного симплекса раскрашены в цвета из набора $\{0, \ldots, m\}$, $m \geqslant k$. Мы будем говорить, что раскраска полна, если среди цветов вершин симплекса встречаются все цвета $0, \ldots, k$ (тогда каждый из этих цветов встречается ровно по одному разу и ни один из цветов с номером $> k$ не встречается).

Лемма 1

Пусть все вершины триангуляции симплекса Δ^n, $n \geqslant 0$, *раскрашены в цвета из набора* $\{0, \ldots, n\}$. *Тогда число симплексов триангуляции, раскраска вершин которых полна, имеет ту же чётность, что и число тех* $(n-1)$*-мерных граней симплексов триангуляции, которые содержатся в границе симплекса* Δ^n *и раскраска вершин которых полна.*

Доказательство. Пусть раскраска $(n-1)$-мерной грани некоторого n-мерного симплекса полна. Если противоположная ей вершина раскрашена в цвет n, то у симплекса ровно одна $(n-1)$-мерная грань с полной раскраской, иначе ровно две. Значит, число n-мерных симплексов триангуляции с полной раскраской имеет ту же чётность, что и число N пар «n-мерный симплекс — его $(n-1)$-мерная грань с полной раскраской». Всякий $(n-1)$-мерный симплекс, являющийся гранью одного из симплексов триангуляции, содержится в ровно одном n-мерном симплексе триангуляции, если он лежит на границе Δ^n, и ровно в двух таких симплексах иначе. Поэтому N имеет ту же чётность, что и количество $(n-1)$-граней с полной раскраской, содержащихся в симплексах триангуляции и составляющих границу Δ^n. ☐

Лемма Шпернера

Предположим, что вершины триангуляции n-мерного симплекса Δ^n, где $n \geqslant 0$, раскрашены так, что раскраска самóго симплекса Δ^n полна и цвет каждой вершины триангуляции, принадлежащей какой-нибудь грани симплекса Δ^n, совпадает с цветом одной из вершин этой грани. Тогда среди симплексов триангуляции есть симплекс с полной раскраской (и число таких симплексов нечётно).

Доказательство. Для $n = 0$ лемма, очевидно, верна. Предположим, что $k > 0$ и лемма верна для $n < k$. Докажем её для $n = k$.

Достаточно доказать, что число симплексов триангуляции с полной раскраской нечётно. По лемме 1 это равносильно тому, что число $(k-1)$-мерных симплексов с полной раскраской, являющихся гранями симплексов триангуляции и содержащихся в границе симплекса Δ^k, нечётно. Из условия на цвета вершин триангуляции следует, что на границе Δ^k любой $(k-1)$-мерный симплекс с полной раскраской содержится в $(k-1)$-мерной грани симплекса Δ^k с полной раскраской, поэтому справедливость леммы Шпернера для k-мерного симплекса следует из её справедливости для $(k-1)$-мерного симплекса. □

Лемма 2

Для любых точек x *и* y *симплекса* $\Delta^n \subset \mathbb{R}^m$ *($n \leqslant m$) с вершинами* $\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_n$

$$d_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant \max\{d_m(\mathrm{a}_i, \mathrm{a}_j) : i, j \leqslant n\}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что $d_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant \max\limits_{i \leqslant n} d_m(\mathrm{a}_i, \mathrm{y})$. Пусть точка x имеет барицентрические координаты $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, т.е. $\mathrm{x} = \sum\limits_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{a}_i \in \Delta^n$; напомним, что $\sum\limits_{i \leqslant n} \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \geqslant 0$ для $i \leqslant n$. Имеем

$$d_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d_m\Bigl(\sum_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{a}_i, \sum_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{y}\Bigr) = \Bigl|\sum_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{a}_i - \sum_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{y}\Bigr|_m = \Bigl|\sum_{i \leqslant n} \lambda_i (\mathrm{a}_i - \mathrm{y})\Bigr|_m \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i \leqslant n} \lambda_i |\mathrm{a}_i - \mathrm{y}|_m \leqslant \max_{i \leqslant n} |\mathrm{a}_i - \mathrm{y}|_m = \max_{i \leqslant n} d_m(\mathrm{a}_i, \mathrm{y}).$$

Повторив то же рассуждение для y и a_j (где j — любое фиксированное число $\leqslant n$) вместо x и y, мы приходим к нужному заключению. ☐

Лемма 3

Если $n \in \mathbb{N}$ и d — максимальная длина ребра симплекса Δ^n с вершинами $\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_n$, то максимальная длина ребра барицентрического подразделения симплекса Δ^n не превосходит $\frac{n}{n+1} \cdot d$.

Доказательство. Вершины симплекса барицентрического подразделения имеют вид $\mathrm{a}_{\pi(0)}, \frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\mathrm{a}_{\pi(1)}}{2}, \ldots, \frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\cdots+\mathrm{a}_{\pi(n)}}{n+1}$, где π — перестановка (индукция по n). Надо показать, что расстояние между любыми точками вида

$$\frac{\mathrm{a}_{\pi(0)} + \cdots + \mathrm{a}_{\pi(p+q-1)}}{p+q} \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{a}_{\pi(0)} + \cdots + \mathrm{a}_{\pi(p-1)}}{p}$$

для любых натуральных p и q таких, что $p + q \leqslant n + 1$, не превосходит $\frac{n}{n+1} \cdot d$. Имеем

$$\frac{\mathrm{a}_{\pi(0)} + \cdots + \mathrm{a}_{\pi(p+q-1)}}{p+q} - \frac{\mathrm{a}_{\pi(0)} + \cdots + \mathrm{a}_{\pi(p-1)}}{p} =$$

$$= \frac{q}{p+q}\left(\frac{\mathrm{a}_{\pi(p)} + \cdots + \mathrm{a}_{\pi(p+q-1)}}{q} - \frac{\mathrm{a}_{\pi(0)} + \cdots + \mathrm{a}_{\pi(p-1)}}{p}\right) = \frac{q}{p+q}(\mathrm{a} - \mathrm{b}),$$

где a и b — некоторые точки Δ^n. Осталось заметить, что $d_m(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \leqslant d$ (по лемме 2) и $\frac{q}{p+q} \leqslant \frac{p+q-1}{p+q} = 1 - \frac{1}{p+q} \leqslant \frac{n}{n+1}$. □

Доказательство теоремы Брауэра. Пусть $n \in \mathbb{N}$, Δ^n — любой n-мерный симплекс и $f\colon \Delta^n \to \Delta^n$ — непрерывное отображение. Мы докажем, что f имеет неподвижную точку; этого достаточно, поскольку диск $\overline{D}^n$ гомеоморфен любому n-мерному симплексу.

Раскрасим точки симплекса. Пусть $\mathrm{x} \in \Delta^n$ и $x_0, \dots, x_n$ — барицентрические координаты точки x. Точка $f(\mathrm{x})$ также принадлежит симплексу; пусть $y_0, \dots, y_n$ — её барицентрические координаты. Мы покрасим x в цвет $j = \min\{i : y_i \leqslant x_i \neq 0\}$; существование такого j легко выводится из того, что $\sum\limits_{i \leqslant n} x_i = \sum\limits_{i \leqslant n} y_i = 1$ и $x_i, y_i \geqslant 0$ для $i \leqslant n$. При такой раскраске цвета вершин любой триангуляции симплекса Δ^n удовлетворяют условиям леммы Шпернера, потому что каждая вершина a_i симплекса Δ^n имеет цвет i и если точка принадлежит грани с вершинами $\mathrm{a}_{i_0}, \dots, \mathrm{a}_{i_k}$, то у неё отличаться от нуля могут лишь барицентрические координаты с номерами $i_0, \dots, i_k$, а значит, она покрашена в один из цветов $i_0, \dots, i_k$. По лемме Шпернера в барицентрическом подразделении симплекса Δ^n найдётся симплекс Δ^n_1 с полной раскраской. Выберем в нём точку X_1.

Теперь возьмём барицентрическое подразделение каждого симплекса барицентрического подразделения симплекса Δ^n. В результате мы получим набор симплексов, которые в совокупности тоже образуют триангуляцию симплекса Δ^n — так сказать, вторую итерацию барицентрического подразделения. В нём тоже найдётся симплекс с полной раскраской. Обозначим его Δ_2^n и выберем в нём точку X_2.

Продолжая в том же духе, мы получим последовательность симплексов $\Delta_1^n, \Delta_2^n, \dots$ с полной раскраской, диаметры которых стремятся к нулю по лемме 3, и последовательность точек $X_1, X_2, \dots$, которая содержит сходящуюся подпоследовательность $(X_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ по известной из анализа теореме Больцано–Вейерштрасса. Покажем, что $X = \lim_{n\to\infty} X_{i_n}$ — неподвижная точка отображения f.

Пусть $(x_0, \dots, x_n)$ и $(y_0, \dots, y_n)$ — барицентрические координаты (относительно точек $\mathrm{a}_0, \dots, \mathrm{a}_n$ — вершин исходного симплекса Δ^n) точки X и её образа $f(\mathrm{X})$, а $(x_{i_k,0}, \dots, x_{i_k,n})$ — барицентрические координаты точек X_{i_k}. Кроме того, для каждого $k \in \mathbb{N}$ пусть $(x^l_{i_k,0}, \dots, x^l_{i_k,n})$ и $(y^l_{i_k,0}, \dots, y^l_{i_k,n})$, где $l = 0, \dots, n$, — барицентрические координаты вершин симплекса $\Delta^n_{i_k}$, содержащего точку X_{i_k}, и их образов при отображении f. Раскраски всех симплексов $\Delta^n_{i_k}$ полны, поэтому для всякого цвета $j = 0, \dots, n$ у каждого симплекса $\Delta^n_{i_k}$ есть вершина цвета j, т.е. найдётся число $l(k) \in \{0, \dots, n\}$ такое, что $y^{l(k)}_{i_k,j} \leqslant x^{l(k)}_{i_k,j}$. Ясно, что для бесконечного множества индексов k все $l(k)$ принимают одно и то же значение l. Поскольку диаметры симплексов $\Delta^n_{i_k}$ стремятся к нулю, а барицентрические координаты непрерывно зависят от точки, имеем $\lim_{k\to\infty} x^l_{i_k,j} = \lim_{k\to\infty} x_{i_k,j} = x_j$, а в силу непрерывности отображения f и того, что $y^l_{i_k,j} \leqslant x^l_{i_k,j}$ для бесконечно многих k, имеем также $\lim_{k\to\infty} y^l_{i_k,j} = y_j$ и $y_j \leqslant x_j$ для $j = 0, \dots, n$.

Мы показали, что $y_j \leqslant x_j$ для всех $j = 0, \dots, n$. Однако $\sum\limits_{j\leqslant n} x_j = \sum\limits_{j\leqslant n} y_j = 1$; значит, $y_j = x_j$ для $j = 0, \dots, n$. $\square$

Аксиомы отделимости

T_0: *Каковы бы ни были две различные точки, хотя бы одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Аксиома T_0 равносильна такому условию:

- если $x \neq y$, то либо $x \notin \overline{\{y\}}$, либо $y \notin \overline{\{x\}}$.

T_1: *Каковы бы ни были две различные точки, каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Равносильные условия таковы:

- Все одноточечные (значит, и конечные) множества замкнуты.

Действительно, $T_1 \iff x \notin \overline{\{y\}}$ и $y \notin \overline{\{x\}}$ для любых $x \neq y \iff \overline{\{x\}} \cap \{y : y \neq x\} = \varnothing$ для любой точки x, т.е. $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

- Все предельные точки любого множества являются точками накопления.

Действительно, если $x \neq y$ и $x \in \overline{\{y\}}$, то x — предельная точка множества $\{y\}$, но не точка его накопления. Обратно, если в T_1-пространстве точка x — не точка накопления множества A, то у x есть окрестность U, для которой $F = U \cap A$ конечно и потому замкнуто. Значит, $U \setminus F$ — не пересекающаяся с $A \setminus \{x\}$ окрестность точки x.

- Пересечение всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$.

Это условие нарушается тогда и только тогда, когда существуют разные точки x и y такие, что y принадлежит любой окрестности точки x, т.е. тогда и только тогда, когда нарушается аксиома T_1.

T_2: *Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.*

Равносильное условие:

- пересечение замыканий всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$.

Действительно, точка y принадлежит замыканию некоторого множества U, если любая окрестность y пересекается с U, поэтому то, что $y \in \bigcap\{\overline{U} : U \text{ — окрестность точки } x\}$, означает, что любая окрестность точки y пересекается с любой окрестностью точки x.

Поскольку каждая окрестность всякой точки содержит окрестность из любой локальной базы топологии в этой точке, аксиома T_2 равносильна и такому условию:

- для любой точки x и любой локальной базы $\mathscr{B}(x)$ в этой точке $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathscr{B}(x)\} = \{x\}$.

T_3: *У любой точки и любого не содержащего её замкнутого множества есть непересекающиеся окрестности.*

Эта аксиома равносильна такому условию (очень часто за аксиому T_3 принимают именно это условие):

- для любой точки x и любой её окрестности U найдётся такая окрестность V точки x, что $\overline{V} \subset U$.

Действительно, рассмотрим открытую окрестность U точки x в топологическом пространстве X, удовлетворяющем аксиоме T_3, и её дополнение $F = X \setminus U$ (которое является замкнутым множеством). Пусть V_x и V_F — непересекающиеся окрестности точки x и множества F соответственно; поскольку любая окрестность содержит открытую, можно считать, что V_x и V_F открыты. Тогда $X \setminus V_F$ замкнуто, и $V_x \subset X \setminus V_F$. Значит, $\overline{V_x} \subset X \setminus V_F \subset X \setminus F = U$. Обратно, пусть F — замкнутое множество в топологическом пространстве X, удовлетворяющем сформулированному выше условию, и пусть $x \notin F$. Тогда $U = X \setminus F$ — открытая окрестность точки x, и по предположению существует окрестность V той же точки со свойством $\overline{V} \subset U$. Ясно, что $W = X \setminus \overline{V}$ — открытая окрестность множества F и $V \cap W = \varnothing$.

T_4: *У любых двух непересекающихся замкнутых множеств есть непересекающиеся (открытые) окрестности.*

Равносильные условия:

- Для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U найдётся такая окрестность V множества F, что $\overline{V} \subset U$.

Доказательство равносильности этого условия аксиоме T_4 дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для аксиомы T_3.

- Если F и G — любые непересекающиеся замкнутые множества, то у F найдётся окрестность V такая, что G содержится в дополнении её замыкания.

Чтобы увидеть, что это условие равносильно первому, достаточно положить U равным дополнению G.

В этот список не включена ещё одна важнейшая аксиома отделимости, $T_{3\frac{1}{2}}$; её мы обсудим позже.

Определение

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2, называются хаусдорфовыми.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называются регулярными.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_4, называются нормальными.

В тех случаях, когда два множества (или точки) имеют непересекающиеся окрестности, говорят, что эти множества отделены окрестностями. Например, аксиома T_4 утверждает, что любые непересекающиеся замкнутые множества отделены окрестностями.

Класс всех топологических пространств, удовлетворяющих данной аксиоме отделимости, обозначается тем же символом, что и сама аксиома, так что запись $X \in T_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$, означает, что пространство X удовлетворяет аксиоме T_i. Вместо «топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_i», часто пишут «T_i-пространство».

Хаусдорфовы пространства

Теорема

Для топологического пространства X следующие условия равносильны:

1. *X хаусдорфово;*
2. *если фильтр на X сходится, то он сходится к ровно одной точке;*
3. *если ультрафильтр на X сходится, то он сходится к ровно одной точке.*

Доказательство. ① $\Longrightarrow$ ②: Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на X и $\mathscr{F} \to x$. Возьмём точку $y \in X$, $y \neq x$. $X \in T_2 \implies$ существуют непересекающиеся окрестности U и V точек x и y. $\mathscr{F} \to x \implies U \in \mathscr{F}$. Значит, $V \notin \mathscr{F}$ и $\mathscr{F}$ не сходится к y.

Импликация ② $\Longrightarrow$ ③ тривиальна.

③ $\Longrightarrow$ ①: Пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Предположим, что любая окрестность x пересекается с любой окрестностью y. Рассмотрим семейство

$$\mathscr{F} = \{U \cap V : U \text{ — окрестность } x,\ V \text{ — окрестность } y\}.$$

Оно центрировано и содержит все окрестности x и все окрестности точки y (в качестве U или V можно брать X). $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$. Имеем $\mathscr{U} \to x$ и $\mathscr{U} \to y$. Противоречие. □

Теорема

График любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ произвольного топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y замкнут в $X \times Y$.

Доказательство. Надо показать, что множество $(X \times Y) \setminus \operatorname{Gr} f$ открыто, т.е. что если $x \in X$, $y \in Y$ и $y \neq f(x)$, то найдутся открытые множества $U \subset X$ в X и $V \subset Y$ в Y такие, что $(x, y) \in U \times V$ и $z \neq f(t)$ для любых $t \in U$ и $z \in V$. Это действительно так: поскольку пространство Y хаусдорфово, у точек y и $f(x)$ найдутся непересекающиеся открытые окрестности V и W в Y, а поскольку отображение f непрерывно, множество $U = f^{-1}(W)$ открыто в X. Ясно, что множества U и V обладают нужными свойствами. ☐

Теорема

Топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ замкнута в пространстве $X \times X$.

Доказательство. Замкнутость диагонали в предположении хаусдорфовости X вытекает из предыдущей теоремы, поскольку $\Delta = \operatorname{Gr} \mathrm{id}_X$, а тождественное отображение id_X всегда непрерывно.

Обратно, предположим, что диагональ Δ замкнута и рассмотрим две любые разные точки $x, y \in X$. Поскольку $(x, y) \notin \Delta$, у точки (x, y) найдётся не пересекающая Δ окрестность в $X \times X$. Поскольку топология произведения $X \times X$ порождена базой $\{U \times V : U$ и V открыты в $X\}$, найдутся открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $(x, y) \in U \times V$ (а значит, $x \in U$ и $y \in V$) и $U \times V \cap \Delta = \varnothing$, т.е. $U \cap V = \varnothing$, что и доказывает хаусдорфовость X. ☐

Теорема

Пусть $f, g\colon X \to Y$ — непрерывные отображения некоторого топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y. Тогда множество $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ точек их совпадения замкнуто в X.

Доказательство. Мы покажем, что множество $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ открыто в X.

Для каждого $x \in A$ имеем $f(x) \neq g(x)$; поскольку Y хаусдорфово, существуют открытые в Y множества U и V такие, что $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Множество $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ открыто в x (так как f и g непрерывны), содержит точку x и содержится в A.

Мы показали, что каждая точка $x \in A$ содержится в A вместе с некоторой своей окрестностью W; значит, A открыто. □

Следствие

Множество $\mathrm{Fix}\, f = \{x \in X : f(x) = x\}$ *неподвижных точек любого отображения* $f\colon X \to X$ *хаусдорфова пространства* X *в себя замкнуто в* X.

Доказательство. Достаточно применить теорему к отображениям f и $g = \mathrm{id}_X$. □

Следствие

Если $f, g\colon X \to Y$ *— непрерывные отображения произвольного топологического пространства* X *в хаусдорфово пространство* Y, $A \subset X$, $\overline{A} = X$ *и* $f(a) = g(a)$ *для всех* $a \in A$, *то* $f = g$, *т.е.* $f(x) = g(x)$ *для всех* $x \in X$.

В частности, любые непрерывные функции на топологическом пространстве, совпадающие на плотном подмножестве этого пространства, совпадают и на всём пространстве.

Нормальные пространства

Теорема

Всякое метризуемое пространство нормально.

Доказательство. Пусть X — метризуемое пространство, и пусть d — любая метрика на пространстве X, порождающая его топологию.

Заметим, что X — T_1- и даже T_2-пространство, поскольку если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $d(x, y) > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и $B_d(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B_d(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \varnothing$.

Покажем, что $X \in T_4$. Пусть A и B замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Рассмотрим

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}. \tag{1}$$

Вспомним: $x \in \overline{Y} \iff d(x, Y) = 0$. Значит, $\forall x \in A$ имеем $d(x, B) > 0$, и $\forall y \notin A$ имеем $d(y, A) > 0$, так что функция f определена корректно. Она непрерывна, так как функции $X \to \mathbb{R}$, определённые правилами $x \mapsto d(x, A)$ и $x \mapsto d(x, B)$, непрерывны. Наконец, ясно, что $f|_A \equiv 0$ и $f|_B \equiv 1$, так что $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ и $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ — непересекающиеся открытые (в силу непрерывности f) окрестности множеств A и B соответственно. ☐

Лемма Урысона

Для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B в T_4-пространстве X существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$.

Доказательство. Сперва мы построим семейство открытых множеств V_r, $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, удовлетворяющее условиям

1. $\overline{V}_r \subset V_s$ для $r < s$, $r, s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, и
2. $A \subset V_0$, $B \subset X \setminus V_1$.

Положим $r_1 = 0$ и $r_2 = 1$ и как-нибудь заиндексируем все рациональные числа в интервале $(0,1)$ натуральными числами, бóльшими 2: $r_3, r_4, r_5, \ldots$. Введём вспомогательное условие

1_n $\overline{V}_{r_i} \subset V_{r_j}$, если $r_i < r_j$ и $i, j \leqslant n$

и будем строить множества V_r индукцией по номеру (индексу) рационального числа r.

Пользуясь тем, что $X \in T_4$, найдём открытые множества U и V со свойствами $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Положим $V_0 = U$ и $V_1 = X \setminus B$. Очевидно, $A \subset V_0 \subset X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subset V_1$; следовательно, $\overline{V}_0 \subset V_1$, т.е. условие ①$_n$ выполнено для $n = 2$ (условие ② тоже выполнено).

Допустим, что $n \geqslant 2$ и множества V_{r_j} уже определены для $j \leqslant n$ так, что выполнено условие ①$_n$. Найдём среди чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ числа r_l и r_m, ближайшие к r_{n+1} слева и справа соответственно. Поскольку $r_l < r_m$ и $l, m \leqslant n$, из ①$_n$ следует, что $\overline{V}_{r_l} \subset V_{r_m}$. Из того, что $X \in T_4$, вытекает существование открытого множества W такого, что $\overline{V}_{r_l} \subset W \subset \overline{W} \subset V_{r_m}$. Положим $V_{r_{n+1}} = W$. Поскольку любое число $r_i \neq r_l$ с индексом $i \leqslant n$, удовлетворяющее условию $r_i < r_{n+1}$, меньше r_l, по индуктивному предположению имеем $\overline{V}_{r_i} \subset V_{r_l}$ для любого такого r_i, и поскольку любое число $r_j \neq r_m$ с индексом $j \leqslant n$, удовлетворяющее условию $r_j > r_{n+1}$, больше r_m, по индуктивному предположению имеем $\overline{V}_{r_m} \subset V_{r_j}$ для любого такого r_j. Значит, множества $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_n}, V_{r_{n+1}} = W$ удовлетворяют условию ①$_{n+1}$.

В результате получим последовательность открытых множеств $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots,$ удовлетворяющую условиям ① и ②.

Определим функцию $f\colon X \to [0,1]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, & \text{если } x \in V_1, \\ 1, & \text{если } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

В силу ② имеем $f(x) = 0$ для $x \in A$ и $f(x) = 1$ для $x \in B$. Покажем, что f непрерывна. Достаточно проверить, что все множества вида $f^{-1}([0,a))$ и $f^{-1}((b,1])$ открыты в X.

Для $a \in (0,1]$ и $x \in X$ $f(x) < a \iff \exists r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ т., что $r < a$ и $x \in V_r$; значит, $f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r : r \in [0,a) \cap \mathbb{Q}\}$, а это множество открыто.

Для $b \in [0,1)$ и $x \in X$ $f(x) > b \iff \exists r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ т., что $r > b$ и $x \notin V_r$. Пусть $s \in \mathbb{Q}$, $b < s < r$. В силу ① имеем $\overline{V}_s \subset V_r$; значит, если $f(x) > b$, то найдётся $s \in (b,1] \cap \mathbb{Q}$, для которого $x \notin \overline{V}_s$. Очевидно, верно и обратное: если $x \notin \overline{V}_s$ для некоторого $s \in (b,1] \cap \mathbb{Q}$, то $x \notin V_s$ и $f(x) \geqslant s > b$. Значит, $f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_s : s \in (b,1] \cap \mathbb{Q}\}$, а это множество открыто.

Мы доказали непрерывность функции f, а вместе с ней и лемму Урысона. □

На самом деле лемма Урысона (как и теорема Титце–Урысона) представляет собой характеристику T_4-пространств.

Говорят, что непересекающиеся множества A и B в топологическом пространстве X функционально отделимы, если существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$. Ясно, что это условие равносильно существованию непрерывной функции $g\colon X \to \mathbb{R}$, принимающей разные постоянные значения на множествах A и B: если $g(A) \equiv a$ и $g(B) \equiv b$, то функцию f можно определить правилом $f(x) = \frac{|f(x)-a|}{|f(x)-a|+|f(x)-b|}$.

Таким образом, лемму Урысона можно сформулировать так: *топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_4 тогда и только тогда, когда в нём любые два непересекающихся замкнутых множества функционально отделимы*.

Теорема Титце–Урысона о продолжении

Пусть X — T_4-пространство и F — его замкнутое подмножество. Тогда

а) у любой непрерывной функции $f\colon F \to [-1, 1]$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}\colon X \to [-1, 1]$;

б) у любой непрерывной функции $f\colon F \to \mathbb{R}$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}\colon X \to \mathbb{R}$.

Доказательство. а) Для любой непрерывной функции $f_0\colon F \to \mathbb{R}$ со свойством $|f_0(x)| \leqslant a$ для $x \in F$ (где $a > 0$) существует непрерывная функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ со свойствами

1. $|g(x)| \leqslant \frac{a}{3}$ для всех $x \in X$;
2. $|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}a$ для $x \in F$.

В самом деле, множества $A = f_0^{-1}([-a, -\frac{a}{3}])$ и $B = f_0^{-1}([\frac{a}{3}, a])$ замкнуты в F, и они не пересекаются; поскольку F замкнуто в X, множества A и B замкнуты и в X, и по лемме Урысона существует непрерывная функция $\varphi\colon X \to [0, 1]$ такая, что $\varphi|_A \equiv 0$ и $\varphi|_B \equiv 1$. Функция $g\colon X \to \mathbb{R}$, определённая правилом $g(x) = \frac{2}{3}a \cdot (\varphi(x) - \frac{1}{2})$ для $x \in X$, непрерывна и удовлетворяет условиям ① и ②.

Теперь определим по индукции последовательность непрерывных функций $g_n\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих таким условиям для всех $n \in \mathbb{N}$:

③ $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ для всех $x \in X$;

④ $\left|f(x) - \sum_{i \leqslant n} g_i(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ для $x \in F$.

Функцию g_1 мы определим, применив сделанное выше замечание к $a = 1$ и функции f_0, равной надотображению $\tilde{f}\colon F \to \mathbb{R}$ отображения $f\colon F \to [-1, 1]$. Допустим, что функции $g_1, g_2, \ldots, g_k$ уже построены так, что выполнены условия ③ и ④ с $n \leqslant k$. Применяя то же самое замечание к $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{k}$ и $f_0 = \tilde{f} - \sum_{i \leqslant k} g_i\big|_F$, мы получим функцию g_{k+1}, удовлетворяющую условиям ③ и ④ с $n = k + 1$. Индуктивное построение завершено.

Согласно известному из анализа признаку Вейерштрасса в силу условия ③ ряд функций $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к некоторой функции $\hat{f}\colon X \to [-1, 1]$, причём по теореме Коши $\hat{f}$ непрерывна. Из условия ④ следует, что $\hat{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in F$. Значит, $\hat{f}$ — искомое непрерывное продолжение функции f на X.

б) Рассмотрим теперь функцию $f\colon F \to \mathbb{R}$. Пусть $\psi\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ — функция, определённая правилом $\psi(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Тогда $\psi \circ f$ — непрерывная функция $F \to [-1,1]$, причём $\psi \circ f(F) \subset (-1,1)$, и к ней применимо уже доказанное утверждение а). Пусть $\hat{f}_1\colon X \to [-1,1]$ — непрерывное продолжение функции $\psi \circ f$. В силу его непрерывности множество $G = f_1^{-1}(\{-1,1\})$ замкнуто в X, и оно не пересекает F. Значит, по лемме Урысона существует непрерывное отображение $\varphi\colon X \to [0,1]$ такое, что $\varphi|_G \equiv 0$ и $\varphi|_F \equiv 1$. Легко видеть, что отображение $\hat{f}_2\colon X \to [-1,1]$, определённое формулой $\hat{f}_2(x) = \hat{f}_1(x) \cdot \varphi(x)$, тоже является непрерывным продолжением отображения $\psi \circ f$ на X, причём $\hat{f}_2(X) \subset \psi(\mathbb{R}) = (-1,1)$. Функция $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \hat{f}_2$ — искомое непрерывное продолжение f на X. □

Утверждение а) теоремы Титце–Урысона остаётся верным при замене отрезка $[-1,1]$ на любой другой отрезок $[a,b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Действительно, для $f\colon F \to [a,b]$ достаточно рассмотреть любой гомеоморфизм $\psi\colon [a,b] \to [-1,1]$ (например, $\psi(x) = \frac{a+b-2x}{a-b}$), построить непрерывное продолжение $\widehat{\psi \circ f}\colon X \to [-1,1]$ функции $\psi \circ f\colon F \to [-1,1]$ и положить $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \widehat{\psi \circ f}$.

Тихоновские пространства

Определение

Топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \notin F$ существует непрерывная функция $f: X \to [0,1]$, принимающая значение 0 в точке x и тождественно равная 1 на множестве F.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и $T_{3\frac{1}{2}}$, называются вполне регулярными, или тихоновскими.

Иногда за определение принимают равносильное условие: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, если для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U существует непрерывная функция $f: X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ и $f|_{X \setminus U} \equiv 1$.

$T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$: если $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, F замкнуто в X и $x \in X \setminus F$, то множества $U = f^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$ и $V = f^{-1}\big((\frac{1}{2}, 1]\big)$, где $f: X \to [0,1]$ — непрерывная функция, равная 0 в точке x и 1 на множестве F, — непересекающиеся окрестности x и F.

$$\text{нормальность} \implies \text{тихоновость} \implies \text{регулярность} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Ни одну из этих стрелок нельзя обратить.

Примеры

- $T_0 \not\Longrightarrow T_1$

  Связное двоеточие — множество $\{a, b\}$, состоящее из двух точек a и b, с топологией $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.

- $T_1 \not\Longrightarrow T_2$

  Множество $\mathbb{R}$ с топологией Зарисского, в которой открыты все дополнения до конечных множеств и только они.

- $T_2 \not\Longrightarrow T_3$

  Прямая $\mathbb{R}$ с топологией, базу которой составляют все открытые интервалы и множества вида $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus S$, где $\varepsilon > 0$ и $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

  Множество S замкнуто в новой топологии и $0 \notin S$, однако S и 0 не отделены окрестностями.

- $T_1 + T_3 \not\Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}}$

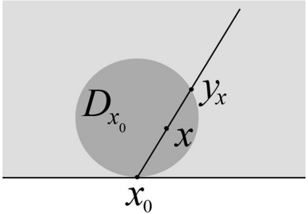
  Сложный пример.
- $T_1 + T_{3\frac{1}{2}} \not\Longrightarrow T_4$

  Плоскость Немыцкого L

  $L \in T_1$: топология L сильнее топологии, порождённой метрикой.

  $L \in T_{3\frac{1}{2}}$: достаточно проверить для точек граничной прямой l плоскости Немыцкого — всякая окрестность любой точки $x_0 \in L \setminus l$ содержит некоторую ε-окрестность относительно евклидовой метрики d на плоскости, а для ε-окрестности нужная функция из определения $T_{3\frac{1}{2}}$ существует (притом непрерывная не только относительно топологии L, но и относительно более слабой метрической топологии замкнутой верхней полуплоскости) — можно положить $f(x) = \min\{\frac{d(x_0,x)}{\varepsilon}, 1\}$.

  Пусть $x_0 \in l$, U — любая окрестность точки x_0 и $D_{x_0} \cup \{x_0\}$ — базисная окрестность x_0, содержащаяся в U. Для $x \in D_{x_0}$ обозначим через y_x точку, в которой луч, выходящий из точки x_0 и проходящий через x, пересекает границу круга D_{x_0}:



Функция $f\colon L \to [0,1]$, определённая правилом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = x_0, \\ 1, & \text{если } x \in L \setminus \bigl(D_{x_0} \cup \{x_0\}\bigr), \\ \frac{d(x_0,x)}{d(x_0,y_x)}, & \text{если } x \in D_{x_0}, \end{cases}$$

непрерывна на L, $f(x_0) = 0$ и $f|_L \setminus U \equiv 1$ (так как $U \supset D_{x_0}$).

Мы показали, что плоскость Немыцкого L вполне регулярна. Вместо того чтобы доказывать, что L не нормальна, мы докажем несколько более общий факт.

Предложение

Если сепарабельное пространство содержит замкнутое дискретное подпространство мощности $\geqslant 2^{\aleph_0}$, *то оно не удовлетворяет аксиоме* T_4.

Доказательство. Пусть X — сепарабельное пространство, $Y \subset X$ — счётное всюду плотное множество в X и D — замкнутое дискретное подпространство X мощности $2^{\aleph_0}$. Знаем: если непрерывные функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ принимают одинаковые значения в точках Y, то они совпадают. Значит, на X существует не более чем $|\mathbb{R}|^{|Y|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ разных непрерывных функций.

Поскольку D дискретно, любая функция $D \to \mathbb{R}$ непрерывна, а число разных таких функций равно $|D|^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Если бы пространство X удовлетворяло аксиоме T_4, то каждая из этих функций допускала бы непрерывное продолжение на X, и все продолжения были бы разными (так как уже сами функции разные), а это невозможно, поскольку по теореме Кантора $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$. ☐

Аксиомы отделимости в подпространствах

Легко видеть, что свойство удовлетворять каждой аксиоме отделимости, кроме T_4, наследственно. Покажем, например, что если $X \in T_3$ и $Y \subset X$, то $Y \in T_3$. Пусть F — замкнутое подмножество Y и $x \in Y \setminus F$. Положим $G = \overline{F}^X$. Поскольку $F = G \cap Y$, имеем $x \notin G$; значит, в пространстве X существуют непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества G соответственно. По определению индуцированной топологии $U \cap Y$ и $V \cap Y$ — окрестности точки x и множества F в пространстве Y, и они не пересекаются.

С аксиомой T_4 дело обстоит иначе, поскольку из того, что замкнутые множества F и G в подпространстве Y пространства X не пересекаются, вообще говоря, не следует, что их замыкания в X не пересекаются. Простой пример — пространство $X = \{a, b, c, d\}$ с топологией $\big\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\big\}$ и его подпространство $Y = \{a, b, c\}$: помимо $\varnothing$ и X, в X замкнуты только множества $\{b, c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ и $\{d\}$, и все они попарно пересекаются, так что аксиома T_4 выполняется в X тривиальным образом. Однако в Y есть непересекающиеся замкнутые множества $\{b\}$ и $\{c\}$, и они не отделены окрестностями.

Предложение

Если $X \in T_4$ *и* Y *— замкнутое подпространство* X*, то* $Y \in T_4$*.*

Доказательство. Если F и G — непересекающиеся замкнутые множества в Y, то они являются таковыми и в X, поскольку Y замкнуто в X. Значит, они имеют непересекающиеся окрестности U и V. Ясно, что $U \cap Y$ и $V \cap Y$ — непересекающиеся окрестности F и G в Y. □

Однако открытыми подпространствами нормальность уже не наследуется. Более того, если в некотором пространстве все открытые подпространства нормальны, то в нём нормальны и вообще все подпространства.

Аксиомы отделимости и непрерывные отображения

Ясно, что всеми непрерывными отображениями не сохраняется ни одна аксиома: дискретные пространства удовлетворяют всем аксиомам отделимости, и любое топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ является образом пространства $(X, \mathscr{T}_d)$, где $\mathscr{T}_d$ — дискретная топология.

Однако непрерывными отображениями специальных типов некоторые аксиомы отделимости сохраняются (пока мы знаем три таких типа — открытые отображения, замкнутые отображения и гомеоморфизмы). Например, очевидно, что образ $f(X)$ T_1-пространства X при замкнутом отображении $f\colon X \to Y$ тоже является T_1-пространством ($\forall x \in X$ множество $\{x\}$ замкнуто в $X \implies \forall y \in f(X)$ множество $\{y\}$ замкнуто в $f(X)$).

Теорема

Если $f : X \to Y$ — замкнутое сюръективное непрерывное отображение нормального пространства X на некоторое пространство Y, то Y нормально.

Доказательство. Мы уже показали, что $Y \in T_1$. Пусть F и G — непересекающиеся замкнутые множества в Y. Тогда $f^{-1}(F)$ и $f^{-1}(G)$ — непересекающиеся замкнутые множества в X. В силу нормальности X существуют непересекающиеся открытые в X множества $U, V \subset X$ такие, что $f^{-1}(F) \subset U$, $f^{-1}(G) \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Множества $X \setminus U$ и $X \setminus V$ замкнуты в X, и $X \setminus U \cup X \setminus V = X$. Значит, множества $f(X \setminus U)$ и $f(X \setminus V)$ замкнуты в Y, и $f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V) = Y$. Следовательно, множества $W = Y \setminus f(X \setminus U)$ и $O = Y \setminus f(X \setminus V)$ открыты в Y и не пересекаются. Поскольку $f^{-1}(F) \subset U$ и $f^{-1}(G) \subset V$, имеем $F \subset W$ и $G \subset O$. ☐

Операции над топологическими пространствами

Сумма

Определение

Пусть задано семейство $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ попарно непересекающихся топологических пространств. Положим $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Обозначим через $\mathscr{T}$ семейство всех множеств $U \subset X$ таких, что $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in A$. Легко видеть, что $\mathscr{T}$ — топология на X (порождённая базой $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathscr{T}_\alpha$).

Множество X с этой топологией называется суммой пространств X_α, $\alpha \in A$, и обозначается $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. В случае, когда множество A конечно (т.е. $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$), используется также обозначение $X_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus X_{\alpha_n}$.

1. Множество $F \subset X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда $F \cap X_\alpha$ замкнуто в X_α для всякого $\alpha \in A$.
2. Каждое слагаемое X_α открыто-замкнуто в $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.
3. если пространства X_α, $\alpha \in A$ попарно не пересекаются и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$, то топология суммы $Y = \bigoplus_{\alpha \in A} Y_\alpha$ совпадает с топологией, индуцированной из суммы $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Предложение

Отображение $f \colon \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha \to Y$ *суммы топологических пространств* X_α *в произвольное топологическое пространство* Y *непрерывно тогда и только тогда, когда сужения* $f\big|_{X_\alpha} : X_\alpha \to Y$ *непрерывны для всех* $\alpha \in A$.

Предложение

Если топологическое пространство X является объединением своих попарно непересекающихся открытых подмножеств X_α, $\alpha \in A$, то $X = \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Предложение

1. *Сумма $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_i, $i \leqslant 4$, тогда и только тогда, когда $X_\alpha \in T_i$ для всех $\alpha \in A$.*

2. *Вес, характер, плотность и число Суслина суммы связаны с соответствующими характеристиками слагаемых равенствами*

$$w\left(\bigoplus\nolimits_{\alpha\in A} X_\alpha\right) = \max\{\sup_{\alpha\in A} w(X_\alpha), |A|\}, \qquad \chi\left(\bigoplus\nolimits_{\alpha\in A} X_\alpha\right) = \sup_{\alpha\in A} \chi(X_\alpha),$$

$$d\left(\bigoplus\nolimits_{\alpha\in A} X_\alpha\right) = \max\{\sup_{\alpha\in A} d(X_\alpha), |A|\}, \qquad c\left(\bigoplus\nolimits_{\alpha\in A} X_\alpha\right) = \max\{\sup_{\alpha\in A} c(X_\alpha), |A|\}.$$

Примеры

1. Дискретное пространство.
2. Стрелка Зоргенфрея.
3. Прямая $\mathbb{R}$.

Факторпространства

Определение

Фактортопология на фактор729множестве $X/\sim$ топологического пространства X по отношению эквивалентности состоит из всех множеств $U \subset X/\sim$, для которых множество $\{x \in X : [x] \in U\}$ (т.е. объединение всех тех подмножеств X, которые являются принадлежащими U классами эквивалентности) открыто в X. Множество $X/\sim$ с этой топологией называется факторпространством пространства X по отношению эквивалентности $\sim$. Естественное отображение $q\colon X \to X/\sim$ непрерывно относительно так определённой топологии, и оно называется (естественным) факторным отображением.

Всякая сюръекция $f\colon X \to Y$ является естественным отображением множества X на отождествляемое с Y фактормножество множества X по отношению эквивалентности $\sim_f$, определённому правилом $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$, однако вовсе не всякая непрерывная сюръекция $f\colon X \to Y$ является факторным отображением: топология пространства Y может не совпадать с топологией факторпространства $X/\sim_f$, хотя как множества Y и $X/\sim_f$ совпадают.

Теорема

Для сюръективного отображения $f : X \to Y$ топологических пространств следующие условия равносильны:

1. *f факторно (и $Y = X/{\sim_f}$ — факторпространство);*
2. *множество $U \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ открыто в X;*
3. *множество $F \subset Y$ замкнуто в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(F)$ замкнуто в X;*
4. *f непрерывно и топология пространства Y не слабее топологии факторпространства пространства X по отношению эквивалентности $\sim_f$.*

Доказательство. Для любых $U, F \subset X/{\sim_f}$ имеем

$$f^{-1}(U) = \bigcup\{[x] \subset X : [x] \in U\} = \{x \in X : [x] \in U\}$$

и

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(X/{\sim_f} \setminus F).$$

□

Определение′

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется **факторным**, если оно сюръективно и множество $U \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ открыто в X.

Замечание

Отображение $f\colon X \to Y$ факторно тогда и только тогда, когда f сюръективно и топология пространства Y самая сильная из всех топологий, относительно которых f непрерывно.

Следствие

Композиция факторных отображений является факторным отображением.

Следствие

Если композиция $g \circ f$ *непрерывных отображений* $f\colon X \to Y$ *и* $g\colon Y \to Z$ *факторна, то отображение* g *факторно.*

Доказательство. Очевидно, g сюръективно. Если $U \subset Z$ открыто, то $g^{-1}(U)$ открыто в Y в силу непрерывности g. Если $U \subset Z$ таково, что $g^{-1}(U)$ открыто в Y, то $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$ открыто в X (так как f непрерывно), и по доказанной теореме U открыто в Z (так как $g \circ f$ факторно). □

Следствие

Пусть $f: X \to Y$ *— непрерывное отображение. Если существует* $A \subset X$*, для которого* $f(A) = Y$ *и сужение* $f|_A$ *факторно, то* f *тоже факторно.*

Доказательство. Пусть $i_A: A \to Y$ — тождественное вложение. Имеем $f|_A = f \circ i_A$. Осталось применить предыдущее следствие. □

Следствие

Всякое открытое или замкнутое непрерывное сюръективное отображение $f: X \to Y$ *факторно.*

Следствие

Любое взамнооднозначное факторное отображение является гомеоморфизмом.

Следствие

Факторпространство пространства X *по некоторому отношению эквивалентности (т.е. образ* X *при факторном отображении) удовлетворяет аксиоме отделимости* $T_1 \iff$ *все классы эквивалентности (прообразы точек) замкнуты в* X*.*

Примеры

1. *Стягивание множества в точку.* Для $F \subset X$ рассмотрим $\sim$, классы которого — F и $\{x\}$ для $x \notin F$. Факторпространство $Y = X/{\sim}$ обозначается X/F; говорят, что Y получается из X стягиванием в точку множества F.

$X/F \in T_1 \iff F$ и все $\{x\}$ для $x \notin F$ замкнуты.

$X/F \in T_2 \iff F$ замкнуто, любые различные точки $x, y \in X \setminus F$ отделены окрестностями и любая точка $x \in X \setminus F$ и множество F отделены окрестностями.

X/F регулярно $\iff F$ замкнуто, любая точка $x \notin F$ и любое замкнутое $G \not\ni x$ отделены окрестностями, F и любое замкнутое множество, не пересекающее F, отделены окрестностями.

X/F вполне регулярно $\iff F$ замкнуто, любая точка $x \notin F$ функционально отделима от любого не содержащего её замкнутого множества, и любое замкнутое множество, не пересекающее F, функционально отделимо от F.

X/F нормально $\iff F$ замкнуто и X нормально.

Пример — веер Фреше–Урысона.

2. *Присоединение пространства по отображению.* Пусть X и Y — непересекающиеся топологические пространства, $F \subset X$ — замкнутое в X множество и $f : F \to Y$ — непрерывное отображение. Обозначим через $\sim$ отношение эквивалентности на сумме $X \oplus Y$, соответствующее разбиению на одноточечные множества $\{z\}$, где $z \in (X \oplus Y) \setminus (F \cup f(F))$, и множества $\{y\} \cup f^{-1}(y)$, где $y \in f(F)$. Факторпространство $X \oplus Y/{\sim}$ обозначается $X \cup_f Y$; при этом говорят, что $X \cup_f Y$ получается присоединением пространства Y к пространству X по отображению f.

Если Y одноточечно, то $X \cup_f Y$ гомеоморфно факторпространству X/F. $X \setminus F$ вкладывается в $X \cup_f Y$ как открытое подпространство, а Y — как замкнутое.

3. *Приклеивание и склеивание.* Операцию присоединения пространства по гомеоморфизму часто называют приклеиванием. В случае, когда в одном и том же топологическом пространстве X имеются два непересекающихся подпространства F и G, связанных гомеоморфизмом $f: F \to G$, определена также операция склеивания подпространств F и G — факторизация по отношению эквивалентности, порождённому разбиением на одноточечные множества $\{x\}$, $x \in X \setminus (F \cup G)$, и двухточечные множества $\{x, f(x)\}$, $x \in F$. При применении этой операции обычно требуют замкнутости подмножеств F и G — тогда факторпространство удовлетворяет тем же аксиомам отделимости, что и пространство X.

Примеры: тор, лист Мёбиуса, бутылка Клейна, проективная плоскость, сфера с ручками или плёнками Мёбиуса.

Обратные операции — вырезание и разрезание.

Прямые спектры и индуктивные пределы

Сумма $X = \bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$:

- содержит все X_α, $\alpha \in A$, в качестве подпространств;
- $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$;
- множество $U \subset X$ открыто в X $\iff$ $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in A$ (а значит, отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда все сужения $f|_{X_\alpha}$ непрерывны).

Определение

Пусть $\mathscr{F}$ — семейство топологических пространств, направленное вверх отношением включения (т.е. для любых $X, Y \in \mathscr{F}$ существует $Z \in \mathscr{F}$, для которого $X \subset Z$ и $Y \subset Z$). Тогда топологическое пространство $F = \bigcup \mathscr{F}$, топологию которого образуют все множества U с тем свойством, что $U \cap X$ открыто в X для каждого $X \in \mathscr{F}$, называется **индуктивным**, или **прямым**, пределом семейства $\mathscr{F}$.

Примеры — сумма, прямая $\mathbb{R}$.

Определение

Пусть $(A, \leqslant)$ — направленное множество и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство топологических пространств. Предположим, что для любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leqslant \beta$, определены непрерывные отображения $f_{\alpha\beta} \colon X_\alpha \to X_\beta$ с такими свойствами:

- $f_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha$ — тождественное отображение для любого α;
- $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}$ для любых $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Тогда семейство пространств и отображений $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A, \alpha \leqslant \beta\}$ называется прямым спектром над A.

Индуктивным, или прямым, пределом этого семейства, или пределом прямого спектра, называется факторпространство $\varinjlim X_\alpha = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} X_\alpha/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности, определённое правилом: $x_\alpha \sim x_\beta$, если $f_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = f_{\beta\gamma}(x_\beta)$ для некоторого $\gamma \geqslant \alpha, \beta$.

Иными словами, $\varinjlim X_\alpha$ — это факторможество $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} X_\alpha/\sim$, снабжённое сильнейшей из всех топологий, относительно которых все отображения $f_{\alpha\beta}$ непрерывны.

Топологические произведения

Напомним, что декартово произведение произвольного семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — это множество

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \forall\alpha \in A(f(\alpha) \in X_\alpha)\},$$

и что элементы $f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ принято записывать в виде $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, где для каждого $\alpha \in A$ $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ — α-я координата элемента $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Напомним также, что каноническая проекция произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β, где $\beta \in A$, — это отображение $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha\in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Ящичная топология на $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ — первое, что приходит в голову: её база — всевозможные произведения вида $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α открыто в X_α. Произведение с этой топологией обозначается $\mathop{\square}_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Бесконечное произведение недискретных пространств с ящичной топологией обладает плохими свойствами: никогда не бывает метризуемым (и даже никогда не удовлетворяет первой аксиоме счётности), редко бывает связным, никогда не сепарабельно и т.п.

Главный недостаток: диагональное произведение непрерывных отображений не всегда непрерывно относительно ящичной топологии ($\Longrightarrow$ произведение топологических пространств с ящичной топологией не является произведением в смысле теории категорий)

В теории категорий произведение объектов X_α, $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ (называемых каноническими проекциями) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f \colon Y \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\underset{\alpha\in A}{\Delta} f_\alpha \colon Y \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Тихоновская топология, или топология произведения — самая слабая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны. Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются топологическими, или тихоновскими, произведениями. В дальнейшем мы будем рассматривать произведения именно с этой топологией.

Предбаза:

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\beta \in U_\beta\},$$

где $\beta \in A$ — любой индекс, а U_β — любое открытое множество в X_β.

Иногда, особенно если речь идёт о пространствах функций, т.е. подпространствах произведений вида $\mathbb{R}^X$, топологию произведения называют топологией поточечной сходимости: последовательность функций $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, определённых на X, поточечно сходится к функции f, если для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ найдётся $N(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N(x)$, а это как раз и означает сходимость в тихоновской топологии.

Для конечных произведений тихоновская топология совпадает с ящичной. Евклидова топология на $\mathbb{R}^n$ совпадает с топологией произведения на $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$.

Предложение

Для любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *все множества вида* $\prod\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$*, где каждое* U_α *— открытое подмножество* X_α *и* $U_\alpha = X_\alpha$ *для всех, кроме конечного числа, индексов* α*, образуют базу топологического произведения* $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$*.*

Более того, если для каждого α *зафиксирована некоторая база* $\mathscr{B}_\alpha$ *пространства* X_α*, то множества вида* $\prod\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$*, где* $U_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ *для конечного числа индексов* α *и* $U_\alpha = X_\alpha$ *для всех остальных индексов, тоже образуют базу* $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$*.*

Определение

База топологического произведения, описанная в первом утверждении предложения, называется канонической базой, а элементы этой базы — каноническими открытыми множествами.

Теорема

Все канонические проекции $\pi_\beta\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, $\beta \in A$, *любого топологического произведения* $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *являются открытыми отображениями.*

Предложение

Если X_α, $\alpha \in A$, *— топологические пространства и* $Y_\alpha \subset X_\alpha$ *для* $\alpha \subset A$, *то топология произведения на* $\prod Y_\alpha$ *совпадает с топологией, индуцированной из топологического произведения* $\prod X_\alpha \supset \prod Y_\alpha$.

Доказательство. Элементы канонической базы произведения $\prod Y_\alpha$ = пересечения $Y = \prod Y_\alpha$ с элементами канонической базы произведения $\prod X_\alpha$. ☐

Предложение

Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для $\alpha \in A$. Тогда замыкание произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ в топологическом произведении $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ равно произведению замыканий множеств Y_α в X_α:

$$\overline{\prod Y_\alpha} = \prod \overline{Y_\alpha}.$$

Доказательство. По определению замыкания $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \overline{\prod Y_\alpha}$, если и только если для каждого элемента $\prod U_\alpha$ канонической базы $\prod X_\alpha$, содержащего (x_α), имеем $\prod U_\alpha \cap \prod Y_\alpha = \prod (U_\alpha \cap Y_\alpha) \neq \varnothing$, т.е. $U_\alpha \cap Y_\alpha \neq \varnothing$ для всех α. В частности, для каждого $\alpha \in A$ и любой окрестности U точки x_α в X_α имеем $U \cap Y_\alpha \neq \varnothing$, а это и означает, что $x_\alpha \in \overline{Y_\alpha}$. Таким образом, $\overline{\prod Y_\alpha} \subset \prod \overline{Y_\alpha}$.

Обратно, если $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod \overline{Y_\alpha}$, т.е. $x_\alpha \in \overline{Y_\alpha}$ для всех α, то для любого $\beta \in A$ и любой окрестности V_β точки x_β в X_β пересечение $V_\beta \cap Y_\beta$ содержит некоторую точку y_β. Имеем $(y_\alpha) \in \prod V_\alpha \cap \prod Y_\alpha$. Таким образом, точка (x_α) принадлежит замыканию множества $\prod Y_\alpha \subset \prod X_\alpha$ даже в ящичной топологии, тем более, в топологии произведения. □

Следствие

Пусть X_α*,* $\alpha \in A$*, — непустые топологические пространства и* $Y_\alpha \subset X_\alpha$ *для* $\alpha \in A$*. Множество* $\prod Y_\alpha$ *плотно в топологическом произведении* $\prod X_\alpha$ *тогда и только тогда, когда* Y_α *плотно в* X_α *для каждого* $\alpha \in A$*.*

Предложение

Пусть X_α, $\alpha \in A$, — непустые топологические пространства.
1. *Для каждого $\beta \in A$ пространство X_β вкладывается в топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ в качестве подпространства.*
2. *Если все X_α — T_1-пространства, то для каждого $\beta \in A$ X_β вкладывается в $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ в качестве замкнутого подпространства.*

Доказательство. Выберем по точке x^*_α в каждом пространстве X_α.

Для каждого $\beta \in A$ положим $X^*_\beta = \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$, где $Y_\beta = X_\beta$ и $Y_\alpha = \{x^*_\alpha\}$ для $\alpha \neq \beta$. Сужение $\pi_\beta\big|_{X^*_\beta} \colon X^*_\beta \to X_\beta$ — гомеоморфизм. Значит, отображение $\left(\pi_\beta\big|_{X^*_\beta}\right)^{-1}$, рассматриваемое как отображение в $\prod X_\alpha \supset X^*_\beta$, — гомеоморфное вложение.

Если все X_α являются T_1-пространствами, то $\{x^*_\alpha\}$ замкнуты в X_α для всех $\alpha \in A$, и подпространства X^*_β замкнуты в $\prod X_\alpha$ для всех $\beta \in A$. □

Определение

Говорят, что топологическое свойство $\mathscr{P}$ **мультипликативно** (**конечно мультипликативно**, **счётно мультипликативно**, **$\varkappa$-мультипликативно** для кардинала $\varkappa$), если для любого индексного множества A (любого конечного A, любого счётного A, любого A мощности $\leqslant \varkappa$) и любых топологических пространств X_α, $\alpha \in A$, со свойством $\mathscr{P}$ топологическое произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ тоже обладает свойством $\mathscr{P}$.

Нормальность не мультипликативна и даже не конечно мультипликативна (стрелка Зоргенфрея).

Теорема

Топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *удовлетворяет аксиоме отделимости* T_i, $i \leqslant 3\frac{1}{2}$, *тогда и только тогда, когда* $X_\alpha \in T_i$ *для всех* $\alpha \in A$.

Если $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *нормально, то все* X_α *нормальны.*

Доказательство. То, что произведение T_i-пространств является T_i-пространством для $i \leqslant 2$, видно из описания предбазы.

Покажем, что произведение T_3-пространств удовлетворяет аксиоме T_3. Пусть $x \in \prod X_\alpha$ и U — любая окрестность x в $\prod X_\alpha$. Возьмём элемент $\prod U_\alpha$ канонической базы произведения $\prod X_\alpha$, содержащийся в U и содержащий x. Число тех координат α, для которых $U_\alpha \neq X_\alpha$, конечно; пусть это координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Для каждого $i \leqslant n$ найдём окрестность V_{α_i} точки x_{α_i} в X_{α_i} такую, что $\overline{V}_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}$. Для $\alpha \neq \alpha_i$, $i \leqslant n$, положим $V_\alpha = X_\alpha$. Тогда $\prod V_\alpha$ — каноническая окрестность точки (x_α) и $\prod \overline{V}_\alpha \subset \prod U_\alpha \subset U$. Значит, $\overline{\prod U_\alpha} \subset U$.

Докажем выполнение $T_{3\frac{1}{2}}$ для произведения $T_{3\frac{1}{2}}$-пространств. Для точки $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$ и любой её окрестности U найдём каноническую окрестность $\prod U_\alpha \subset U$ точки (x_α). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ таковы, что $U_\alpha = X_\alpha$ для всех $\alpha \neq \alpha_i$, $i \leqslant n$. Для каждого $i \leqslant n$ возьмём непрерывную функцию $f_{\alpha_i}\colon X_{\alpha_i} \to [0,1]$ такую, что $f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = 0$ и $f_{\alpha_i}(X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}) \subset \{1\}$. Положим $g_{\alpha_i} = f_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i}$ и $g = \max\{g_{\alpha_i} : i \leqslant n\}$. Мы получили непрерывную функцию $g\colon \prod X_\alpha \to [0,1]$ с тем свойством, что $g\big((x_\alpha)\big) = 0$ и $g\big(\prod X_\alpha \setminus U\big) \subset g\big(\prod X_\alpha \setminus \prod U_\alpha\big) \subset \{1\}$, что и требовалось.

Мы показали, что для $i \leqslant 3\frac{1}{2}$ произведение T_i-пространств тоже является T_i-пространством. То, что все сомножители в произведении, удовлетворяющем аксиоме T_i, где $i \leqslant 4$, удовлетворяют той же аксиоме, вытекает из того, что замкнутые подпространства T_4-пространств являются T_4-пространствами. ☐

Теорема

Первая и вторая аксиомы счётности счётно мультипликативны.

Теорема (Хьюитта–Марчевского–Пондицери)

Пусть κ — бесконечный кардинал. Если A — множество мощности $\leqslant 2^\kappa$ и для каждого $\alpha \in A$ X_α — топологическое пространство со свойством $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$, то $d\left(\prod X_\alpha\right) \leqslant \kappa$.

В частности, сепарабельность $2^{\aleph_0}$-мультипликативна.

Марчевский и Пондицери доказали также, что если $|A| > 2^\kappa$ и для каждого $\alpha \in A$ пространство X_α содержит хотя бы две точки, то $d\left(\prod X_\alpha\right) > \kappa$.

Теорема

Если семейство пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *таково, что для любого конечного множества индексов* $F \subset A$ *произведение* $\prod\limits_{\alpha \in F} X_\alpha$ *обладает свойством Суслина, то и всё произведение* $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ *обладает этим свойством.*

Следствие

Любое произведение сепарабельных пространств обладает свойством Суслина.

Доказательство. Достаточно заметить, что сепарабельность конечно мультипликативна, и всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина. □

Отображения топологических пространств в произведения

Предложение

Отображение $f\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *непрерывно тогда и только тогда, когда композиция* $\pi_\alpha \circ f$ *непрерывна для каждого* $\alpha \in A$.

Доказательство. Доказательства требует только непрерывность f в предположении непрерывности всех композиций $\pi_\alpha \circ f$. Рассмотрим предбазу

$$\mathscr{B} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A,\ U \text{ открыто в } X_\alpha\}$$

топологии произведения $\prod X_\alpha$. Для каждого $\alpha \in A$ имеем $f^{-1}\big(\pi_\alpha^{-1}(U)\big) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(U)$, а это множество открыто в силу непрерывности отображения $\pi_\alpha \circ f$. ☐

Теорема

Декартово произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ *любого семейства непрерывных отображений* $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, *непрерывно.*

Доказательство. Для каждого $\beta \in A$ обозначим каноническую проекцию произведения $\prod X_\alpha$ на X_β через π^X_β, а каноническую проекцию произведения $\prod Y_\alpha$ на Y_β — через π^Y_β. Очевидно, для всех $\beta \in A$ имеем

$$\pi^Y_\beta \circ \textstyle\prod_{\alpha\in A} f_\alpha = f_\beta \circ \pi^X_\beta,$$

а отображения $f_\beta \circ \pi^X_\beta$ непрерывны как композиции непрерывных отображений. □

Теорема

Диагональное произведение $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ *любого семейства непрерывных отображений* $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, *одного и того же пространства* X *в пространства* Y_α, $\alpha \in A$, *непрерывно.*

Доказательство. Действительно, для каждого $\alpha \in A$ имеем $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$. □

Замечание

Для любого семейства отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, и любых множеств $X'_\alpha \subset X_\alpha$ и $Y'_\alpha \subset Y_\alpha$ имеем

$$\Big(\prod f_\alpha\Big)\Big(\prod X'_\alpha\Big) = \prod f_\alpha(X'_\alpha) \quad \text{и} \quad \Big(\prod f_\alpha\Big)^{-1}\Big(\prod Y'_\alpha\Big) = \prod f_\alpha^{-1}(Y'_\alpha),$$

$$\Big(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)(X') \subset \prod\nolimits_{\alpha\in A} f_\alpha(X') \quad \text{и} \quad \Big(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)^{-1}\Big(\prod\nolimits_{\alpha\in A} Y'_\alpha\Big) = \bigcap\nolimits_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}(Y'_\alpha).$$

Замечание

Для семейства отображений $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, диагональное произведение Δf_α есть композиция диагонального произведения $i = \Delta^A \operatorname{id}_X\colon X \to X^A$ $|A|$ экземпляров тождественного отображения $X \to X$ и декартова произведения $\prod f_\alpha\colon X^A \to \prod Y_\alpha$. Образ $\Delta = i(X) \subset X^A$ называется диагональю произведения X^A:

$$\Delta = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X^A : x_\alpha = x_\beta \text{ для любых } \alpha, \beta \in A\} =$$
$$= \bigcap_{\beta,\gamma\in A} \{x \in X^A : \pi_\beta(x) = \pi_\gamma(x)\}.$$

X хаусдорфово $\iff$ диагональ Δ замкнута в произведении X^A.

Вложения топологических пространств в произведения

Определение

Пусть X — множество и $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$. Семейство отображений $\mathscr{F} = \{f_\alpha \colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки множества X, если $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, найдётся $\alpha \in A$, для которого $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Если при этом X и все X_α — топологические пространства и для каждой точки $x \in X$ и любого замкнутого $F \subset X$, $F \not\ni x$, существует $\alpha \in A$ такое, что $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}^{X_\alpha}$, то семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества в X.

$X \in T_0$, $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества $\implies$ $\mathscr{F}$ разделяет точки.

Теорема о диагональном произведении

Если семейство непрерывных отображений $\mathscr{F} = \{f_\alpha \colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ *разделяет точки* X, *то* $f = \Delta\, f_\alpha \colon X \to \prod Y_\alpha$ *инъективно. Если, сверх того, семейство* $\mathscr{F}$ *разделяет точки и замкнутые множества, то* f *— гомеоморфное вложение.*

В частности, если существует $\alpha \in A$, *для которого* f_α *— гомеоморфное вложение, то* f *— тоже гомеоморфное вложение.*

Лемма

Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств инъективно и одноэлементное семейство $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества, то f — гомеоморфное вложение.

Доказательство. Нам нужно доказать, что подотображение отображения f с областью значений $f(X)$, т.е. отображение $\check{f}\colon X \to f(X)$, определённое правилом $\check{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, является гомеоморфизмом. Поскольку отображение $\check{f}$ непрерывно и взаимно однозначно по предположению, достаточно проверить, что оно замкнуто, или, другими словами, что для каждого замкнутого множества $F \subset X$

$$\check{f}(F) = \overline{\check{f}(F)}^{f(X)}, \qquad \text{т.е.} \qquad f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}^{Y}. \tag{$\star$}$$

Пусть F — замкнутое множество в X. Если $y = f(x) \in f(X) \setminus f(F)$, то $x \notin F$ и $y = f(x) \notin \overline{f(F)}^{Y}$, поскольку $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Следовательно, правая часть равенства $(\star)$ содержится в левой. Обратное включение очевидно. □

Доказательство теоремы. Если семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки, то для каждой пары различных точек $x, y \in X$ существует такое $f_\alpha \in \mathscr{F}$, что $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Таким образом, $f(x) \neq f(y)$, а это и означает, что f инъективно.

Если семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то семейство $\{f\}$ тоже обладает этим свойством, так как если $f(x) \in \overline{f(F)}$ для некоторого $F \subset X$, то

$$f_\alpha(x) = \pi_\alpha(f(x)) \in \pi_\alpha(\overline{f(F)}) \subset \overline{\pi_\alpha(f(F))} = \overline{f_\alpha(F)}$$

для каждого $\alpha \in A$. Осталось применить лемму. ☐

Следствие

Диагональ любой степени X^A топологического пространства X гомеоморфна этому пространству.

Определение

Тихоновским кубом называется топологическое произведение вида $[0,1]^\kappa$, где κ — любой бесконечный кардинал. Тихоновский куб $[0,1]^{\aleph_0}$ называется также гильбертовым кубом.

Теорема Тихонова о вложении

Всякое тихоновское пространство веса $\kappa \geqslant \aleph_0$ *вкладывается в тихоновский куб* $[0,1]^\kappa$.

Доказательство. Пусть X — тихоновское пространство и $w(X) = \kappa \geqslant \aleph_0$. Поскольку $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, семейство всех дополнений до прообразов 1 при непрерывных функциях $X \to [0,1]$) составляет базу пространства X, и поскольку $w(X) = \kappa$, из этой базы можно выделить базу $\mathscr{B}$ мощности κ. Пусть $\mathscr{B} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, где $|A| = \kappa$. Для каждого $\alpha \in A$ возьмём непрерывную функцию $f_\alpha \colon X \to [0,1]$, для которой $U_\alpha = f_\alpha^{-1}\big([0,1)\big)$.

Семейство $\mathscr{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки и замкнутые множества: если $x \in X$ и $F \subset X$ — не содержащее точку x замкнутое множество, то найдётся окрестность $U_\alpha \in \mathscr{B}$ этой точки, не пересекающая F. Соответствующая функция f_α переводит F в 0, причём $f_\alpha(x) \neq 0$, поскольку $f_\alpha(U_\alpha) \subset [0,1)$ и $x \in U_\alpha$. Значит, $f(x) \notin \overline{f(F)}$.

Поскольку $X \in T_1$, $\mathscr{F}$ разделяет точки. По теореме о диагональном произведении $\Delta\, f_\alpha \colon X \to [0,1]^A = [0,1]^\kappa$ — гомеоморфное вложение. ☐

Замечание

Вес тихоновского куба $[0,1]^\varkappa$ равен $\varkappa$. Действительно, из того, что $w([0,1]) = \aleph_0$, немедленно вытекает, что каноническая предбаза, а значит, и каноническая база произведения $[0,1]^\varkappa$ имеет мощность $\varkappa$. Значит, вес $[0,1]^\varkappa$ не больше $\varkappa$. Но он не может быть и меньше $\varkappa$ — ведь мы только что доказали, что любое тихоновское пространство веса $\varkappa$ (в частности, дискретное пространство мощности $\varkappa$) вкладывается в $[0,1]^\varkappa$, а вес подпространства не может быть больше веса самого пространства. Следовательно, $w([0,1]^\varkappa) = \varkappa$, и теорему о вложении в тихоновский куб можно сформулировать так: любое бесконечное тихоновское пространство вкладывается в тихоновский куб того же веса.

Помимо тихоновского и гильбертова куба бывает ещё гильбертов кирпич — это подпространство $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}\left[0, \frac{1}{2^k}\right]$ гильбертова пространства $\ell^2 = \left\{\mathrm{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty\right\}$ (скалярное произведение в нём определено правилом $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n$). Скалярное произведение стандартным образом порождает норму, а норма — метрику на $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}\left[0, \frac{1}{2^k}\right]$; легко проверить, что эта метрика порождает топологию тихоновского произведения. Так как все отрезки $\left[0, \frac{1}{2^k}\right]$ гомеоморфны друг другу и отрезку $[0, 1]$, заключаем, что гильбертов кирпич с метрической топологией гомеоморфен гильбертову кубу $[0, 1]^{\aleph_0}$.

Из этих рассуждений следует, что куб $[0, 1]^{\aleph_0}$ метризуем.

Метризационная теорема Урысона

Топологическое пространство со счётной базой метризуемо тогда и только тогда, когда оно регулярно.

Обратные спектры и проективные пределы

Конструкция предела обратного спектра родственна конструкции предела прямого спектра, только все отображения в обратных спектрах направлены в обратную сторону, и вместо факторпространства суммы в определении предела фигурирует подпространство произведения.

Пусть $(A, \leqslant)$ — направленное множество и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство топологических пространств. Предположим, что для любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leqslant \beta$, определены непрерывные отображения $\pi_\alpha^\beta \colon X_\beta \to X_\alpha$ с такими свойствами:

- $\pi_\alpha^\alpha = \mathrm{id}_{X_\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha$ — тождественное отображение для любого α;
- $\pi_\alpha^\gamma = \pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta^\gamma$ для любых $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Такие отображения π_α^β называются проекциями, а семейство пространств и отображений $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta : \alpha, \beta \in A, \alpha \leqslant \beta\}$ называется обратным спектром над A. Проективным, или обратным, пределом этого семейства, или пределом обратного спектра, называется подпространство произведения

$$\varprojlim X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : \pi_\beta^\gamma(x_\gamma) = x_\beta \text{ для любых } \beta, \gamma \in A,\ \beta \leqslant \gamma\} \subset \prod X_\alpha.$$

Предложение

Предел обратного спектра $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta : \alpha, \beta \in A, \alpha \leqslant \beta\}$ *хаусдорфовых пространств есть замкнутое подпространство произведения* $\prod X_\alpha$.

Доказательство. Для $\alpha \leqslant \beta$ положим $S_{\alpha\beta} = \left\{(x_\gamma)_{\gamma \in A} \in \prod\limits_{\gamma \in A} X_\gamma : \pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha\right\}$.

Каждое множество $S_{\alpha\beta}$ замкнуто, так как оно состоит из точек совпадения непрерывных отображений $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta \colon \prod\limits_{\gamma \in A} X_\gamma \to X_\alpha$ и $\pi_\alpha \colon \prod\limits_{\gamma \in A} X_\gamma \to X_\alpha$ (здесь π_β и π_α — канонические проекции произведения на сомножители) и все пространства X_α хаусдорфовы. Значит, пересечение $\varprojlim X_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$ тоже замкнуто. ☐

Пусть A — бесконечное множество и X_α, $\alpha \in A$, — любые пространства. Семейство $\mathscr{F}$ всех конечных подмножеств A направлено отношением $\subset$. Для каждого $F \in \mathscr{F}$ положим $X_F = \prod\limits_{\alpha \in F} X_\alpha$. Для любых $F, G \in \mathscr{F}$, $F \subset G$, определено отображение $\pi_F^G \colon X_G \to X_F$ сужения элементов произведения X_G (которые, напомним, суть отображения $G \to \bigcup\limits_{\alpha \in G} X_\alpha$) на $F \subset G$, причём это отображение непрерывно. Мы получили обратный спектр $\{X_F, \pi_F^G : F, G \in \mathscr{F}, F \subset G\}$. Для каждого $\alpha \in A$ положим $F_\alpha = \{\alpha\} \in \mathscr{F}$. Несложно показать, что отображение $\lim_{\longleftarrow} X_F \to \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, определённое правилом $(x_F)_{F \in \mathscr{F}} \mapsto (x_{F_\alpha})_{\alpha \in A} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, — гомеоморфизм. Следовательно, применяя операцию перехода к пределу обратного спектра, можно выражать бесконечные произведения через конечные.

Гиперпространства

Для любого пространства X определено тихоновское произведение 2^X (где 2 понимается в обычном смысле — как дискретное пространство $\{0,1\}$). Однако топология произведения на 2^X зависит только от мощности пространства X и совершенно никак не связана с его топологией. Поэтому экспоненту снабжают не топологией тихоновского произведения, а специальной топологией, которая называется экспоненциальной топологией, или топологией Вьеториса. Её предбазу составляют множества вида $\{Y \subset X : Y \subset U\}$ и $\{Y \subset X : Y \cap V \neq \varnothing\}$, где U и V — открытые подмножества X. Базу топологии Виеториса составляют множества вида $\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{F \subset X : F \subset U_1 \cup \dots \cup U_n, F \cap U_i \neq \varnothing$ для $i \leqslant n\}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $U_1, \dots, U_n$ — произвольные открытые подмножества X.

Пространство всех подмножеств X с топологией Вьеториса редко бывает хаусдорфовым, поэтому обычно вместо семейства всех подмножеств пространства X рассматривают семейство $\mathrm{Cl}(X)$ всех его непустых замкнутых подмножеств. Это семейство, снабжённое топологией Вьеториса, называется экспоненциальным пространством пространства X и обозначается $\exp X$. Часто используют и обозначение 2^X.

Топология Вьеториса обладает тем замечательным свойством, что естественное отображение $i\colon X \to \mathrm{Cl}(X)$, определённое правилом $i(x) = \overline{\{x\}}$, является гомеоморфным вложением относительно этой топологии. На семействе $\mathrm{Cl}(X)$ могут существовать и другие топологии с этим свойством. Множество $\mathrm{Cl}(X)$, снабжённое любой такой топологией, называется гиперпространством над X. Таким образом, экспоненциальное пространство $\exp X$ — частный случай гиперпространства.

В связи с гиперпространствами естественно возникает понятие многозначного отображения $F\colon X \to Y$ — отображения, которое каждой точке множества X ставит в соответствие некоторое подмножество множества Y. Иными словами, многозначное отображение $X \to Y$ — это отображение $X \to \mathscr{P}(Y)$.

Пусть X и Y — топологические пространства. Многозначное отображение $F\colon X \to Y$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие замкнутое подмножество $F(x)$ пространства Y, называется полунепрерывным снизу (сверху), если для любого открытого множества $U \subset Y$ множество $\{x \in X : F(x) \cap U \neq \varnothing\}$ (множество $\{x \in X : F(x) \subset U\}$) открыто в X. Отображение $f\colon X \to \exp Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда многозначное отображение $F\colon X \to Y$, определённое правилом $F(x) = f(x)$, полунепрерывно снизу и сверху.

Если топология X определяется ограниченной метрикой d, то на пространстве $\exp X$ возникает метрика, определённая правилом

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, X)\right\}$$

для $A, B \in \exp X$. Эта метрика называется метрикой Хаусдорфа. Расстояние Хаусдорфа между A и B равно минимальному числу δ с тем свойством, что A содержится в замкнутой δ-окрестности множества B, а B содержится в замкнутой δ-окрестности множества A. Вообще говоря, топология, порождённая метрикой Хаусдорфа на $\exp X$, может отличаться от топологии Вьеториса, но если X компактно, то эти топологии совпадают.

Теорема Майкла о селекции

Пусть X *— паракомпактное пространство,* Y *— банахово пространство и* $F \colon X \to Y$ *— полунепрерывное снизу многозначное отображение такое, что для каждого* $x \in X$ $F(x)$ *— непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* Y*. Тогда существует непрерывная селекция многозначного отображения* F*, т.е. непрерывное отображение* $f \colon X \to Y$ *с тем свойством, что* $f(x) \in F(x)$ *для каждого* $x \in X$*.*

Компакты

Определение

Пусть X — произвольное множество и $Y \subset X$. Покрытие множества Y — это любое индексированное семейство $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств X, которое покрывает Y, т.е. удовлетворяет условию $\bigcup \mathscr{C} \supset Y$.

Если X — топологическое пространство и покрытие состоит из открытых (замкнутых, открыто-замкнутых) множеств, то его называют открытым (замкнутым, открыто-замкнутым) покрытием.

Пусть $\mathscr{C}'$ — ещё одно покрытие Y. Говорят, что $\mathscr{C}'$ вписано в $\mathscr{C}$, и пишут $\mathscr{C}' \leqslant \mathscr{C}$ или $\mathscr{C}' \prec \mathscr{C}$, если всякий элемент C' покрытия $\mathscr{C}'$ содержится в некотором $C \in \mathscr{C}$. Покрытие $\mathscr{C}'$ комбинаторно вписано в $\mathscr{C}$, или является ужатием покрытия $\mathscr{C}$, если оба покрытия заиндексированы элементами одного и того же множества A (т.е. $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\mathscr{C}' = \{C'_\alpha : \alpha \in A\}$) и $C'_\alpha \subset C_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Частный случай вписанного покрытия — подпокрытие: семейство $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ называется подпокрытием покрытия $\mathscr{C}$, если оно само является покрытием, т.е. $\bigcup \mathscr{C}' \supset Y$.

Как правило, мы будем рассматривать ситуации, когда $Y = X$.

Замечание

Иногда вместо покрытия множества X удобнее рассматривать двойственное семейство, состоящее из всех дополнений до элементов покрытия. Законы де Моргана $\implies$ семейство $\mathscr{C}$ подмножеств X является покрытием множества X тогда и только тогда, когда двойственное семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus C : C \in \mathscr{C}\}$ имеет пустое пересечение.

Определение

Топологическое пространство компактно, если любое его открытое покрытие содержит конечное открытое подпокрытие. Хаусдорфовы компактные пространства называются компактами.

Определение′

Топологическое пространство компактно, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

Предложение

Пусть X *— топологическое пространство и* $\mathscr{B}$ *— его база. Тогда* X *компактно* $\iff$ *любое открытое покрытие* X *элементами* $\mathscr{B}$ *содержит конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие X. $\forall x \in X$ выберем $U_{\alpha(x)} \in \mathscr{U}$, содержащий x, и зафиксируем $V_x \in \mathscr{B}$: $x \in V_x \subset U_{\alpha(x)}$. Семейство $\{V_x : x \in X\}$ — открытое покрытие X элементами $\mathscr{B}$. Пусть $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ — конечное подпокрытие. $V_{x_i} \subset U_{\alpha(x_i)} \implies$ $U_{\alpha(x_1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(x_n)} = X$. □

Теорема

Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве X сходится.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на X, который не сходится ни к одной точке $x \in X$. Тогда у любой точки $x \in X$ есть открытая окрестность U_x, не принадлежащая $\mathscr{U}$. Эти окрестности образуют открытое покрытие компактного пространства X; пусть $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ — его конечное подпокрытие. Имеем $U_{x_i} \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$, однако по построению $U_{x_i} \notin \mathscr{U}$ для всех i.

Достаточность. Если существует открытое покрытие $\mathscr{V}$ пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus V : V \in \mathscr{V}\}$ центрировано. Семейство $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. По условию $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке x. Пусть V — содержащий эту точку элемент покрытия $\mathscr{V}$. Тогда $V \in \mathscr{U}$, поскольку $\mathscr{U} \to x$, и $X \setminus V \in \mathscr{U}$ по определению семейства $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$. Противоречие. □

Теорема

Всякое компактное подпространство любого хаусдорфова пространства замкнуто.

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, $K \subset X$ — его компактное подмножество и $x \in \overline{K} \setminus K$. Имеем $\bigcap\{\overline{U} : U$ — окрестность $x\} = \{x\}$, и поскольку $x \notin K$, семейство

$$\mathscr{U} = \{X \setminus \overline{U} : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

представляет собой открытое покрытие компакта K. Пусть $\{X \setminus \overline{U}_1, \dots, X \setminus \overline{U}_n\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда множество $U_1 \cap \dots \cap U_n$ — окрестность точки x, не пересекающая K, в противоречие с условием $x \in \overline{K}$. □

Теорема

Любое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.

Доказательство. Пусть K — компактное пространство и $X \subset K$ — его замкнутое подпространство. Рассмотрим любое центрированное семейство $\mathscr{F}$ замкнутых подмножеств пространства X. Поскольку X замкнуто в K, $\mathscr{F}$ является также и центрированным семейством замкнутых подмножеств K, так что $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$. □

Теорема

Любое бесконечное множество в компактном пространстве X имеет точку накопления.

Доказательство. Пусть $A \subset X$ не имеет точек накопления. Тогда у любой точки $x \in \overline{A}$ найдётся открытая окрестность U_x в X, пересечение которой с A конечно. $\overline{A}$ компактно, и семейство $\{U_x \cap \overline{A} : x \in \overline{A}\}$ является его открытым покрытием. Выделим из него конечное подпокрытие $\{U_{x_1} \cap \overline{A}, \dots, U_{x_k} \cap \overline{A}\}$. Из того, что $U_{x_1} \cap \overline{A} \cup \dots \cup U_{x_k} \cap \overline{A} = \overline{A}$ и все множества $U_{x_i} \cap \overline{A}$ конечны, вытекает, что множество $\overline{A}$ (а значит, и A) конечно. □

Следствие

Компактное пространство не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств.

Доказательство. Из теоремы следует, что любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет предельную точку. Множество Y в топологическом пространстве X замкнуто и дискретно $\iff$ Y не имеет предельных точек в X. □

Теорема

Всякий непрерывный образ компактного пространства K компактен.

Доказательство. Пусть $f\colon K \xrightarrow{\text{на}} X$ непрерывно, $\mathscr{U}$ — открытое покрытие X. Тогда $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ — открытое покрытие K. Оно содержит конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$, и $\{U_1, \dots, U_n\}$ — подпокрытие $\mathscr{U}$. □

Следствие

Всякое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто и, следовательно, факторно.

Доказательство. Пусть $f\colon K \to X$ — непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово. Любое замкнутое множество $F \subset K$ компактно, и $f(F)$ компактно и, значит, замкнуто в X. □

Следствие

Любая непрерывная биекция из компактного пространства в любое хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

Теорема

Любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.

Доказательство. Если $f \colon X \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция, то $\{f^{-1}\big((-n, n)\big) : n \in \mathbb{N}\}$ — открытое покрытие X, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. □

Предложение

Во всяком хаусдорфовом пространстве любые точка и не содержащее её компактное множество имеют непересекающиеся окрестности.

Доказательство. Пусть $X \in T_2$, $K \subset X$ компактно и $x \in X \setminus K$. $\forall y \in K$ зафиксируем открытые $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$, $U_y \cap V_y = \varnothing$. Пусть $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$ — подпокрытие открытого покрытия $\{U_y : y \in K\}$ компакта K. Ясно, что $U = \bigcup\limits_{i \leqslant n} U_{y_i}$ — окрестность K, $V = \bigcap\limits_{i \leqslant n} V_{y_i}$ — окрестность x и $U \cap V = \varnothing$. ☐

Предложение

Во всяком T_3-пространстве любые два непересекающихся множества, одно из которых компактно, а другое замкнуто, имеют непересекающиеся окрестности.

Доказательство. Пусть $X \in T_3$, $K \subset X$ компактно, $F \subset X$ замкнуто и $K \cap F = \varnothing$. $\forall x \in K$ зафиксируем открытые $U_x \ni x$ и $V_x \supset F$, $U_x \cap V_x = \varnothing$. Пусть $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ — подпокрытие открытого покрытия $\{U_x : x \in K\}$ множества K. Тогда $U = \bigcup\limits_{i \leqslant n} U_{x_i}$ — окрестность K, $V = \bigcap\limits_{i \leqslant n} V_{x_i}$ — окрестность F и $U \cap V = \varnothing$. ☐

Теорема

Всякий компакт нормален.

Предложение

Во всяком $T_{3\frac{1}{2}}$-пространстве X для любых непересекающихся компактного множества K и замкнутого множества F существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, тождественно равная 0 на K и 1 на F.

Доказательство. Для каждой точки $x \in K$ возьмём непрерывную функцию $f_x\colon X \to [0,1]$, принимающую значение 0 в точке x и тождественно равную 1 на F, и положим $U_x = f_x^{-1}\big([0,\frac{1}{2})\big)$. Из открытого покрытия $\{U_x : x \in K\}$ компактного множества K выделим конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Функция $g = \min(f_1, \ldots, f_n)$, определённая правилом $g(x) = \min\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, непрерывна, причём $g(K) \subset [0, \frac{1}{2})$ и $g(F) \subset \{1\}$. Осталось положить $f(x) = \max\big\{2\big(g(x) - \frac{1}{2}\big), 0\big\}$ для всех $x \in X$. □

Теорема Тихонова о компактности произведений

Топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *непустых пространств компактно тогда и только тогда, когда все* X_α *компактны.*

Доказательство. *Необходимость* $\Longleftarrow$ непрерывность всех $\pi_\beta \colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$.

Достаточность. Пусть все X_α компактны и $\mathscr{U}$ — любой ультрафильтр на $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Нужно показать: $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке x. Для каждого $\alpha \in A$ положим $\mathscr{U}_\alpha = \{Y \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(Y) \in \mathscr{U}\}$. Это ультрафильтр на X_α, и поскольку X_α компактно, $\mathscr{U}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$. Положим $\mathrm{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Пусть U — любая окрестность точки x в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Она содержит каноническую окрестность $\prod\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$. Пусть $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Для каждого $i \leqslant n$ $\mathscr{U}_{\alpha_i} \to x_{\alpha_i}$, поэтому $V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}_{\alpha_i}$ и $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathscr{U}$. Определение фильтров $\Longrightarrow$ $\prod\limits_{\alpha\in A} V_\alpha = \bigcap\limits_{i\leqslant n} \pi_{\alpha_i}^{-1} V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}$ и $U \in \mathscr{U}$. □

Произведение любого семейства хаусдорфовых пространств хаусдорфово, поэтому из теоремы Тихонова немедленно вытекает такое утверждение (его называют также *хаусдорфовой версией теоремы Тихонова*):

Следствие

Произведение любого семейства компактов является компактом.

Следствие

Пусть X — $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство и K — его компактное подмножество. Тогда

1. *у любой непрерывной функции $f: K \to [-1, 1]$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}: X \to [-1, 1]$;*
2. *у любой непрерывной функции $f: K \to \mathbb{R}$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}: X \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Теоремы Тихонова $\implies$ $X \subset [0, 1]^{\kappa}$, где $\kappa = w(x)$, и $[0, 1]^{\kappa}$ компактно, а значит, и нормально. Поскольку $K \subset X \subset [0, 1]^{\kappa}$ и любой компакт замкнут в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве, мы можем применить теорему Титце–Урысона. ☐

Теорема Бэра о категории

В любом компакте X *пересечение* $G = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i$ *любой последовательности* $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *всюду плотных открытых множеств всюду плотно.*

Доказательство. Возьмём непустое $U \subset X$. G_1 открыто и плотно $\implies$ существует открытое $U_1 \neq \varnothing$ такое, что $\overline{U}_1 \subset U \cap G_1$. Аналогично существует открытое $U_2 \neq \varnothing$ такое, что $\overline{U}_2 \subset U_1 \cap G_2$, и т.д. В результате мы получим последовательность $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ непустых отрытых множеств с тем свойством, что $\overline{U}_{n+1} \subset U_n \cap G_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, семейство $\{\overline{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ центрировано. X компактно $\implies$ $\bigcap \overline{U}_n \neq \varnothing$. По построению $\bigcap \overline{U}_n \subset U \cap G$. U произвольно $\implies$ множество G всюду плотно. □

Двойственная формулировка:

В любом компакте дополнение до объединения любой последовательности нигде не плотных множеств всюду плотно.

Определение

Множества первой категории (тощие множества) — это те множества, которые можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств; все прочие множества называются множествами второй категории (тучными). Пространства, которые являются тощими (тучными) множествами в себе, называют пространствами первой (второй) категории. О пространстве, в котором всякое тощее множество имеет пустую внутренность, говорят, что оно обладает свойством Бэра.

Любое пространство со свойством Бэра является пространством второй категории, но не наоборот: пример — подпространство $\mathbb{Q} \cup [0, 1]$ вещественной прямой.

В этой терминологии теорема Бэра звучит так:

Всякий компакт обладает свойством Бэра.

Теорема Вейерштрасса–Стоуна

Мы будем рассматривать множества $C(X)$ и $C_{\mathrm{b}}(X)$ всех и всех ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве X. Это векторные пространства над полем вещественных чисел относительно поточечных операций сложения и умножения на число ($(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$), поэтому можно говорить о нормах на $C(X)$ и $C_{\mathrm{b}}(X)$. Для компактных X имеем $C(X) = C_{\mathrm{b}}(X)$.

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $C_{\mathrm{b}}(X)$ — множество всех ограниченных непрерывных функций на X. Формула $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ определяет норму на векторном пространстве $C_{\mathrm{b}}(X)$, которая называется sup-нормой. Топология, которая порождается соответствующей этой норме метрикой $d(f,g) = \|f-g\|$, называется топологией равномерной сходимости. Последовательность функций на X, которая сходится в этой топологии, называется равномерно сходящейся.

Лемма

Существует последовательность $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ многочленов с вещественными коэффициентами, равномерно сходящаяся к функции $\sqrt{x}$ на отрезке $[0,1]$.

Многочлены p_n можно определить, например, рекурсивными формулами $p_1(x) = 0$ и $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x))$ для $n = 2, 3, \ldots$ и $x \in X$.
Для любых ограниченных непрерывных функций f и g на топологическом пространстве X функции $f+g$, $f \cdot g$ и $-f$ тоже ограничены и непрерывны, поэтому любое кольцо функций, порождённое ограниченными непрерывными функциями, целиком состоит из ограниченных непрерывных функций. Кроме того, поскольку пространство $C_{\mathrm{b}}(X)$ с топологией равномерной сходимости метризуемо, замкнутость кольца $R \subset C_{\mathrm{b}}(X)$ в топологии равномерной сходимости означает, что предел любой равномерно сходящейся последовательности функций из R принадлежит R.

Лемма

Пусть кольцо R ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве X содержит все постоянные функции и замкнуто в топологии равномерной сходимости. Тогда для любых $f, g \in R$ функции $\min(f, g)$ *и* $\max(f, g)$ *принадлежат R.*

Доказательство. Поскольку

$$\min(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|) \quad \text{и} \quad \max(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

достаточно показать, что если $f \in R$, то $|f| \in R$. Возьмём любую функцию и число $M > 0$, для которого $|f(x)| \leqslant M$ при всех $x \in X$. Имеем $\left|\frac{1}{M} f(x)\right| \leqslant 1$ для всех $x \in X$ и $\left|\frac{1}{M} f\right| \in R \iff |f| \in R$, потому что $\left|\frac{1}{M} f\right| = \frac{1}{M}|f|$ и постоянная функция, принимающая значение $\frac{1}{M}$, принадлежит R по условию. Итак, достаточно проверить, что если $f \in R$ и $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in X$, то $|f| \in R$. По первой лемме функция $|f| = \sqrt{f^2}$ является пределом равномерно сходящейся последовательности функций из R, а именно, функций $f_n(x) = p_n\big(f(x)^2\big)$. □

Теорема Вейерштрасса–Стоуна

Если кольцо R непрерывных функций на компакте X содержит все постоянные функции, разделяет точки и замкнуто в $C(X) = C_{\mathrm{b}}(X)$ относительно топологии равномерной сходимости, то $R = C(X)$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что к любой функции f из $C(X)$ равномерно сходится последовательность функций из R. Для $\varepsilon > 0$ построим функции $f_\varepsilon \in R$ с тем свойством, что $f(x) - \varepsilon < f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon$ для всех $x \in X$ — тогда последовательность $\left(f_{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ будет равномерно сходиться к f.

Для каждой пары точек $a, b \in X$, $a \neq b$, выберем $h_{a,b} \in R$ со свойством $h_{a,b}(a) \neq h_{a,b}(b)$. Для $x \in X$ положим

$$g_{a,b}(x) = \frac{h_{a,b}(x) - h_{a,b}(a)}{h_{a,b}(b) - h_{a,b}(a)} \qquad f_{a,b}(x) = (f(b) - f(a))g_{a,b}(x) + f(a).$$

Имеем $f_{a,b} \in R$, $f_{a,b}(a) = f(a)$ и $f_{a,b}(b) = f(b)$.

Множества $U_{a,b} = \{x : f_{a,b}(x) < f(x) + \varepsilon\}$ и $V_{a,b} = \{x : f_{a,b}(x) > f(x) - \varepsilon\}$ — открытые окрестности обеих точек a и b. Зафиксируем b.

Семейство $\{U_{a,b} : a \in X\}$ — открытое покрытие компакта X. Пусть $\{U_{a_i,b} : i = 1, \ldots, n\}$ — его конечное подпокрытие. В силу второй леммы функция $f_b = \min(f_{a_1,b}, \ldots, f_{a_n,b})$ принадлежит R; очевидно, $f_b(x) < f(x) + \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $f_b(x) > f(x) - \varepsilon$ при $x \in V_b = V_{a_1,b} \cap \cdots \cap V_{a_n,b}$.

Семейство $\{V_b : b \in X\}$ — открытое покрытие X. Пусть $\{V_{b_i} : i = 1, \ldots, k\}$ — его конечное подпокрытие. Положим $f_\varepsilon = \max(f_{b_1}, \ldots, f_{b_k})$. По построению $f(x) - \varepsilon < f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon$ для всех $x \in X$, и $f_\varepsilon \in R$ по второй лемме. □

Следствие

Если $A \subset \mathbb{R}$ плотно в $\mathbb{R}$, K — компакт и $R \subset C(K)$ — кольцо непрерывных функций на K, разделяющее точки K и содержащее все постоянные функции со значениями в A, то к любой непрерывной функции на K равномерно сходится последовательность функций из R. В частности, к любой непрерывной функции на отрезке равномерно сходится последовательность многочленов с рациональными коэффициентами.

Доказательство. A плотно в $\mathbb{R} \implies$ к каждой постоянной функции на K равномерно сходится последовательность постоянных функций со значениями в A. $\implies$ замыкание $\overline{R}$ кольца R в $C(K)$ с топологией равномерной сходимости содержит все постоянные функции. Кроме того, $\overline{R}$ — кольцо: $C(K)$ метризуемо $\implies \forall f, g \in \overline{R}\ \ \exists\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $f_n, g_n \in R$ для $n \in \mathbb{N}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightrightarrows g$ и $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightrightarrows f$. Ясно, что $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightrightarrows f + g$, $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightrightarrows f \cdot g$ и $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightrightarrows -f$. Значит, $f + g, f \cdot g, -f \in \overline{R}$, так что $\overline{R}$ — кольцо. Кольцо $\overline{R}$ разделяет точки компакта K, потому что $\overline{R} \supset R$, а R обладает этим свойством. По теореме Вейерштрасса–Стоуна $\overline{R} = C(K)$, а это и означает, что к любой непрерывной функции на K равномерно сходится последовательность функций из $\mathbb{R}$. □

Примеры

- Всякое конечное пространство компактно.
- Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- Канторово множество C — подмножество отрезка $[0, 1]$, которое получается по индукции удалением средних третей (без концов) из всех имеющихся на данном шаге индуктивного построения отрезков.

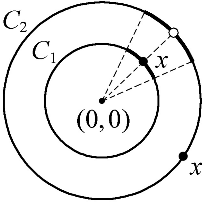
  Канторово множество — совершенное (т.е. замкнутое и не содержащее изолированных точек) нигде не плотное подмножество прямой; оно гомеоморфно счётной степени двухточечного дискретного пространства $\{0, 1\}$; всякий метризуемый компакт является его непрерывным образом; оно является универсальным пространством для класса $\mathscr{K}$ пространств, обладающих счётной базой из открыто-замкнутых множеств (т.е. $C \in \mathscr{K}$ и любое пространство из $\mathscr{K}$ гомеоморфно вкладывается в C).
- Для $n \in \mathbb{N}$ множество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда X замкнуто и ограничено относительно евклидовой метрики d_n, т.е. содержится в шаре $B_d(0, R)$ для некоторого $R > 0$.

- Пусть κ — любой кардинал, D — множество мощности κ и $\star$ — точка, не принадлежащая D. Положим $A(\kappa) = D \cup \{\star\}$. Снабдим $A(\kappa)$ топологией, в которой все точки множества D изолированы, а окрестностями точки $\star$ служат дополнения до конечных подмножеств D, т.е. всевозможные множества вида $\{\star\} \cup D \setminus F$, где F — конечное подмножество D. Компактность пространства $A(\kappa)$ очевидна. Пространство $A(\alpha_0)$ гомеоморфно обычной сходящейся последовательности $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Пространство $A(\kappa)$ для произвольного кардинала κ иногда называют суперпоследовательностью Александрова. Для любого бесконечного κ имеем $w(A(\kappa)) = \chi(A(\kappa)) = d(A(\kappa)) = c(A(\kappa)) = \kappa$.
- Из компактности отрезка по теореме Тихонова следует компактность любого тихоновского куба I^κ, в частности, гильбертова куба (равно как и кирпича), а также любого замкнутого подпространства I^κ. Как и $A(\kappa)$, I^κ — пример компакта веса и характера κ, однако куб I^κ обладает свойством Суслина для любого κ, а для $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$ он ещё и сепарабелен.

- Удвоение по Александрову

Рассмотрим две окружности $C_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = i\}$, $i = 1, 2$. Положим $X = C_1 \cup C_2$. Пусть $p\colon C_1 \to C_2$ — отображение проектирования окружности C_1 на окружность C_2 из точки $(0,0)$. Мы определим топологию на X с помощью системы окрестностей $\{\mathscr{B}(x) : x \in X\}$.

Для $x \in C_1$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $V_n(x)$ дугу окружности C_1 длины $\frac{1}{n}$ с серединой в точке x и положим $U_n(x) = V_n(x) \cup p(V_n(x) \setminus \{x\})$. Множества вида $U_n(x)$ составляют базу окрестностей точек x из C_1, а все точки из C_2 изолированы: для $x \in C_1$ $\mathscr{B}(x) = \{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, а для $x \in C_2$ $\mathscr{B}(x) = \{\{x\}\}$.



Легко проверить, что $\{\mathscr{B}(x) : x \in X\}$ — система открытых окрестностей и $X \in T_2$.

Топологическое пространство X называется двойной окружностью Александрова. Подпространство $C_1 \subset X$ — это окружность с обычной (индуцированной из евклидовой плоскости) топологией. Подпространство $C_2 \subset X$ является дискретным подпространством X мощности $2^{\aleph_0}$; оно открыто и плотно в X.

Покажем, что пространство X компактно. Пусть $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — какое-нибудь открытое покрытие пространства X. Без ограничения общности можно считать, что множества U_α являются элементами определённой выше системы окрестностей. Поскольку подпространство C_1 (обычная окружность) компактно, найдётся конечное множество индексов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset A$, для которого

$$C_1 \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}.$$

Если мы отбросим одноточечные U_{α_i} (базисные окрестности точек из C_2), включение будет по-прежнему выполняться. Значит, можно считать, что $U_{\alpha_i} = U_{n_i}(x_i)$, где $n_i \in \mathbb{N}$ и $x_i \in C_1$, для всех $i \leqslant k$. По определению окрестностей $U_{n_i}(x_i)$ имеем

$$X \setminus \{p(x_1), \ldots, p(x_k)\} \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}.$$

Для каждого $i \leqslant k$ выберем элемент покрытия $U_{\beta_i} \in \mathscr{U}$, содержащий точку $p(x_i)$. Семейство $\{U_{\alpha_i} : i \leqslant k\} \cup \{U_{\beta_i} : i \leqslant k\}$ является конечным подпокрытием покрытия $\mathscr{U}$.

Очевидно, двойная окружность Александрова удовлетворяет первой аксиоме счётности, но не удовлетворяет второй — она не сепарабельна (и даже не удовлетворяет условию Суслина), поскольку содержит открытое дискретное подпространство C_2.

- Важнейший пример: пространство $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией.

  Пусть $\mathscr{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ — открытое покрытие пространства W_1. Рассмотрим множество A всех $\alpha \leqslant \omega_1$, для которых замкнутый интервал $[0, \alpha]$ содержится в объединении конечного числа элементов покрытия $\mathscr{U}$. Надо показать, что $W_1 \setminus A = \varnothing$. Предположим, что $W_1 \setminus A \neq \varnothing$ и обозначим через α_0 наименьший элемент этого множества. Существует $\iota_0 \in I$, для которого $\alpha_0 \in U_{\iota_0}$. Ясно, что $0 < \alpha_0$. Значит, найдётся $\beta < \alpha_0$, для которого $(\beta, \alpha_0] \subset U_{\iota_0}$. По определению ординала α_0 имеем $\beta \in A$, а по определению множества A $[0, \beta] \subset U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_k}$ для некоторых $\iota_1, \dots, \iota_k \in I$. Следовательно, $[0, \alpha_0] \subset U_{\iota_0} \cup U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_k}$ в противоречие с определением α_0.

Рассмотрим теперь подпространство $W_1^0 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ пространства W_1. Оно не компактно, но всякое бесконечное множество $A \subset W_1^0$ имеет предельную точку в W_1^0, т.е. все замкнутые дискретные множества в W_1^0 конечны.

Кроме того, всякая непрерывная функция на W_1^0 ограничена. Действительно, предположим, что $f \colon W_1^0 \to \mathbb{R}$ — непрерывная неограниченная функция, т.е. f принимает сколь угодно большие положительные или сколь угодно малые отрицательные значения. Пусть для определённости f принимает сколь угодно большие значения. Определим по индукции множество $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ в $f(W_1^0)$ следующим образом: возьмём любое число $x_1 \in f(W_1^0)$; считая, что x_n уже определено, выберем в $f(W_1^0)$ точку $x_{n+1} > x_n + 2$.

В прообразе $f^{-1}(x_n)$ каждой точки $x_n \in X$ выберем точку α_n и положим $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset W_1^0$; ясно, что множество A бесконечно. Всякая точка $\alpha \in W_1^0$ имеет открытую окрестность $f^{-1}\big((f(\alpha) - 1, f(\alpha) + 1)\big)$, которая содержит не более одной точки из A. Следовательно, бесконечное множество $A \subset W_1^0$ не имеет точек накопления, а значит, и предельных точек в W_1^0, а таких множеств не существует. Отсюда вытекает, что и неограниченных непрерывных функций на W_1^0 не существует.

Компактность в классе метризуемых пространств

Теорема

Всякий метризуемый компакт удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Лемма

Если в метризуемом пространстве всякое замкнутое дискретное множество не более чем счётно, то это пространство обладает свойством Суслина.

Доказательство. Пусть X — пространство, топология которого порождается метрикой d, и $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — несчётное дизъюнктное семейство непустых открытых множеств в X. Каждое U_α содержит некоторый шар $B_d(x_\alpha, \frac{1}{n_\alpha})$, где $x_\alpha \in X$ и $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathscr{U}$ несчётно, а $\mathbb{N}$ счётно, найдутся $n \in \mathbb{N}$ и несчётное $A' \subset A$ такие, что $n_\alpha = n$ для всех $\alpha \in A'$. Окрестность $B_d(x, \frac{1}{n})$ любой точки $x \in X$ содержит не больше одного элемента множества $Y = \{x_\alpha : \alpha \in A'\}$, поскольку $x_\alpha \in B_d(x, \frac{1}{n}) \iff x \in B_d(x_\alpha, \frac{1}{n})$, причём $n = n_\alpha$ для $\alpha \in A'$ и семейство $\{B_d(x_\alpha, \frac{1}{n_\alpha}) : \alpha \in A'\}$ дизъюнктно. Следовательно, несчётное множество Y замкнуто и дискретно в противоречие с предположением. ☐

Доказательство теоремы. Достаточно показать, что любой метризуемый компакт обладает свойством Суслина, а это вытекает из доказанной леммы и того, что любое замкнутое дискретное множество в компактном пространстве само компактно и потому не может быть бесконечным, тем более, несчётным. □

Теорема

Для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:

1. *X компактно;*
2. *любая непрерывная функция на X ограничена;*
3. *любое бесконечное множество в X имеет предельную точку;*
4. *любая последовательность точек пространства X содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть X — метризуемое пространство, и пусть d — какая-нибудь метрика, порождающая его топологию. Мы будем доказывать теорему по схеме ①⇒②⇒③⇒④⇒③⇒①.

Импликация ①⇒② уже была доказана. Покажем, что ②⇒③. Пусть Y — бесконечное подмножество X без предельных точек. Тогда Y замкнуто и дискретно. Значит, всякое отображение из $Y \subset X$ в любое пространство непрерывно. Поскольку Y бесконечно, существует неограниченная функция $f\colon Y \to \mathbb{R}$. Пространство X нормально, будучи метризуемым. По теореме Титце–Урысона функция f продолжается до непрерывной функции $\hat{f}$ на X.

Докажем импликацию ③⇒④. Пусть $(x_n)_{\in\mathbb{N}}$ — любая последовательность точек X. Если множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ её значений конечно, то она содержит постоянную подпоследовательность, которая сходится. Пусть множество значений бесконечно и x — его предельная точка. 1-Окрестность x содержит бесконечно много точек x_n. Выберем какую-нибудь из них. Пусть это x_{k_1}. В $\frac{1}{2}$-окрестности точки x выберем точку x_{k_2} с номером $k_2 > k_1$. Продолжая в том же духе, мы получим подпоследовательность $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с тем свойством, что для каждого n $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Ясно, что $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Обратная импликация ④⇒③ очевидна — любое бесконечное множество содержит счётное множество, а точки счётного множества можно занумеровать натуральными числами, так что получится последовательность. Предел любой сходящейся подпоследовательности этой последовательности будет предельной точкой данного бесконечного множества.

Докажем, что ③⇒①. Пусть X удовлетворяет условию ③; это означает, что X не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств, а значит, обладает свойством Суслина и счётной базой. Пусть открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X не содержит конечного подпокрытия. Можно считать, что $\mathscr{U}$ состоит из элементов счётной базы и само счётно. Пусть $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $F_n = X \setminus U_n$; все F_n замкнуты. Множество F_1 непусто (иначе $\{U_1\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$); выберем в нём какую-нибудь точку x_1. Множество $F_1 \cap F_2$ тоже непусто (иначе $\{U_1, U_2\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$); выберем точку $x_2 \in F_1 \cap F_2$. Продолжая в том же духе, мы получим последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек X с тем свойством, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n содержит все x_k с номерами $k \geqslant n$. Поскольку X удовлетворяет условию ③, оно удовлетворяет и условию ④. Пусть x — предел подпоследовательности $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Возьмём любое $n \in \mathbb{N}$ и найдём $m \in \mathbb{N}$, для которого $k_m \geqslant n$. По построению все члены последовательности $(x_{k_{m+i}})_{i\in\mathbb{N}}$ принадлежат множеству F_n. Кроме того, $x_{k_{m+i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} x$. Значит, $x \in F_n$. Таким образом, $x \in \bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$; следовательно, $x \notin \bigcup\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, т.е. $\mathscr{U}$ — не покрытие. □

Скажем, что метрическое пространство (X, d) компактно, если топологическое пространство $(X, \mathscr{T}_d)$, где $\mathscr{T}_d$ — топология, порождённая метрикой d, компактно. Компактность метрических пространств можно охарактеризовать в терминах сугубо метрических — ε-сетей, последовательностей Коши и полноты.

Предложение

Метрическое пространство (X, d) вполне ограничено тогда и только тогда, когда всякая последовательность в X содержит подпоследовательность Коши.

Теорема

Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно.

Компактификации

Важнейшее следствие теорем Тихонова состоит в том, что всякое тихоновское пространство можно компактифицировать, т.е. вложить в некоторый компакт в качестве всюду плотного подпространства.

Определение

Пара (K, c), где K — компакт, а $c\colon X \to K$ — гомеоморфное вложение топологического пространства X в K такое, что $\overline{c(X)} = K$, называется компактификацией пространства X, или компактным хаусдорфовым расширением пространства X. Разность $K \setminus c(X)$ называется наростом расширения.

Теорема

Топологическое пространство X обладает компактификацией тогда и только тогда, когда X вполне регулярно.

Теорема

Каждое вполне регулярное пространство X имеет компактификацию (K, c) со свойством $w(K) = w(X)$.

В дальнейшем под компактификацией пространства X мы будем понимать не только пару (K, c), но и сам компакт K, содержащий (гомеоморфную копию) X в качестве плотного подпространства. Для компактификаций данного пространства X принято использовать обозначения, состоящие из двух символов: cX, bX, βX и т.п.; при этом второй символ — это обозначение самого́ пространства, а первый — обозначение его гомеоморфного вложения в соответствующую компактификацию. Так что запись cX не только обозначает некоторый компакт, но и подразумевает, что этот компакт содержит гомеоморфную копию пространства X, причём гомеоморфное вложение X в cX осуществляется отображением $c\colon X \to cX$ и $\overline{c(X)} = cX$.

Определение

Компактификации c_1X и c_2X считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon c_1X \to c_2X$ такой, что $c_2 = \varphi \circ c_1$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, hook, "c_1"'] \arrow[dr, hook, "c_2"] & \\
c_1X \arrow[rr, "\varphi"] & & c_2X
\end{tikzcd}$$

коммутативна (двигаясь по стрелкам c_1 и φ, мы получим тот же результат, что и двигаясь по стрелке c_2).

Таким образом, две компактификации пространства X эквивалентны, если они гомеоморфны и гомеоморфизм между ними устроен так, что X вложено в них одинаковым относительно этого гомеоморфизма образом.

Пример

Пусть $X = X_1 \oplus X_2$, где $X_1 = (0,1)$ и $X_2 = (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим компактификации c_1X и c_2X пространства X, представляющие собой сумму $S^1 \oplus [0,1]$ окружности и отрезка, в которую X вложено по-разному: $c_1|_{X_1}$ — это вложение $i\colon X_1 \to S^1$ интервала в окружность, определённое формулой $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ (считаем, что $X_1 = (0,1) \subset \mathbb{R}$ и S_1 — единичная окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$), и $c_1|_{X_2}$ — тождественное вложение X_2 в отрезок $[0,1]$, тогда как отображение c_2 тождественно вкладывает X_1 в $[0,1]$, а X_2 оно вкладывает в окружность отображением $i|_{(0,1)\cap\mathbb{Q}}$. Компактификации c_1X и c_2X гомеоморфны, но не эквивалентны, поскольку при любом гомеоморфизме суммы $S^1 \oplus [0,1]$ в себя окружность должна переходить в окружность, а отрезок — в отрезок. Это вытекает из того, что окружность и отрезок связны и не гомеоморфны.

Легко проверить, что эквивалентность компактификаций действительно является отношением эквивалентности на любом множестве компактификаций данного пространства X, но для этого надо выделить достаточно представительный набор компактификаций, который является множеством (а не целым классом множеств).

Поскольку X гомеоморфно (а значит, равномощно) плотному подпространству $c(X)$ любой своей компактификации cX, имеем $d(cX) \leqslant |X|$, а значит, $w(cX) \leqslant 2^{|cX|} \leqslant 2^{2^{2^{|X|}}}$. Таким образом, любая компактификация пространства X вкладывается в тихоновский куб $[0,1]^{2^{2^{2^{|X|}}}}$, так что достаточно рассматривать только компактификации, являющиеся подпространствами этого куба, а такие компактификации действительно образуют множество, и их эквивалентность в смысле данного выше определения действительно является отношением эквивалентности. Мы будем обозначать множество всех компактификаций $cX \subset [0,1]^{2^{2^{2^{|X|}}}}$ пространства X через $\mathscr{C}(X)$, а множество классов эквивалентности таких компактификаций — через $\mathfrak{C}(X)$.

Теперь упорядочим множество $\mathfrak{C}(X)$. Точнее, мы введём транзитивное отношение $\leqslant$ на множестве компактификаций $\mathscr{C}(X)$ и докажем, что $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$ тогда и только тогда, когда компактификации c_1X и c_2X эквивалентны, а это означает, что формула $[c_1X] \preccurlyeq [c_2X] \iff c_1X \leqslant c_2X$ корректно определяет отношение $\preccurlyeq$ на $\mathfrak{C}(X)$ и это отношение рефлексивно и антисимметрично, т.е. является порядком.

Определение

Пусть c_1X и c_2X — две компактификации одного и того же пространства X. Положим $c_1X \leqslant c_2X$, если существует непрерывное отображение $f\colon c_2X \to c_1X$ такое, что $f \circ c_2 = c_1$:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, hook', "c_2"'] \arrow[dr, hook, "c_1"] & \\
c_2X \arrow[rr, "f"] & & c_1X\,.
\end{tikzcd}$$

В случае, когда вложения c_1 и c_2 тождественны, неравенство $c_1X \leqslant c_2X$ означает, что существует непрерывное отображение $f\colon c_2X \to c_1X$, которое переводит каждую точку x в себя. Отображение f сюръективно: образ $f(c_2X)$ компактен и потому замкнут в c_1X, и $c_1(X) = f(c_2(X))$ и $\overline{c_1(X)} = c_1X$.

Теорема

Компактификации c_1X *и* c_2X *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $c_1X \leqslant c_2X$ *и* $c_2X \leqslant c_1X$*.*

Доказательство. Если компактификации c_1X и c_2X эквивалентны и φ — гомеоморфизм из определения эквивалентности, то в качестве непрерывных отображений $c_2X \to c_1X$ и $c_1X \to c_2X$, гарантирующих выполнение неравенств $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$, можно взять φ и φ^{-1}.

Предположим теперь, что $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$, и пусть $f_1\colon c_2X \to c_1X$ и $f_2\colon c_1X \to c_2X$ — непрерывные отображения, для которых $f_1 \circ c_2 = c_1$ и $f_2 \circ c_1 = c_2$. Если мы покажем, что f_1 — биекция, то отображение f_1 будет гомеоморфизмом, причём как раз таким, какой требуется.

Имеем $f_2 \circ f_1(y) = y$ для всех $y \in c_2X$: для композиции $f_2 \circ f_1\colon c_2X \to c_2X$ выполнено равенство $f_2 \circ f_1 \circ c_2 = f_2 \circ c_1 = c_2$; поскольку c_2 инъективно, это означает, что $f_2 \circ f_1(y) = y$ для всякого $y \in c_2(X) \subset c_2X$, т.е. сужение $f_2 \circ f_1$ на плотное подпространство $c_2(X)$ пространства c_2X совпадает с сужением тождественного отображения $C_2X \to C_2X$, так что само $f_2 \circ f_1$ и есть тождественное отображение. $\implies$ f_1 (так же как и f_2) биективно. □

Теорема

Компактификации c_1X *и* c_2X *тихоновского пространства* X *эквивалентны тогда и только тогда, когда для любых замкнутых в* X *множеств* A *и* B

$$\overline{c_1(A)} \cap \overline{c_1(B)} = \varnothing \iff \overline{c_2(A)} \cap \overline{c_2(B)} = \varnothing. \qquad (\star)$$

Доказательство использует предыдущую теорему и критерий компактности в терминах ультрафильтров.

Поскольку $c(X)$ — это просто гомеоморфная копия пространства X в cX, можно отождествить X с $c(X)$ и считать, что само пространство X содержится в cX, т.е. c — тождественное вложение. Тогда $X = c(X)$ и нарост имеет вид $cX \setminus X$.

Предложение

Если c_1X и c_2X — компактификации пространства X и $f\colon c_1X \to c_2X$ — непрерывное отображение со свойством $f \circ c_1 = c_2$, то сужение $f|_{c_1(X)}$ — гомеоморфизм, а само отображение f сюръективно и переводит нарост в нарост, т.е.

$$f(c_1X) = c_2X, \qquad f(c_1(X)) = c_2(X), \qquad f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X).$$

Доказательство. То, что $f|_{c_1(X)}$ — гомеоморфизм, было показано при доказательстве теоремы об эквивалентных компактификациях, а то, что f сюръективно, было отмечено сразу после определения отношения $\leqslant$. Последнее утверждение (что нарост переходит в нарост) немедленно вытекает из следующего более общего факта.

Лемма

Пусть $Y \subset X$, X хаусдорфово, $\overline{Y} = X$ и $f\colon X \to Z$ — непрерывное отображение. Если $f|_Y\colon Y \to f(Y)$ — гомеоморфизм, то $f(X \setminus Y) \cap f(Y) = \varnothing$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x \in X \setminus Y$ и $f(x) \in f(Y)$. Без ограничения общности можно считать, что $X = Y \cup \{x\}$ и $Z = f(X)$; тогда имеем также $Z = f(Y)$. Возьмём $y \in Y$, для которого $f(y) = f(x)$. Пусть U и V — непересекающиеся окрестности точек x и y. Множество $f(Y \setminus V) = f|_Y(Y \setminus V)$ замкнуто в $f(Y) = Z$, потому что $f|_Y\colon Y \to f(Y)$ — гомеоморфизм. Значит, $f^{-1}(f(Y \setminus V)) = Y \setminus V$ замкнуто в X. Имеем $x \notin \overline{V}$, так как x имеет окрестность U, не пересекающуюся с V. Поскольку $\overline{Y} = \overline{Y \setminus V} \cup \overline{V} = Y \setminus V \cup \overline{V}$ и $x \in X = \overline{Y}$, получаем $x \in Y$. Это противоречие доказывает лемму. $\square$

$\square$

Александровская компактификация

Определение

Топологическое пространство X называется локально компактным, если каждая точка $x \in X$ имеет компактную (не обязательно открытую!) окрестность.

Теорема об александровской компактификации

Каждое некомпактное локально компактное хаусдорфово пространство X обладает компактификацией αX, для которой $\alpha(X) = X$ и нарост $\alpha X \setminus X$ состоит из одной точки. Эта компактификация является наименьшим элементом множества компактификаций $\mathscr{C}(X)$, а её вес равен весу X.

Доказательство. Возьмём любую точку $* \notin X$ и положим $\alpha = \mathrm{id}_X$ и $\alpha X = X \cup \{*\}$. Объявим открытыми в αX все множества, открытые в X, а также все множества вида $\{*\} \cup (X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X. Легко видеть, что αX — компактификация пространства X. Значит, $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, и мы можем рассмотреть множество компактификаций $\mathscr{C}(X)$.

Пусть $cX \in \mathscr{C}(X)$. Соотношение $\alpha X \leqslant cX$ будет доказано, если мы покажем, что отображение $f\colon cX \to \alpha X$, определённое правилом

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(c^{-1}(x)) = c^{-1}(x) & \text{при } x \in c(X), \\ * & \text{при } x \in cX \setminus c(X) \end{cases}$$

(если считать, что $X = c(X)$, то это отображение переводит нарост $cX \setminus X$ в нарост-точку $\{*\}$, а остальные точки оставляет на месте), непрерывно и удовлетворяет условию $f \circ c = \alpha$. Равенство $f \circ c = \alpha$ следует прямо из определения, а чтобы доказать непрерывность, достаточно проверить, что $c(X)$ открыто в cX. Действительно, прообраз любого открытого множества является либо открытым подмножеством множества $c(X)$ (так что если $c(X)$ открыто, то он будет открыт и во всём пространстве cX), либо множеством вида $f^{-1}(\alpha X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X (а такое множество является дополнением в cX до множества $c(K)$, которое компактно, так как c — гомеоморфизм, и потому замкнуто). То, что локально компактное пространство $c(X)$ открыто в cX, вытекает из следующей леммы.

Лемма

Любое локально компактное хаусдорфово пространство Y открыто в любом хаусдорфовом пространстве Z, содержащем Y в качестве плотного подпространства.

Доказательство. Каждая точка $y \in Y$ обладает компактной окрестностью N. Эта окрестность замкнута, поскольку Y хаусдорфово, и содержит некоторую открытую окрестность U точки y. Поскольку $\overline{U} \subset N$, замыкание $\overline{U}^{Y}$ компактно. Имеем $\overline{U}^{Y} = \overline{U}^{Z} \cap Y$; поскольку это множество компактно, оно замкнуто и в Z. Имеем $\overline{U}^{Z} = \overline{U}^{Y} = \overline{U}^{Z} \cap Y \subset Y$. Пусть W — открытое множество в Z, для которого $U = Y \cap W$. Тогда $y \in W \subset \overline{W}^{Z} = \overline{Y \cap W}^{Z} = \overline{U}^{Z} \subset Y$, а значит, каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность, содержащуюся в Y, т.е. Y открыто. □

Покажем теперь, что $w(\alpha X) = w(X)$. X не компактно $\implies$ $w(X) \geqslant \aleph_0$. Пусть U — любая окрестность любой точки $x \in X$, и пусть N — компактная окрестность этой точки. Пересечение $U \cap N$ содержит с замыканием открытую окрестность точки x, и замыкание этой окрестности компактно. $\implies$ у пространства X имеется база, состоящая из открытых множеств с компактным замыканием. Выберем из неё базу $\mathscr{B}$ мощности $w(X)$. Рассмотрим на $X \cup \{*\}$ новую топологию с предбазой $\mathscr{B} \cup \big\{\{*\} \cup X \setminus \overline{U} : U \in \mathscr{B}\big\}$. Предбаза $\mathscr{B}$ имеет мощность $w(X)$ и потому определяет топологию веса $w(X)$, причём эта топология хаусдорфова и слабее топологии пространства αX; αX компактно $\implies$ она совпадает с топологией αX. □

Определение

Компактификация αX локально компактного некомпактного хаусдорфова пространства X называется александровской компактификацией, или одноточечной компактификацией, или минимальной компактификацией этого пространства.

Теорема

Если в семействе $\mathscr{C}(X)$ всех компактификаций некомпактного пространства X есть наименьший элемент cX (относительно порядка $\leqslant$), то X локально компактно и cX эквивалентна александровской компактификации αX.

Доказательство. Сначала покажем, что нарост $cX \setminus c(X)$ одноточечный. Предположим, что нарост $x, y \in cX \setminus c(X)$, $x \neq y$. $Y = cX \setminus \{x, y\}$ локально компактно, и αY — компактификация X. $\implies$ $\alpha Y = c'X$, где $c' \colon X \to c'X$ — гомеоморфное вложение и $c'(x) = c(x)$ для всех $x \in X$. По условию $cX \leqslant c'X$; $\implies$ $\exists$ непрерывное отображение $f \colon c'X \to cX$ такое, что $f|_{c'(X)} = \mathrm{id}_{c'(X)}$. $c'(X)$ плотно $\implies$ $f|_Y = \mathrm{id}_Y$, так что компакты $c'X$ и cX являются компактификациями Y (вложения $Y \to c'X$ и $Y \to cX$ тождественны). Имеем $f(c'X \setminus Y) = cX \setminus Y$ (по недавно доказанному предложению). $c'X = \alpha Y = Y \cup \{*\}$ и $Y = cX \setminus \{x, y\}$ $\implies$ $f(\{*\}) = \{x, y\}$. Такого быть не может.

Итак, $cX = c(X) \cup \{\star\}$ для некоторой точки $\star \notin c(X)$. Покажем, что $c(X)$ локально компактно. cX регулярно $\implies$ $cX \in T_1$ $\implies$ $c(X) = cX \setminus \{\star\}$ — открытая окрестность в cX любой точки $x \in c(X)$, и любая точка $x \in c(X)$ имеет окрестность V, замыкание которой в cX содержится в $c(X)$.

Итак, $cX = c(X) \cup \{\star\}$ и пространство $c(X)$ (а значит, и X) локально компактно. $\implies$ для X определена одноточечная компактификация $\alpha X = X \cup \{*\}$. По условию теоремы $cX \leqslant \alpha X$, т.е. $\exists$ непрерывное отображение $\varphi \colon \alpha X \to cX$ такое, что $\varphi \circ \mathrm{id}_X = c$. Имеем $\varphi(\{*\}) = \{\star\}$ $\implies$ φ биективно $\implies$ гомеоморфизм. $\implies$ компактификации cX и αX эквивалентны. ☐

Стоун–чеховская компактификация

Определение

Компактификация тихоновского пространства X, наибольшая относительно $\leqslant$, называется компактификацией Стоуна–Чеха, или стоун-чеховской компактификацией, или стоун-чеховским расширением, или максимальной компактификацией пространства X и обозначается βX.

Теорема

Для каждого тихоновского пространства X существует стоун-чеховская компактификация βX.

Доказательство. Рассмотрим произведение $\prod_{cX\in\mathscr{C}(X)} cX$ и диагональное отображение

$$\beta = \mathop{\Delta}_{cX\in\mathscr{C}(X)} c\colon X \to \prod_{cX\in\mathscr{C}(X)} cX,$$

которое по теореме о диагональном произведении отображений является гомеоморфным вложением. Обозначим замыкание $\overline{\beta(X)}$ его образа в $\prod_{cX\in\mathscr{C}(X)} cX$ через βX. По теореме Тихонова о компактности произведений и в силу компактности замкнутых подмножеств компактов пространство βX является компактификацией пространства X, причём эта компактификация наибольшая: для любой компактификации $c_0X \in \mathscr{C}(X)$ сужение $\widetilde{\pi}_{c_0X}$ канонической проекции $\pi_{c_0X}\colon \prod_{cX\in\mathscr{C}(X)} cX \to c_0X$ на $\beta(X)$ удовлетворяет условию $\widetilde{\pi}_{c_0X}\circ\beta = c_0$, поэтому $c_0X \leqslant \beta X$ при всех $c_0X \in \mathscr{C}(X)$, так что βX — действительно стоун-чеховская компактификация. □

Начиная с этого момента мы будем отождествлять пространство X с подпространством $c(X)$ любой его компактификации (когда это удобно) без специальных оговорок. В частности, мы будем считать, что $X \subset \beta X$. Такое отождествление позволяет обсуждать продолжение непрерывных отображений пространства X на его компактификации cX без необходимости всякий раз включать в цепочку отображений гомеоморфизм $X \rightleftarrows c(X)$.

Теорема

Пусть X — тихоновское пространство.

① *Каждое непрерывное отображение $f\colon X \to K$ пространства X в любой компакт K можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{f}\colon \beta X \to K$.*

② *Если cX — компактификация X и любое непрерывное отображение $f\colon X \to K$ в любой компакт K продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}\colon cX \to K$, то cX эквивалентна βX.*

Доказательство. ① Положим $c = \beta \mathbin{\Delta} f\colon X \to \beta X \times K$. По теореме о диагональном отображении c — гомеоморфное вложение, так что $cX = \overline{c(X)} \subset \beta X \times K$ — компактификация пространства X. βX максимальна $\Longrightarrow$ $\exists$ непрерывное $g\colon \beta X \to cX$ такое, что $g \circ \beta = g|_X = c$. Пусть $\pi\colon cX \to K$ — сужение проекции $\pi_K\colon \beta X \times K \to K$ на cX. Положим $\hat{f} = \pi \circ g\colon \beta X \to K$. Тогда $\hat{f}$ — продолжение f, так как $\hat{f}|_X = \hat{f} \circ \beta = \pi \circ g \circ \beta = \pi \circ c = f$.

② Продолжим тождественное вложение $\beta\colon X \to \beta X$ до непрерывного отображения $\hat{\beta}\colon cX \to \beta X$. Имеем $\hat{\beta} \circ c = \beta$, т.е. $\beta X \leqslant cX$, и $cX \leqslant \beta X$, т.к. βX максимальна; значит, cX и βX эквивалентны. □

Следствие

Пусть X — тихоновское пространство.

1. *Каждую непрерывную функцию $f : X \to [0,1]$ можно продолжить до непрерывной функции $\hat{f} : \beta X \to [0,1]$.*
2. *Если X нормально, то замыкания в βX любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств X не пересекаются.*
3. *Для каждой компактификации cY тихоновского пространства Y и любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ тихоновского пространства X в Y существует непрерывное отображение $\hat{f} : \beta X \to cY$ с тем свойством, что $\hat{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$.*
4. *Если X — тихоновское пространство и $X \subset Z \subset \beta X$, то $\beta Z = \beta X$.*

Доказательство. ④ Ясно, что βX — компактификация Z. Пусть $f : Z \to K$ — непрерывное отображение в компакт, и пусть $g = f|_X$. Для непрерывного продолжения $\hat{g}$ функции g на βX имеем $\hat{g}|_X = f|_X$. X плотно в $Z \implies \hat{g}|_Z = f$. Значит, $\hat{g}$ — непрерывное продолжение отображения f на βX. □

$\beta\mathbb{N}$

Нарост стоун-чеховской компактификации может быть устроен очень просто, например, быть одноточечным: если взять некомпактное пространство X и положить $Y = \beta X \setminus \{y\}$, где $y \notin X$, то нарост $\beta Y \setminus Y$ будет состоять из единственной точки y. Однако чаще всего нарост большой и обладает «плохими» свойствами. В качестве примера рассмотрим счётное дискретное пространство $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

$\mathbb{N}$ дискретно и потому локально компактно, но нарост $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ не может быть одноточечным, потому что любые непересекающиеся множества в $\mathbb{N}$ должны иметь непересекающиеся замыкания в $\beta\mathbb{N}$ (в силу следствия, пункт ①). $\beta\mathbb{N}$ компактно $\implies$ каждое бесконечное множество $A \subset \mathbb{N}$ имеет предельную точку в $\beta\mathbb{N}$, и эта точка принадлежит наросту $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, потому что в $\mathbb{N}$ все точки изолированы. Множество $\mathbb{N}$ содержит бесконечно много попарно непересекающихся бесконечных множеств, и все они имеют разные предельные точки в $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, так что нарост как минимум счётен. На самом деле $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\aleph_0}}$, а значит, $w(\beta\mathbb{N}) > \aleph_0$.

Предложение

$|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Доказательство. Рассмотрим тихоновский куб $[0,1]^{2^{\aleph_0}}$ (он как раз имеет мощность $2^{2^{\aleph_0}}$). По теореме Хьюитта–Марчевского–Пондицери $[0,1]^{2^{\aleph_0}}$ содержит счётное плотное множество A. Как-нибудь перенумеруем его элементы: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Отображение $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]^{2^{\aleph_0}}$, определённое правилом $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывно (потому что $\mathbb{N}$ дискретно); значит, оно продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}\colon \beta\mathbb{N} \to [0,1]^{2^{\aleph_0}}$, причём продолжение сюръективно, поскольку непрерывный образ компакта $\beta\mathbb{N}$ должен быть компактен и, значит, замкнут в $[0,1]^{2^{\aleph_0}}$, а наименьшее замкнутое подмножество куба $[0,1]^{2^{\aleph_0}}$, содержащее плотное множество $A = f(\mathbb{N}) \subset \hat{f}(\beta\mathbb{N})$ — это сам куб. Значит, $|\beta\mathbb{N}| \geqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

Пространство $\beta\mathbb{N}$ хаусдорфово $\implies$ $\forall x \in \beta\mathbb{N}$ имеем $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} : U$ — открытая окрестность $x\}$. Для любого открытого $U \subset \beta\mathbb{N}$ имеем $\overline{U} = \overline{U \cap \mathbb{N}} \implies$ $\{x\} = \bigcap\{\overline{U \cap \mathbb{N}} : U$ — открытая окрестность $x\}$. Значит, $|\beta\mathbb{N}| \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$. $\square$

Обобщения компактности

Локально компактные пространства

Определение

Скажем, что топологическое пространство локально компактно в широком смысле, если у каждой его точки есть компактная окрестность (не обязательно открытая), и локально компактно в узком смысле, если у каждой его точки имеется открытая окрестность с компактным замыканием. Хаусдорфово пространство, локально компактное в любом смысле, называется просто локально компактным.

Теорема

Локально компактные хаусдорфовы пространства — это в точности открытые подпространства компактов.

Теорема

Всякое плотное локально компактное подпространство в хаусдорфовом пространстве открыто.

Теорема

Всякое хаусдорфово локально компактное пространство вполне регулярно.

Нормальным хаусдорфово локально компактное пространство быть не обязано: пример — пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$.

Теорема

Подпространство локально компактного хаусдорфова пространства X локально компактно тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $F \cap U$, где F замкнуто в X, а U открыто.

Доказательство. *Необходимость.* Если $Y \subset X$ локально компактно, то Y открыто в $\overline{Y} \implies Y = U \cap \overline{Y}$, где U открыто в X.

Достаточность. Пусть X локально компактно и U открыто в X. Пусть $x \in U$, V — окрестность x в X и $\overline{V}$ компактно. X регулярно $\implies \exists$ открытая окрестность W точки x в X со свойством $\overline{W} \subset U \cap V$. W — окрестность x и U, и $\overline{W}$ компактно.

Пусть теперь $F \subset X$ замкнуто. Если $x \in F$ и N — компактная окрестность x в X, то $N \cap F$ — окрестность x в F, и она компактна, поскольку является замкнутым подмножеством компакта N. □

Теорема

Если X — локально компактное в широком смысле пространство и $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$ — открытое непрерывное отображение, то Y тоже локально компактно в широком смысле.

Теорема

1. *Топологическая сумма $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ локально компактна в узком или широком смысле тогда и только тогда, когда все пространства X_α локально компактны в том же смысле.*

2. *Топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ непустых пространств локально компактно в узком или широком смысле тогда и только тогда, когда все пространства X_α локально компактны в том же смысле и все, за исключением конечного числа, компактны.*

Доказательство. 2. *Необходимость.* Пусть $\alpha_0 \in A$ и $x \in X_{\alpha_0}$. Возьмём $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod X_\alpha$, где $x_{\alpha_0} = x$, а остальные координаты произвольны. У этой точки есть компактная (или с компактным замыканием) окрестность V, которая содержит каноническую окрестность $U = \prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α — непустое открытое подмножество пространства X_α и существует конечное $F \subset A$ такое, что $U_\alpha = X_\alpha$ для всех индексов $\alpha \in A \setminus F$. $U \subset V \implies \pi_\alpha(V) = X_\alpha$ для $\alpha \in A \setminus F$. Все канонические проекции непрерывны $\implies X_\alpha$ компактны для всех $\alpha \notin F$.

Осталось показать, что у x есть нужная окрестность в X_{α_0}; этого будет достаточно в силу произвольности выбора индекса $\alpha_0 \in A$ и точки $x \in X_{\alpha_0}$.

В случае локальной компактности в широком смысле компактная окрестность x — это $\pi_{\alpha_0}(V)$.

Рассмотрим случай, когда $\overline{V}$ компактно. Поскольку каноническая окрестность U содержится в V, имеем $\overline{U} \subset \overline{V}$, и из наследования компактности замкнутыми подпространствами вытекает, что U тоже имеет компактное замыкание. Имеем $\overline{U} = \prod\limits_{\alpha\in A} \overline{U}_\alpha$, а по теореме Тихонова все $\overline{U}_\alpha$ компактны. Значит, U_{α_0} является открытой окрестностью точки $x \in X_{\alpha_0}$ с компактным замыканием, что и требовалось.

Достаточность. Очевидно, произведение любых двух локально компактных (в любом смысле) пространств X и Y локально компактно. Отсюда немедленно вытекает конечная мультипликативность локальной компактности в любом смысле, а из неё — требуемое утверждение: если все X_α локально компактны и все X_α с $\alpha \in A \setminus F$, где F конечно, компактны, то произведение $\prod\limits_{\alpha \in F} X_\alpha$ локально компактно в силу конечной мультипликативности локальной компактности, а произведение $\prod\limits_{\alpha \in A \setminus F} X_\alpha$ компактно (тем более, локально компактно) по теореме Тихонова; ещё раз применяя конечную мультипликативность локальной компактности, заключаем, что $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \cong \prod\limits_{\alpha \in F} X_\alpha \times \prod\limits_{\alpha \in A \setminus F} X_\alpha$ локально компактно.

□

Определение

Псевдохарактер T_1-пространства X с топологией $\mathscr{T}$ в точке $x \in X$ — это кардинал

$$\psi(x, X) = \min\bigl\{|\mathscr{U}| : \mathscr{U} \subset \mathscr{T},\ \bigcap\mathscr{U} = \{x\}\bigr\}.$$

Наименьший кардинал κ с тем свойством, что $\psi(x, X) \leqslant \kappa$ для всех точек $x \in X$, называется псевдохарактером пространства X и обозначается $\psi(X)$:

$$\psi(X) = \sup\bigl\{\psi(x, X) : x \in X\bigr\}.$$

Теорема

Характер локально компактного хаусдорфова пространства в любой точке равен его псевдохарактеру в этой точке.

Доказательство. Пусть X — локально компактное хаусдорфово (а значит, и регулярное) пространство и $x \in X$. Ясно, что $\psi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$, так что надо доказать, что $\psi(x, X) \geqslant \chi(x, X)$. Можно считать, что $\psi(x, X) = \kappa \geqslant \aleph_0$. Пусть U_α, $\alpha < \kappa$, — открытые подмножества X и $\{x\} = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, и пусть W — открытая окрестность x с компактным замыканием. Для каждого $\alpha < \kappa$ найдём открытую окрестность $V_\alpha \subset W$ точки x, для которой $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$. Ясно, что $\bigcap\limits_{\alpha<\kappa} V_\alpha = \{x\}$ и все V_α имеют компактное замыкание. Возьмём любую открытую окрестность U точки x и любой ординал $\alpha_0 < \kappa$. Множества $(\overline{V}_{\alpha_0} \setminus U) \setminus \overline{V}_\alpha$, $\alpha < \kappa$, образуют открытое покрытие компакта $\overline{V}_{\alpha_0} \setminus U$. Оно содержит конечное подпокрытие $\{(\overline{V}_{\alpha_0} \setminus U) \setminus \overline{V}_{\alpha_i} : i = 1, \dots, n\}$. Имеем $(\overline{V}_{\alpha_0} \cap \overline{V}_{\alpha_1}) \cap \dots \cap (\overline{V}_{\alpha_0} \cap \overline{V}_{\alpha_n}) \subset U$; значит, $V_{\alpha_0} \cap V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_n} \subset U$. Таким образом, любая открытая окрестность U точки x содержит конечное пересечение элементов семейства $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$, т.е. все такие конечные пересечения образуют базу открытых окрестностей точки x. Мощность множества всех этих пересечений равна κ. ☐

Следствие

Вес любого локально компактного хаусдорфова пространства не превосходит его мощности.

Доказательство. Для конечных пространств утверждение очевидно.

Для любого пространства X и любой точки $x \in X$ имеем $\{x\} = \bigcap\{X \setminus \{y\} : y \in X, y \neq x\}$. В T_1-пространстве X все множества $X \setminus \{y\}$ открыты и, следовательно, $\psi(x, X) \leqslant |X|$. Если же X хаусдорфово и локально компактно, то по доказанной теореме $\chi(x, X) \leqslant |X|$ для всех $x \in X$, т.е. $\chi(X) \leqslant |X|$.

Для любого топологического пространства X выполнено неравенство $w(X) \leqslant \chi(X) \cdot |X|$. Действительно, если $\mathscr{B}(x)$ — база окрестностей для каждого $x \in X$, то $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}(x) : x \in X\}$ — база топологии X, и если $\chi(X) \leqslant |X|$, то все локальные базы $\mathscr{B}(x)$ можно выбрать имеющими мощность $\leqslant |X|$. В результате получим $w(X) \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant |X| \cdot |X|$. Для бесконечного X имеем $|X| \cdot |X| = |X|$, откуда $w(X) \leqslant |X|$. □

Паракомпактные пространства

Определение

Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств топологического пространства X локально конечно, если у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, пересекающая лишь конечное число элементов $\mathscr{F}$.

Определение

Топологическое пространство паракомпактно, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Хаусдорфовы паракомпактные пространства называются паракомпактами.

Паракомпактность действительно является обобщением компактности, потому что из открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие тогда и только тогда, когда в него можно вписать конечное покрытие.

Определение

Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств топологического пространства X называется консервативным, если для всякого $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ имеет место равенство $\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F} = \overline{\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} F}$.

Предложение

Каждое локально конечное семейство консервативно.

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ — локально конечное семейство подмножеств топологического пространства X, и пусть $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$. Включение $\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F} \subset \overline{\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} F}$ следует из монотонности оператора замыкания. Проверим обратное включение. Пусть $x \notin \bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F}$, и пусть U — окрестность x, пересекающая лишь конечное число элементов семейства $\mathscr{F}$, а значит, и семейства $\mathscr{F}'$. Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — все элементы $\mathscr{F}'$, пересекающие U. Положим $V = U \setminus (\overline{F}_1 \cup \cdots \cup \overline{F}_n)$. Очевидно, V — окрестность точки x и $V \cap \bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} F = \varnothing$. □

Теорема

Всякое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.

Доказательство. Пусть X — паракомпакт. Сперва покажем, что X регулярно.

Пусть $F \subset X$ замкнуто и $x \in X \setminus F$. В силу хаусдорфовости X у всякой точки $y \in F$ существует открытая окрестность U_y такая, что $x \notin \overline{U}_y$. Семейство $\{X \setminus F\} \cup \{U_y : y \in F\}$ является открытым покрытием пространства X. Пусть $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — вписанное в него локально конечное открытое покрытие. Положим $V = \bigcup\{V_\alpha : V_\alpha \cap F \neq \varnothing\}$. В силу консервативности локально конечных семейств имеем $\overline{V} = \bigcup\{\overline{V}_\alpha : V_\alpha \cap F \neq \varnothing\}$. Но всякое V_α, пересекающее F, содержится в некотором U_y, и $x \notin \overline{U}_y$. Значит, из $V_\alpha \cap F \neq \varnothing$ следует, что $x \notin \overline{V}$.

Нормальность доказывается аналогично. Пусть F и G — непересекающиеся замкнутые подпространства пространства X. Поскольку X регулярно, у всякой точки $y \in G$ есть открытая окрестность U_y, замыкание которой не пересекается с F. Рассматривая открытое покрытие $\{X \setminus G\} \cup \{U_y : y \in G\}$, мы так же, как и выше, получаем окрестность V множества G, замыкание которой не пересекается с F. Открытые множества $X \setminus \overline{V}$ и V не пересекаются и содержат F и G соответственно. □

Теорема

Паракомпактность наследуется замкнутыми подпространствами.

Доказательство. Пусть X — паракомпактное пространство, Y — его замкнутое подпространство и $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства Y. Для каждого $\alpha \in A$ возьмём открытое в X множество $U_\alpha \subset X$ такое, что $U_\alpha \cap Y = V_\alpha$. Семейство $\mathscr{U} = \{X \setminus Y\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием пространства X. Пусть $\{W_\beta : \beta \in B\}$ — вписанное в него локально конечное покрытие X. Тогда $\{W_\beta \cap Y : \beta \in B\}$ — открытое покрытие пространства Y, причём, очевидно, оно вписано в $\mathscr{V}$ и локально конечно. □

Теорема

1. *Топологическая сумма* $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *паракомпактна, если и только если все пространства* X_α *паракомпактны.*
2. *Если пространство* X *паракомпактно, а* K *компактно, то произведение* $X \times K$ *паракомпактно.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе.

Рассмотрим открытое покрытие $\mathscr{U}$ произведения $X \times K$. Зафиксируем произвольную точку $x \in X$ и для каждой точки $y \in K$ найдём содержащий точку (x, y) элемент U покрытия $\mathscr{U}$, а также открытые окрестности V_y точки x в X и W_y точки $y \in K$ такие, что $V_y \times W_y \subset U$. Семейство открытых множеств $\{V_y \times W_y : y \in K\}$ покрывает подпространство $\{x\} \times K$ пространства $X \times K$, которое гомеоморфно компактному пространству K. Выделим из этого семейства конечное подпокрытие $\{V_{y_1} \times W_{y_1}, \ldots, V_{y_n} \times W_{y_n}\}$. Зафиксируем элементы $U_1, \ldots, U_n$ покрытия $\mathscr{U}$, для которых $V_{y_i} \times W_{y_i} \subset U_i$, $i \leqslant n$. Положим $V_x = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$ и $\mathscr{U}_x = \{U_1, \ldots, U_n\}$. Заметим, что $V_x \times K \subset \bigcup \mathscr{U}_x$.

У нас получилось открытое покрытие $\{V_x : x \in X\}$ паракомпактного пространства X. Впишем в него локально конечное открытое покрытие $\mathscr{O} = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$. Для каждого $\alpha \in A$ выберем точку $x_\alpha \in X$, для которой $O_\alpha \subset V_{x_\alpha}$, и положим

$$\mathscr{C}_\alpha = \{U \cap (O_\alpha \times K) : U \in \mathscr{U}_{x_\alpha}\}.$$

Семейство $\mathscr{C}_\alpha$ конечно, и оно покрывает множество $O_\alpha \times K$, поскольку $O_\alpha \subset V_{x_\alpha}$ и $V_{x_\alpha} \times K \subset \bigcup \mathscr{U}_{x_\alpha}$. Кроме того, $\mathscr{C}_\alpha$ вписано в подсемейство $\mathscr{U}_{x_\alpha}$ покрытия $\mathscr{U}$ (а значит, и в само покрытие $\mathscr{U}$).

Рассмотрим семейство
$$\mathscr{C} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathscr{C}_\alpha.$$
Все его элементы — открытые подмножества пространства $X \times K$, и оно является покрытием этого пространства: для любого $(x, y) \in X \times K$ точка x принадлежит некоторому O_α, а множество $O_\alpha \times K$ покрывается семейством $\mathscr{C}_\alpha$. Кроме того, $\mathscr{C}$ вписано в покрытие $\mathscr{U}$, поскольку каждое $\mathscr{C}_\alpha$ вписано в $\mathscr{U}$.

Итак, $\mathscr{C}$ — открытое покрытие пространства $X \times K$, вписанное в $\mathscr{U}$. Покажем, что оно локально конечно. Возьмём любую точку $(x, y) \in X \times K$. Пользуясь локальной конечностью покрытия $\mathscr{O}$, Найдем открытую окрестность U точки x в X, которая пересекается лишь с конечным числом элементов $\mathscr{O}$. Пусть это элементы $O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_k}$. Тогда открытая окрестность $U \times K$ точки (x, y) может пересекаться с элементами семейства $\mathscr{C}_\alpha$ лишь для α из конечного множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, а значит, и лишь с конечным числом составленного из этих семейств покрытия $\mathscr{C}$ (потому что каждое семейство $\mathscr{C}_\alpha$ конечно). □

Впоследствии мы увидим, что паракомпактность не конечно мультипликативна (пример — прямая Зоргенфрея).

Определение

Семейство $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ непрерывных функций из топологического пространства X в $[0,1]$ называется разбиением единицы на X, если для каждого $x \in X$ значения $f_\alpha(x)$ отличны от нуля лишь для конечного числа индексов α и $\sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$.

Разбиение единицы $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ на X подчинено покрытию $\mathscr{C}$ пространства X, если покрытие $\mathscr{F} = \{f_\alpha^{-1}\big((0,1]\big)\}$ вписано в $\mathscr{C}$. Разбиение единицы $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ локально конечно, если покрытие $\mathscr{F}$ локально конечно.

Предложение

В любое открытое локально конечное покрытие $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ *паракомпакта* X *можно комбинаторно вписать локально конечное покрытие* $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ *так, что* $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ *для каждого* $\alpha \in A$*.*

Доказательство. Поскольку X регулярно, мы можем найти у каждой точки $x \in X$ открытую окрестность, замыкание которой содержится в каком-то элементе покрытия $\mathscr{U}$ (которому принадлежит точка x), и получить тем самым открытое покрытие $\mathscr{W}$ такое, что покрытие $\{\overline{W} : W \in \mathscr{W}\}$ вписано в $\mathscr{U}$. Возьмём локально конечное открытое покрытие $\{O_\beta : \beta \in B\}$, вписанное в $\mathscr{W}$. Для каждого $\beta \in B$ выберем $\alpha(\beta) \in A$ так, что $\overline{O}_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$. Для $\alpha \in A$ положим $V_\alpha = \bigcup\{O_\beta : \alpha(\beta) = \alpha\}$, если существует $\beta \in \alpha$, для которого $\alpha = \alpha(\beta)$, и $V_\alpha = \varnothing$, если такого β не существует. Очевидно, $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства X. В силу консервативности покрытия $\{O_\beta : \beta \in B\}$ имеем $\overline{V}_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha(\beta)=\alpha} \overline{O}_\beta \subset U_\alpha$. Осталось заметить, что любое семейство, комбинаторно вписанное в локально конечное семейство, и само локально конечно. □

Теорема

Для каждого открытого покрытия паракомпакта найдётся подчинённое ему локально конечное разбиение единицы.

Доказательство. Пусть X — паракомпакт, $\mathscr{C}$ — открытое покрытие X, и $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — вписанное в него локально конечное открытое покрытие. Возьмём замкнутое покрытие $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ такое, что $F_\alpha \subset U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Лемма Урысона $\implies$ $\forall \alpha \in A$ существует непрерывная функцию $g_\alpha \colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $g_\alpha(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_\alpha$ и $g_\alpha|_{F_\alpha} \equiv 1$. Полагая $g(x) = \sum\limits_{\alpha \in A} g_\alpha(x)$, мы получим непрерывную функцию $X \to \mathbb{R}$, потому что покрытие $\mathscr{U}$ локально конечно, а значит, у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, в которой g — сумма конечного числа непрерывных функций и потому непрерывна, откуда немедленно вытекает непрерывность g в x. Искомое разбиение единицы — это $\left\{\frac{g_\alpha}{g} : \alpha \in A\right\}$. □

Теорема (Стоун)

Всякое метризуемое пространство паракомпактно.

Теорема (Майкл)

Паракомпактность сохраняется замкнутыми непрерывными отображениями хаусдорфовых пространств.

Открытыми непрерывными отображениями паракомпактность не сохраняется. Более того, любое топологическое пространство является образом некоторого паракомпакта (и даже наследственно паракомпактного хаусдорфова пространства) при открытом непрерывном отображении.

Финально компактные и линделёфовы пространства

Определение

Для топологического пространства X кардинал

$$l(X) = \min\{\text{кардинал } \kappa\colon \text{ любое открытое покрытие } X \\ \text{имеет подпокрытие мощности } \leqslant \kappa\}$$

называется числом Линделёфа пространства X.
Топологическое пространство X, для которого $l(X) \leqslant \aleph_0$, называется финально компактным. Регулярные финально компактные пространства называются линделёфовыми.

- Пространство финально компактно $\iff$ каждое счётно центрированное семейство замкнутых множеств в нём имеет непустое пересечение.
- Финальная компактность наследуется замкнутыми подпространствами.
- В финально компактном пространстве любое несчётное множество имеет точку накопления $\implies$ нет несчётных замкнутых дискретных подпространств.
- Финальная компактность сохраняется непрерывными отображениями.

Теорема

1. *Топологическая сумма* $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *непустых пространств финально компактна тогда и только тогда, когда все пространства* X_α *финально компактны и множество* A *не более чем счётно.*

2. *Если* X *финально компактно, а* K *компактно, то* $X \times K$ *финально компактно.*

Теорема

Все линделёфовы пространства паракомпактны.

Доказательство. Пусть $\mathscr{U}$ — открытое покрытие линделёфова пространства X. Для $x \in X$ зафиксируем $U_x \in \mathscr{U}$, $x \in U_x$, и найдём открытое $V_x \subset X$ такое, что $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_x \in \mathscr{U}$. Пусть $\{V_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ — счётное подпокрытие покрытия $\{V_x : x \in X\}$. Очевидно, $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ — покрытие X. Множества

$$W_1 = U_{x_1} \quad \text{и} \quad W_{i+1} = U_{x_{i+1}} \setminus \left(\overline{V}_{x_1} \cup \cdots \cup \overline{V}_{x_i}\right), \quad i \in \mathbb{N},$$

открыты и покрывают X. Покрытие $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ вписано в $\mathscr{U}$ и локально конечно, так как каждая точка $x \in X$ содержится в V_{x_j} для некоторого j и $V_{x_j} \cap W_i = \varnothing$ для $i > j$. □

Следствие

Все линделёфовы пространства нормальны.

Теорема

В классе метризуемых пространств линделёфовость равносильна второй аксиоме счётности.

Доказательство повторяет доказательство аналогичной теоремы для компактов.

Для любого метризуемого пространства X $w(X) = d(X) = c(X) = hc(X) = l(X)$.

Счётно компактные и псевдокомпактные пространства

Определение

Топологическое пространство X называется счётно компактным, если каждое счётное открытое покрытие этого пространства содержит конечное подпокрытие.

(Иногда за определение берут равносильное требование существования точки накопления у всякого бесконечного подмножества.)

Определение

Топологическое пространство X называется псевдокомпактным, если оно вполне регулярно и всякая непрерывная функция $X \to \mathbb{R}$ ограничена.

Теорема

Для топологического пространства X следующие условия равносильны:

① *X счётно компактно;*

② *любое счётное центрированное семейство замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение;*

③ *любое локально конечное семейство непустых множеств в X конечно;*

④ *любое бесконечное множество в X имеет точку накопления.*

②⇒③: Пусть $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — бесконечное локально конечное семейство непустых подмножеств X. Оно консервативно. Значит, $\forall n \in \mathbb{N}$ множество $F_n = \bigcup\limits_{j \geqslant n} \overline{A}_j$ замкнуто. $\{F_n\}$ — убывающая (⇒ центрированная) счётная система, и $\bigcap F_n = \varnothing$.

④⇒①: Пусть у открытого покрытия $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ нет конечного подпокрытия. Возьмём $x_1 \in X$ и выберем $k_1 \in \mathbb{N}$ так, что $x_1 \in U_{k_1}$. …Возьмём $x_{n+1} \in X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n})$ и выберем $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, для которого $x_{n+1} \in U_{k_{n+1}}$. Множество $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно и не имеет точек накопления (для $x \in X$ и элемента $U_n \in \mathscr{U}$, содержащего x, $U_n \cap A$ конечно). ☐

Теорема

1. *X псевдокомпактно;*
2. *для любого счётного центрированного семейства $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ открытых множеств в X пересечение $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} \overline{V}_i$ непусто;*
3. *любое локально конечное семейство непустых открытых множеств в X конечно;*
4. *любое локально конечное открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие.*

Доказательство. ①⇒③ : Пусть $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — бесконечное локально конечное семейство непустых открытых множеств. Для $n\in\mathbb{N}$ выберем $x_n\in U_n$ и непрерывную функцию $f_n\colon X\to[0,1]$ такую, что $f_n(x_n)=1$ и $f_n(X\setminus U_n)\subset\{0\}$. Положим $g_n=n\cdot f_n$. Поскольку семейство $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ локально конечно, функция $g=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ определена и непрерывна в каждой точке $x\in X$. Ясно, что функция g неограничена.

③⇒④ : очевидно.

④⇒①: Пусть X удовлетворяет условию ④ и $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Семейство $\{f^{-1}(n-1, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ представляет собой локальное конечное открытое покрытие X. Из условия ④ вытекает, что это покрытие содержит лишь конечное число непустых элементов, т.е. функция f ограничена.

③⇒②: Пусть X — пространство со свойством ③. Если $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счётное центрированное семейство открытых множеств, то найдётся точка $x \in X$, каждая окрестность которой пересекает бесконечно много множеств $V_n = \bigcap\limits_{i \leqslant n} W_i$ (иначе бесконечное семейство $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ непустых открытых множеств было бы локально конечным). Значит, любая окрестность точки x пересекает W_n для каждого $n \in \mathbb{N}$ (если точка x имеет окрестность U такую, что $U \cap W_n = \varnothing$, то $U \cap V_k = \varnothing$ для всех $k \geqslant n$), т.е. $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{W}_i$.

②⇒①: Для всякой неограниченной непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$ семейство $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $V_n = \{x : |f(x)| > n\}$, центрировано, однако $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n = \varnothing$. □

Следствие

1. *Всякое счётно компактное тихоновское пространство псевдокомпактно.*
2. *Всякое нормальное псевдокомпактное пространство счётно компактно.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теорем. Докажем второе. Если $X \in T_1$ нормально и X не счётно компактно, то X содержит бесконечное замкнутое дискретное множество D. Выберем попарно различные точки $x_1, x_2, \dots \in D$ и рассмотрим неограниченную функцию $f : D \to \mathbb{R}$, определённую правилом

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = x_n, \\ 0, & \text{если } x \in D \setminus \{x_1, x_2, \dots\}. \end{cases}$$

Она непрерывна. Если $X \in T_4$, то по теореме Титце–Урысона f продолжается до (неограниченной) непрерывной функции на X. □

Следствие

Всякое паракомпактное счётно компактное пространство компактно. Всякое паракомпактное псевдокомпактное пространство компактно.

Из определения счётной компактности сразу же вытекает, что любое замкнутое подпространство счётно компактного пространства счётно компактно. Для псевдокомпактных пространств это не так (увидим дальше).

Очевидно, сумма непустых топологических пространств счётно компактна (псевдокомпактна) тогда и только тогда, когда число слагаемых конечно и все слагаемые счётно компактны (псевдокомпактны).

Существуют примеры счётно компактных пространств X и Y, произведение которых не псевдокомпактно. Таким образом, ни счётная компактность, ни псевдокомпактность не конечно мультипликативна. Однако оба эти свойства выдерживают умножение на компакт; это доказывается стандартным путём.

Теорема

Для метризуемых пространств счётная компактность и псевдокомпактность равносильны компактности.

Эту теорему можно доказать непосредственно, но проще сослаться на теорему Стоуна (что всякое метризуемое пространство паракомпактно).

Секвенциально компактные пространства

Определение

Топологическое пространство X секвенциально компактно, если каждая последовательность точек X содержит сходящуюся подпоследовательность.

Не всякий компакт является секвенциально компактным пространством — примером служит $\beta\mathbb{N}$. Секвенциально компактное пространство не обязано быть компактным (увидим дальше). Однако очевидно, что каждое секвенциально компактное пространство счётно компактно.
Непосредственно из определения вытекает, что секвенциальная компактность наследуется замкнутыми подпространствами.

Теорема

1. *Сумма непустых пространств секвенциально компактна тогда и только тогда, когда число слагаемых конечно и все слагаемые секвенциально компактны.*
2. *Секвенциальная компактность счётно мультипликативна.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе.

Предположим, что X_n, $n \in \mathbb{N}$, — секвенциально компактные пространства и $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$; пусть $\mathrm{x}_i = (x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ для $i \in \mathbb{N}$.

Последовательность $(x_{1,n})_n$ точек X_1 содержит подпоследовательность $(x_{1,k_{1,n}})_n$, сходящуюся к некоторой точке $x_1 \in X_1$. Последовательность $(x_{2,k_{1,n}})_n$ точек X_2 содержит подпоследовательность $(x_{2,k_{2,n}})_n$, сходящуюся к $x_2 \in X_2$. …Для каждого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $(x_{m,k_{m,n}})_n$ точек X_m сходится к $x_m \in X_m$, и она является подпоследовательностью последовательностей $(x_{m,n})_n$ и $(x_{m,k_{j,n}})_n$ для всех $j \leqslant m$. Если из последовательности индексов $(k_{n,n})_n$ выкинуть первые $m-1$ членов, то получится подпоследовательность последовательности $(k_{m,n})_n$. Значит, $x_{m,k_{n,n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_m$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что точка $\mathrm{x} = (x_n)_n \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ — предел подпоследовательности $(\mathrm{x}_{k_{n,n}})_n$ последовательности $(\mathrm{x}_n)_n$. $\square$

Теорема

1. *В классе метризуемых пространств секвенциальная компактность равносильна компактности.*
2. *В классе пространств с первой аксиомой счётности секвенциальная компактность равносильна счётной компактности.*

Доказательство. То, что секвенциально компактные метризуемые пространства компактны, вытекает из теоремы о компактности счётно компактных метризуемых пространств и того, что из секвенциальной компактности следует счётная компактность. Обратная импликация вытекает из того, что все метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счётности ($\Longrightarrow$ топология определяется сходимостью последовательностей) и существования предельной точки у всякого бесконечного множества (в частности, у множества точек любой нетривиальной последовательности) в компакте. Это же рассуждение доказывает и второе утверждение. □

Примеры

- *Одноточечная линделёфикация дискретного пространства:* $L(\kappa) = D \cup \{*\}$, где $|D| = \kappa$, $* \notin D$. Точки D изолированы, окрестности $*$ — дополнения до не более чем счётных подмножеств D. $w(L(\kappa)) = \chi(L(\kappa)) = c(L(\kappa)) = |D|$. В $L(\kappa)$ нет нетривиальных сходящихся последовательностей.
- *Прямая Зоргенфрея S.* Это $\mathbb{R}$ с топологией, порождённой базой $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. S неметризуема, удовлетворяет первой аксиоме счётности, наследственно сепарабельна и наследственно нормальна, но $S \times S$ не нормален. Покажем, что S линделёфова; получим пример линделёфова ($\Rightarrow$ паракомпактного) пространства, квадрат которого не нормален ($\Rightarrow$ не линделёфов и не паракомпактен).

  Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие S, и пусть V_α — внутренность U_α в $\mathbb{R}$. Покажем, что $L = S \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$ счётно. $\forall x \in L \; \exists\, \alpha(x) \in A$ и число $r(x) > x$ такие, что $[x, r(x)) \subset U_{\alpha(x)}$. Для любых разных $x, y \in L$ имеем $[x, r(x)) \cap [y, r(y)) = \varnothing \implies L$ счётно. $\mathbb{R} \setminus L \subset \mathbb{R}$ обладает счётной базой, и $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — его открытое покрытие. Пусть $\{V_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ — подпокрытие. Семейство $\{U_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ покрывает $\mathbb{R} = S$, кроме части L.

- *Пространство W_1^0 всех не более чем счётных ординалов с порядковой топологией.* Знаем: W_1^0 не компактно и локально компактно. Все замкнутые дискретные множества в W_1^0 конечны $\Rightarrow$ W_1^0 счётно компактно $\Rightarrow$ псевдокомпактно. Значит, W_1^0 не паракомпактно. W_1^0 удовлетворяет первой аксиоме счётности $\Rightarrow$ секвенциально компактно. Покажем, что W_1^0 ещё и нормально.

  Пусть $A, B \subset W_1^0$ замкнуты. Предположим, что A и B неограничены в W_1^0. Легко построить последовательности $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $\alpha_n \in A$, $\beta_n \in B$ и $\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n < \omega_1$. Обозначим этот супремум γ. Любая окрестность γ в W_1^0 содержит интервал вида (γ_1, γ_2), где $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, а любой такой интервал содержит как точки вида α_i, так и точки вида β_i. Значит, точка γ предельная для A и для $B \Rightarrow \gamma \in A \cap B$. Итак, если замкнутые множества A и B в W_1^0 не пересекаются, то либо A, либо B ограничено. Пусть для определённости A ограничено, т.е. $A \subset [0, \alpha_0]$, где α_0 — некоторый счётный ординал. Множество $[0, \alpha_0]$ замкнуто в компакте W_1 и потому само компактно $\Rightarrow A$ компактно. Значит, у A и B есть непересекающиеся окрестности в W_1^0.

- *Псевдокомпактное не счётно компактное пространство:* $X = \beta\mathbb{R} \setminus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. X псевдокомпактно, но содержит бесконечное замкнутое дискретное (и, следовательно, не псевдокомпактное) подпространство. Таким образом, этот пример вдобавок показывает, что псевдокомпактность не наследуется замкнутыми подпространствами.

  X содержит бесконечное замкнутое дискретное подпространство $\mathbb{N}$.

  Покажем, что X псевдокомпактно. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция. Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ плотно в $\mathbb{R}$, а значит, и в $\beta\mathbb{R}$ и в X. $\Rightarrow$ Оно пересекается со всеми открытыми множествами $f^{-1}\big((-\infty, -n) \cup (n, +\infty)\big)$ (они непусты). Выберем попарно различные $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ так, что $|f(x_n)| > n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$; $\Rightarrow$ $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ не имеет предельных точек в X и, тем более, в $\mathbb{R} \subset X$. Итак, D — замкнутое дискретное подпространство нормального пространства $\mathbb{R}$, и $D \cap \mathbb{N} = \varnothing$. Имеем $\overline{D}^{\beta\mathbb{R}} \cap \overline{\mathbb{N}}^{\beta\mathbb{R}} = \overline{D}^{\beta\mathbb{R}} \cap \beta\mathbb{N} = \varnothing$. $\Rightarrow$ $\overline{D}^{\beta\mathbb{R}} \subset X$, т.е. $\overline{D}^{\beta\mathbb{R}} = \overline{D}^{X} = D$. $\Rightarrow$ D компактно — противоречие.

Связность и несвязность

Определение

Топологическое пространство называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подпространств, и несвязным, если его можно так представить. Связный компакт называется континуумом.

Иными словами, X связно, если его нельзя представить в виде $Y \oplus Z$, где Y и Z — непустые подпространства X.

Замечание

Очевидно, в определении связного пространства слово «открытых» можно заменить на «замкнутых», а также на «открыто-замкнутых».

Теорема

Для топологического пространства X следующие условия равносильны:

1. *X связно;*
2. *X не содержит открыто-замкнутых подмножеств, кроме $\varnothing$ и X;*
3. *если $X = Y \cup Z$ и множества Y и Z отделены в X (т.е. $\overline{Y} \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \varnothing$), то Y или Z пусто;*
4. *каждое непрерывное отображение $f\colon X \to \{0, 1\}$ постоянно.*

Следствие

Каждое связное тихоновское пространство, содержащее хотя бы две разные точки (в частности, любой неодноточечный континуум), имеет мощность $\geqslant 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Пусть X — связное тихоновское пространство, и пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Поскольку $X \in T_1$, множество $\{x\}$ замкнуто в X, а поскольку $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, существует непрерывная функция $f\colon X \to [0, 1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$. Функция f сюръективна, потому что если бы нашлось $r \in [0, 1] \setminus f(X)$, то мы бы имели $X = f^{-1}([0, r)) \oplus f^{-1}((r, 1])$ в противоречие со связностью X. □

Следствие

Если $Y \subset X$ и Y связно, и если X_1 и X_2 — отделённые множества в X, для которых $Y \subset X_1 \cup X_2$, то одно из множеств X_1 и X_2 содержит Y.

Следствие

Если $Y_\alpha \subset X$, $\alpha \in A$, — связные подпространства и $\bigcap\limits_{\alpha\in A} \overline{Y}_\alpha \neq \varnothing$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ связно.

Следствие

Если для любых двух точек пространства X существует содержащее их связное $Y \subset X$, то X связно.

Следствие

Если Y связно, $Y \subset X$ и $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, то Z тоже связно. В частности, $\overline{Y}$ связно.

Следствие

Тихоновское пространство X связно тогда и только тогда, когда βX связно.

Теорема

Обычная прямая, а также все интервалы, отрезки и открытые и замкнутые лучи на прямой связны.

Доказательство. Предположим, что прямая $\mathbb{R}$ несвязна, т.е. $\mathbb{R} = W_1 \cup W_2$, где $W_1, W_2 \neq \varnothing$, $W_1 \cap W_2 = \varnothing$ и оба множества W_1 и W_2 открыты. (Тогда эти множества одновременно и замкнуты.) Возьмём $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$; будем считать для определённости, что $w_1 < w_2$. Положим $w = \sup\{x \in W_1 \cap [w_1, w_2]\}$. Если $w \in W_1$, то $w < w_2$ и, поскольку W_1 открыто, найдётся $\varepsilon > 0$, для которого $(w - \varepsilon, w + \varepsilon) \subset W_1 \cap [w_1, w_2]$; имеем $w' = w + \frac{\varepsilon}{2} > w$ и $w' \in W_1 \cap [w_1, w_2]$. Если же $w \in W_2$, то, поскольку W_2 открыто, найдётся $\varepsilon > 0$, для которого $(w - \varepsilon, w] \subset W_2 \cap [w_1, w_2]$, и $x \leqslant w - \varepsilon < w$ для всех $x \in W_1 \cap [w_1, w_2]$. В любом случае получаем противоречие с определением супремума.

Открытые интервалы и открытые лучи гомеоморфны прямой и потому тоже связны.

Отрезки и замкнутые лучи связны в силу следствий. □

Определение

Объединение всех связных подпространств пространства X, содержащих точку $x \in X$, называется компонентой связности, или связной компонентой, или просто компонентой, точки x в X (или пространства X).

- Компонента точки x — это максимальное связное подмножество X, содержащее x.
- Компонента любой точки замкнута.
- Компоненты любых двух точек в топологическом пространстве либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, в совокупности компоненты точек составляют разбиение пространства на попарно непересекающиеся связные замкнутые множества, которые называются компонентами связности, или связными компонентами, или просто компонентами, этого пространства.

Определение

Квазикомпонентой точки x в топологическом пространстве X называется пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств X, содержащих эту точку.

Квазикомпоненты всех точек замкнуты.

Предложение

Квазикомпоненты любых двух точек либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство. Пусть Q_x и Q_y — квазикомпоненты точек x и y. Тогда либо $x, y \in Q_x \cap Q_y$, либо хотя бы одна из точек x и y не содержится в $Q_x \cap Q_y$. В первом случае всякое открыто-замкнутое множество, содержащее точку x, содержит также и y, так что $Q_x = Q_y$. Предположим, что одна из точек — пусть это будет x — не принадлежит пересечению $Q_x \cap Q_y$. Тогда у точки y есть открыто-замкнутая окрестность U, которая не содержит x, причём по определению $Q_y \subset U$. Множество $X \setminus U$ является открыто-замкнутой окрестностью точки x, причём по определению $Q_x \subset X \setminus U$. Значит, $Q_x \cap Q_y = \varnothing$. □

Таким образом, квазикомпоненты точек в топологическом пространстве тоже (как и компоненты) образуют разбиение пространства на непересекающиеся замкнутые множества, которые называются квазикомпонентами этого пространства.

Предложение

Компонента любой точки в топологическом пространстве содержится в квазикомпоненте этой точки.

Доказательство. Пусть C_x — компонента точки x в пространстве X, и пусть Q_x — её квазикомпонента. Если U — любая открыто-замкнутая окрестность точки x, то множества U и $X \setminus U$ отделены в X. C_x связно $\implies$ $C_x \subset U$ (включение $C_x \subset X \setminus U$ выполняться не может, так как $x \in C_x$). Значит, C_x содержится в каждой открыто-замкнутой окрестности точки x. □

Теорема

Во всяком компакте компонента любой точки совпадает с её квазикомпонентой.

Доказательство. Достаточно доказать, что квазикомпоненты компакта связны.

Пусть X — компакт, $x \in X$ и Q — квазикомпонента x. Предположим, что $Q = Y \cup Z$, где Y и Z — замкнутые подмножества подпространства Q (а значит, и компакта X) и $Y \cap Z = \varnothing$. Пусть для определённости $x \in Y$. X нормально $\implies$ $\exists$ непересекающиеся открытые $U, V \subset X$, для которых $Y \subset U$ и $Z \subset V$. Имеем $Q \subset U \cup V$. По определению $Q = \bigcap\limits_{\alpha \in A} W_\alpha$, где $\{W_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство всех открыто-замкнутых окрестностей x в X. Множества $U_\alpha = X \setminus W_\alpha$, $a \in A$, образуют открытое покрытие компакта $X \setminus (U \cup V)$. Пусть $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда $W = \bigcap\limits_{i \leqslant n} W_{\alpha_i} \subset U \cup V$. W открыто-замкнуто, и

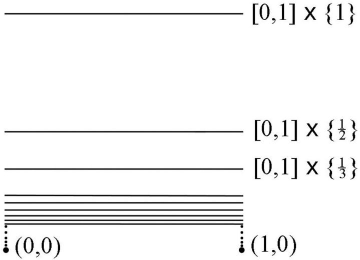
$$\overline{U \cap W} \subset \overline{U} \cap \overline{W} = \overline{U} \cap W = \overline{U} \cap ((U \cup V) \cap W) =$$
$$= (\overline{U} \cap U) \cup (\overline{U} \cap V) \cap W = U \cap W,$$

т.е. $U \cap W$ открыто-замкнуто. Поскольку $x \in U \cap W$, имеем $Q \subset U \cap W$; значит, $Y \subset Q \subset U \cap W \subset U$. $Z \subset V$ и $V \cap U = \varnothing \implies Z = \varnothing$. Из произвольности выбора замкнутых множеств Y и Z вытекает связность множества Q. □

Пример

Для некомпактных пространств доказанная теорема неверна. Рассмотрим

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left([0,1] \times \{\tfrac{1}{n}\}\right) \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2:$$



Компоненты точек $\{(0,0)\}$ и $\{(1,0)\}$ одноточечны, а квазикомпоненты — одно и то же множество $\{(0,0),(1,0)\}$: все отрезки $[0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ открыто-замкнуты в X и связны, и любая окрестность $\{(0,0)\}$ пересекает их все, кроме конечного числа. Отрезки связны $\Longrightarrow$ любая открыто-замкнутая окрестность $\{(0,0)\}$ содержит их все, кроме конечного числа $\Longrightarrow$ и точку $\{(1,0)\}$, которая является предельной для любого множества с этим свойством.

Теорема

Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Теорема

$\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, *где* $X_\alpha \neq \varnothing$, *связно* $\iff$ *все пространства* X_α *связны.*

Доказательство. Если $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ связно, то все проекции X_α связны.

Произведение $X \times Y$ двух связных X и Y связно: любые две точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ принадлежат связному множеству $(X \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Y)$.
$\implies$ произведение любого конечного числа связных пространств связно.

Рассмотрим $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, где X_α связны. Зафиксируем $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Пусть $\mathscr{F} = \{F \subset A : F$ конечно$\}$. Для $F \in \mathscr{F}$ положим $X_F = \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$, где $Y_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \in F$ и $Y_\alpha = \{x_\alpha\}$ для $\alpha \notin F$. Каждое X_F гомеоморфно конечному произведению связных пространств $\implies$ связно. Все X_F содержат $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \implies \bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} X_F$ связно. Это объединение плотно в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \implies \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ связно. □

Следствие

Компонента точки $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в топологическом произведении $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ равна произведению $\prod\limits_{\alpha\in A} C_\alpha$, где для каждого $a \in A$ C_α — компонента точки x_α в X_α.

Все тихоновские степени прямой $\mathbb{R}^\kappa$ и все тихоновские кубы $[0,1]^\kappa$ связны.

Метрический ёж любой колючести и все его степени связны

Разные несвязности

Определение

Топологическое пространство вполне несвязно, если все его компоненты одноточечны, т.е. если оно не содержит связных подпространств, содержащих больше одной точки. (Иногда такие пространства называют наследственно несвязными, а вполне несвязными называют пространства, в которых одноточечны все квазикомпоненты.)

Топологическое пространство вполне разрывно, если все его квазикомпоненты одноточечны. (Иногда такие пространства называют вполне несвязными, а вполне разрывными называют пространства, в которых одноточечны все континуумы; пространства с одноточечными континуумами называют также пунктиформными.)

Всякое вполне разрывное пространство вполне несвязно, однако обратное неверно. Вполне несвязное пространство может быть связным, так что несвязность не следует из полной несвязности. Однако все неодноточечные непустые вполне несвязные пространства несвязны.

Тихоновское пространство X (не)связно $\iff$ βX (не)связно.

X вполне разрывно $\not\Rightarrow$ βX вполне несвязно.

Предложение

Топологическое пространство X вполне разрывно тогда и только тогда, когда его можно взаимно однозначно непрерывно отобразить на хаусдорфово пространство, обладающее базой из открыто-замкнутых множеств.

Доказательство. Множество X с топологией $\mathscr{T}'$, порождённой базой, состоящей из всех открыто-замкнутых подмножеств пространства $(X, \mathscr{T})$, — хаусдорфово пространство, причём $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. □

Следствие

Всякий вполне несвязный компакт обладает базой, состоящей из открыто-замкнутых множеств.

Разные нульмерности

Определение

Топологическое пространство нульмерно, если оно непусто (пустое -1-мерно), является T_1-пространством и обладает базой из открыто-замкнутых множеств.

Всякое нульмерное пространство вполне регулярно.

Теорема

Непустое топологическое пространство вполне разрывно $\iff$ оно допускает непрерывное взаимно однозначное отображение на нульмерное пространство.

Всякое нульмерное пространство вполне разрывно.

Пример (Эрдёш)

$X \subset \ell^2 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty \right\}$ с метрикой $d\big((x_n)_n, (y_n)_n\big) = \sqrt{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (x_n - y_n)^2}$,

X состоит из всех последовательностей рациональных чисел $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

X вполне разрывно, но не нульмерно.

Существует пример нульмерного пространства X, для которого компактификация βX не нульмерна (а значит, и не вполне несвязна). Тем не менее всякое нульмерное пространство обладает какой-то (не обязательно максимальной) нульмерной компактификацией.

Теорема

Любое нульмерное пространство X вкладывается в тихоновскую степень $\{0,1\}^{w(X)}$ дискретного пространства $\{0,1\}$.

Доказательство. Пусть X — нульмерное пространство веса $w(X) = \kappa$. Тогда из любой базы пространства X можно выделить базу мощности κ. Значит, у X есть база $\mathscr{B}$ мощности κ, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Для каждого $U \in \mathscr{B}$ определим отображение $f_U\colon X \to \{0,1\}$ правилом $f_u(x) = 1$ для $x \in U$ и $f_u(x) = 0$ для $x \notin U$; оно непрерывно, потому что U открыто-замкнуто. Семейство отображений $\{f_U : U \in \mathscr{B}\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Действительно, если $x \in X \setminus F$, где $F \subset X$ — замкнутое множество, то $X \setminus F$ — окрестность x, а значит, найдётся $U \in \mathscr{B}$ со свойством $x \in U \subset X \setminus F$. Имеем $f_U(x) = 1 \notin \overline{f_U(F)} = \{0\}$. По теореме о диагональном произведении $\Delta_{U\in\mathscr{B}} f_U\colon X \to \{0,1\}^\kappa$ — гомеоморфное вложение. $\square$

Теорема

1. *Любое непустое подпространство всякого нульмерного пространства нульмерно.*
2. *Произведение произвольного семейства нульмерных пространств нульмерно.*

Следствие

Всякое нульмерное пространство обладает нульмерной компактификацией.

Множество $A \subset X$ функционально замкнуто, если оно является прообразом 0 ($\iff$ замкнутого множества) при непрерывной функции $f : X \to [0, 1]$. Множество $A \subset X$ функционально открыто, если оно является прообразом $(0, 1]$ ($\iff$ открытого множества) при непрерывной функции $f : X \to [0, 1]$, т.е. если его дополнение функционально замкнуто.

Определение

Топологическое пространство называется сильно нульмерным, если оно непусто и вполне регулярно и в каждое его конечное функционально открытое покрытие можно вписать дизъюнктное конечное открытое покрытие (т.е. конечное открытое покрытие попарно непересекающимися множествами).

Ясно, что любое дизъюнктное конечное открытое покрытие состоит из открыто-замкнутых множеств и потому функционально открыто.

Теорема

Для непустого тихоновского пространства X следующие условия равносильны:

1. *X сильно нульмерно;*
2. *для любых двух функционально отделимых множеств $A, B \subset X$ существует открыто-замкнутое множество U в X, для которого $A \subset U$ и $B \subset X \setminus U$;*
3. *βX сильно нульмерно.*

Следствие

Каждое сильно нульмерное пространство нульмерно.

Доказательство. Действительно, в тихоновском пространстве (а все сильно нульмерные пространства таковы по определению) любая точка функционально отделена от дополнения до всякой своей окрестности. Применяя доказанную теорему, видим, что любая окрестность любой точки содержит открыто-замкнутую окрестность этой точки. □

Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема

Для компакта X следующие условия равносильны:

① *X вполне несвязен;*

② *X вполне разрывен;*

③ *X нульмерен;*

④ *X сильно нульмерен.*

Доказательство. Равносильность условий ① и ② вытекает из равенства компонент и квазикопонент в компактах. Импликация ① $\Longrightarrow$ ③ была доказана. Импликация ③ $\Longrightarrow$ ② очевидна, и ④ $\Longrightarrow$ ③ была доказана. Осталось показать, что ③ $\Longrightarrow$ ④.

Пусть X — нульмерный компакт и $\mathscr{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ — его функционально открытое покрытие. Для каждой точки $x \in X$ выберем содержащий её элемент U_i покрытия $\mathscr{U}$ и открыто-замкнутую окрестность $V_x \subset U_i$. Из покрытия $\{V_x : x \in X\}$ выделим конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}\}$. Для каждого $i \leqslant m$ положим $W_i = V_{x_i} \setminus \bigcup\limits_{j<i} V_{x_j}$. Семейство $\{W_1, \ldots, W_m\}$ является дизъюнктным открытым покрытием, вписанным в $\mathscr{U}$. □

Следствие

Тихоновское пространство X сильно нульмерно тогда и только тогда, когда компактификация βX вполне несвязна.

Следствие

Всякое нульмерное пространство обладает сильно нульмерной компактификацией.

Теорема

Всякое нульмерное линделёфово пространство сильно нульмерно.

(Упражнение)

Следствие

Каждое непустое не более чем счётное регулярное пространство сильно нульмерно.

Доказательство. Достаточно проверить, что X нульмерно. Пусть $f : X \to [0,1]$ — непрерывная функция, $f(x) = 0$ и $f(X \setminus U) \subset \{1\}$. X не более чем счётно $\Longrightarrow$ $exists\ a \in (0,1) \setminus f(X)$. Прообраз $f^{-1}\big([0,a)\big) = f^{-1}\big([0,a]\big)$ — открыто-замкнутая окрестность x, содержащаяся в U. □

Полная несвязность и полная разрывность наследственны. Нульмерность наследуется непустыми подпространствами. Сильная нульмерность не наследуется даже замкнутыми подпространствами, однако верна теорема:

Теорема

Если X сильно нульмерно, $Y \subset X$ и любая непрерывная функция $Y \to [0,1]$ продолжается до непрерывной функции $X \to [0,1]$, то Y тоже сильно нульмерно.

(Упражнение)

Следствие

Любое замкнутое подпространство нормального сильно нульмерного пространства сильно нульмерно.

Сумма топологических пространств вполне несвязна (вполне разрывна, нульмерна, сильно нульмерна) тогда и только тогда, когда все слагаемые обладают тем же свойством. Полная несвязность, полная разрывность и нульмерность мультипликативны. Сильная нульмерность даже не конечно мультипликативна.

Очевидно, ни одна разновидность несвязности (и нульмерности) не сохраняется непрерывными отображениями — всякое, в частности, всякое связное, непустое топологическое пространство можно представить как непрерывный образ непустого дискретного пространства. Не сохраняются эти свойства и открытыми (тем более, факторными) отображениями: Исбелл доказал, что любое топологическое пространство является образом при открытом отображении наследственно паракомпактного наследственно сильно нульмерного пространства. Замкнутые отображения тоже не сохраняют ни одно из рассмотренных усилений несвязности. Действительно, обычный отрезок $[0,1]$ является образом сильно нульмерного пространства X при непрерывном отображении f. Отображение f продолжается до непрерывной функции $\hat{f}\colon \beta X \to [0,1]$. Компакт βX сильно нульмерен (и, значит, обладает и всеми прочими свойствами несвязности), а любое непрерывное отображение компакта в хаусдорфово пространство замкнуто.

Предложение

Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение с тем свойством, что образ любого открыто-замкнутого подмножества X открыто-замкнут в Y, и пространство X нульмерно (сильно нульмерно), то Y тоже нульмерно (сильно нульмерно).

Топологические размерности

Определение

Пусть X — топологическое пространство, $A, B \subset X$ и $A \cap B = \varnothing$. Замкнутое множество $F \subset X$ называется перегородкой между множествами A и B, если существуют открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ и $X \setminus F = U \cup V$. В случае, когда одно из множеств A и B одноточечно, говорят о перегородке между точкой и множеством.

Определение

Малая индуктивная размерность $\operatorname{ind} X$ топологического пространства X — это целое число, которое определяется по индукции так:

- $\operatorname{ind} X = -1$, если $X = \varnothing$;
- $\operatorname{ind} X \leqslant n$, $n \geqslant 0$, если каковы бы ни были точка $x \in X$ и не содержащее её замкнутое множество F, у точки x есть открытая окрестность U такая, что $\overline{U} \subset X \setminus F$ и $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n - 1$;
- $\operatorname{ind} X = n$, $n \geqslant 0$, если $\operatorname{ind} X \leqslant n$ и неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant n - 1$ не выполнено;
- $\operatorname{ind} X = \infty$, если неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant n$ не выполнено ни для какого целого $n \geqslant -1$.

Малая индуктивная размерность называется также размерностью Менгера–Урысона.

Любое пространство X конечной размерности $\operatorname{ind} X$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_3.

Иногда в определение размерности $\operatorname{ind} X$ включают требование регулярности пространства X, В этом случае ind нерегулярных пространств не определена.

Определение

Большая индуктивная размерность $\operatorname{Ind} X$ топологического пространства X — это целое число, которое определяется по индукции так:

- $\operatorname{Ind} X = -1$, если $X = \varnothing$;
- $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, $n \geqslant 0$, если каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества F и G, у множества F есть открытая окрестность U такая, что $\overline{U} \subset X \setminus G$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n - 1$;
- $\operatorname{Ind} X = n$, $n \geqslant 0$, если $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ и неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant n - 1$ не выполнено;
- $\operatorname{Ind} X = \infty$, если неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ не выполнено ни для какого целого $n \geqslant -1$.

Большая индуктивная размерность называется также размерностью Брауэра–Чеха.

Любое пространство X конечной размерности $\operatorname{Ind} X$ удовлетворяет аксиоме T_4.

Иногда в определение $\operatorname{Ind} X$ включают требование нормальности пространства X. В этом случае Ind ненормальных пространств не определена.

Для всякого пространства X и любого $Y \subset X$ $\operatorname{ind} Y \leqslant \operatorname{ind} X$.

Для всякого пространства X и любого его замкнутого подпространства Y выполнено неравенство $\operatorname{Ind} Y \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Определение

Пусть X — множество и $\mathscr{F}$ — индексированное семейство его подмножеств. Если существует n с тем свойством, что для каждой точки $x \in X$ число элементов семейства $\mathscr{F}$, содержащих x, не превосходит $n+1$, то наименьшее такое число называется порядком семейства $\mathscr{F}$ и обозначается $\operatorname{ord} \mathscr{F}$. Если такого n не существует, то порядок $\mathscr{F}$ полагается равным бесконечности: $\operatorname{ord} \mathscr{F} = \infty$.

Определение

Лебегова размерность $\dim X$ топологического пространства X определяется как наименьшее число n с тем свойством, что в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие порядка $\leqslant n$, если оно существует. Если такого числа нет, то лебегова размерность X полагается равной бесконечности: $\dim X = \infty$.

Теорема

Для нормального пространства X и $n \geqslant 0$ следующие условия равносильны:

1. $\dim X \leqslant n$;
2. *для любого семейства $\{(A_i, B_i) : i = 1, \ldots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X существуют перегородки C_i между A_i и B_i, $i \leqslant n+1$, такие, что $\bigcap\limits_{i \leqslant n+1} C_i = \varnothing$;*
3. *для любого семейства $\{(A_i, B_i) : i = 1, \ldots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X существуют непересекающиеся открытые множества $U_i \supset A_i$ и $V_i \supset B_i$, $i \leqslant n+1$, такие, что $\bigcup\limits_{i \leqslant n+1} (U_i \cup V_i) = X$;*
4. *для любого семейства $\{(A_i, B_i) : i = 1, \ldots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X существуют непересекающиеся замкнутые множества $D_i \supset A_i$ и $E_i \supset B_i$, $i \leqslant n+1$, такие, что $\bigcup\limits_{i \leqslant n+1} (D_i \cup E_i) = X$.*

Теорема

Для любого натурального n $\dim[0,1]^n = n$.

Доказательство. Сперва покажем, что $\dim[0,1]^n \leqslant n$. Воспользуемся условием ② основной теоремы. Пусть $\{(A_i, B_i) : i \leqslant n+1\}$ — произвольное семейство пар попарно непересекающихся замкнутых подмножеств куба $[0,1]^n$. Пусть Q_i, $i \leqslant n+1$, — попарно непересекающиеся плотные подмножества прямой; например, можно положить

$$Q_i = \left\{\frac{a}{p_i^k} : k \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z},\ a \text{ не делится на } p_i\right\},$$

где $p_1, \dots, p_{n+1}$ — любые различные простые числа.

Каждая точка $x \in A_i$ имеет в $\mathbb{R}^n$ открытую окрестность U_x вида $\prod\limits_{j \leqslant n}(a_j, b_j)$, где $a_j, b_j \in Q_i$, со свойством $\overline{U_x}^{\mathbb{R}^n} \cap B_i = \varnothing$. По крайней мере одна координата каждой точки границы $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_x$ множества U_x в $\mathbb{R}^n$ принадлежит множеству Q_i.

Множество A_i замкнуто в $[0,1]^n$ и потому компактно. Значит, из открытого покрытия $\{U_x : x \in A_i\}$ этого множества можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}\}$. Положим $U_i = \bigcup\limits_{j \leqslant k} U_{x_j}$. Имеем

$$\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_i = \overline{U_i}^{\mathbb{R}^n} \setminus \mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n} U_i \subset \bigcup_{j \leqslant k} \overline{U_{x_j}}^{\mathbb{R}^n} \setminus \bigcup_{j \leqslant k} \mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n} U_{x_j} = \bigcup_{j \leqslant k} \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_{x_j}.$$

Значит, по меньшей мере одна координата любой точки границы $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_i$ принадлежит множеству Q_i.

Каждое пересечение $C_i = [0,1]^n \cap \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_i$ является перегородкой между A_i и B_i в $[0,1]^n$. Кроме того, $\bigcap\limits_{i \leqslant n+1} C_i = \varnothing$. Действительно, если $x \in \bigcap\limits_{i \leqslant n+1} C_i$, то для каждого $i \leqslant n+1$ у точки x должна найтись координата, принадлежащая множеству Q_i. Это невозможно, так как множества Q_i не пересекаются, а координат у точки x всего n.

Итак, между множествами A_i и B_i мы построили перегородки C_i с пустым пересечением. Согласно основной теореме имеем $\dim[0,1]^n \leqslant n$.

Теперь покажем, что $\dim[0,1]^n \geqslant n$. Воспользуемся условием ④. Предположим, что $\dim[0,1]^n \leqslant n-1$ и в качестве пар непересекающихся замкнутых множеств в $[0,1]^n$ рассмотрим пары противоположных граней куба: для $i \leqslant n$ положим

$$A_i = \{(x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n : x_i = 1\}$$

и

$$B_i = \{(x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n : x_i = 0\}.$$

По основной теореме найдутся непересекающиеся пары замкнутых множеств $D_i \supset A_i$ и $E_i \supset B_i$, которые в совокупности покрывают $[0,1]^n$: $\bigcup\limits_{i\leqslant n}(D_i \cup E_i) = [0,1]^n$.

Для каждого i возьмём непрерывную функцию $f_i\colon [0,1]^n \to [0,1]$ такую, что $f_i(D_i) \subset \{0\}$ и $f_i(E_i) \subset \{1\}$. Положим $f = \Delta_{i\leqslant n} f_i$. Отображение f непрерывно, и оно отображает куб $[0,1]^n$ в его границу, потому что $\bigcup\limits_{i\leqslant n}(D_i \cup E_i) = [0,1]^n$ и $f_i|_{D_i\cup E_i} \in \{0,1\}$ для каждого $i \leqslant n$. Если $(x_1,\dots,x_n) \in \operatorname{Fr}[0,1]^n$, то для некоторого $i \leqslant n$ имеем либо $x_i = 1$, либо $x_i = 0$. В первом случае $(x_1,\dots,x_n) \in A_i$ и $f_i(x_i) = 0$, а во втором — $(x_1,\dots,x_n) \in B_i$ и $f_i(x_i) = 1$. В любом случае i-я координата $f_i\big((x_1,\dots,x_n)\big)$ точки $f\big((x_1,\dots,x_n)\big)$ отличается от i-й координаты само́й точки $(x_1,\dots,x_n)$. Значит, отображение f не имеет неподвижных точек, а такие точки должны существовать по теореме Брауэра. □

Теорема

Размерность $\dim$ *монотонна по замкнутым подпространствам: для всякого пространства* X *и любого его замкнутого подпространства* Y *выполнено неравенство* $\dim Y \leqslant \dim X$.

Теорема счётной суммы для размерности dim

Пусть X *— нормальное пространство, и пусть* n *— либо* -1, *либо неотрицательное целое число, либо* ∞. *Предположим, что* $X = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$, *где все* X_i *— замкнутые подпространства* X *и* $\dim X_i \leqslant n$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\dim X \leqslant n$.

Теорема

Для каждого натурального n $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Следствие

Для разных натуральных чисел n *и* k *евклидовы пространства* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{R}^k$ *не гомеоморфны.*

Гомотопические группы

Определение

Пусть x и Y — топологические пространства. Отображения $f_0, f_1 \colon X \to Y$ гомотопны, если $\exists$ непрерывное отображение $F \colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что $F(x,0) = f_0(x)$ и $F(x,1) = f_1(x)$ $\forall x \in X$. Иными словами, f_0 и f_1 связаны семейством непрерывных отображений $f_t \colon X \to Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, непрерывно зависящих от t. Это семейство называется гомотопией, связывающей f_0 и f_1. Тот факт, что f_0 и f_1 гомотопны, записывается $f_0 \simeq f_1$.

Отображение, гомотопное постоянному отображению, называется гомотопным нулю.

Гомотопность — отношение эквивалентности.

Определение

Топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если $\exists$ непрывные отображения $f \colon X \to Y$ и $g \colon Y \to X$ такие, что $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Тот факт, что X и Y гомотопически эквивалентны, записывается $X \sim Y$.

Определение

Топологическое пространство стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Определение

Непрерывный путь, или просто путь, в топологическом пространстве X — это непрерывное отображение $\alpha\colon [0,1] \to X$. Точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ — начало и конец пути. Путь α соединяет точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$.

Путь, в котором начало и конец совпадают, называется петлёй.

Пространство X линейно связно, если любые две точки в нём можно соединить путём.

Любые гомеоморфные пространства гомотопически эквивалентны, но не наоборот: $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке (стягиваемо).

Фундаментальная группа

Пусть X — топологическое пространство, в котором выбрана произвольная точка x_0 (отмеченная точка). В дальнейшем, если не оговорено противное, под петлями будем подразумевать петли с началом и концом x_0. Мы будем отождествлять такие петли с непрерывными отображениями $S_1 \to X$ окружности с отмеченной точкой в X, которые переводят отмеченную точку окружности в x_0.

Произведение двух петель ω_1 и ω_2 определяется так:

$$(\omega_1 \cdot \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \omega_2(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Произведение гомотопических классов петель — это гомотопический класс произведения этих петель. Умножение классов петель ассоциативно, но, вообще говоря, не коммутативно.

Для петли ω обратная петля — это петля $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$. Гомотопический класс, обратный классу петли ω — это класс петли ω^{-1}.

Фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ пространства X с отмеченной точкой x_0 — это группа гомотопических классов петель с началом (и концом) x_0. Её нейтральный элемент — это класс постоянной петли $[0,1] \to \{x_0\}$.

Пусть α — путь в X с началом x_1 и концом x_2, и пусть ω — петля с началом и концом x_2. Отображение $\omega \mapsto \alpha^{-1}\omega\alpha$ индуцирует изоморфизм групп $\pi_1(X, x_1)$ и $\pi_1(X, x_2)$: гомотопическому классу петли ω с началом x_1 соответствует класс петли $\alpha^{-1}\omega\alpha$ с началом x_2. Говорят, что этот изоморфизм индуцирован путём α.
$\Longrightarrow$ Фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ линейно связного пространства X не зависит от отмеченной точки. В этом случае пишут $\pi_1(X)$ вместо $\pi_1(X, x_0)$.

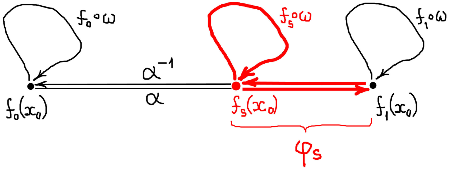
Линейно связное пространство X называется односвязным, если группа $\pi_1(X)$ тривиальна.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ естественным образом индуцирует гомоморфизм $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$. При этом гомоморфизме класс петли $\omega(t)$ переходит в класс петли $f(\omega(t))$. Ясно, что $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Теорема

Пусть непрерывные отображения $f_0, f_1 \colon X \to Y$ *пространств связаны гомотопией* $\{f_y\}_{t\in[0,1]}$. *Тогда гомоморфизм* $(f_1)_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *совпадает с композицией гомоморфизма* $(f_0)_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f_0(x_0))$ *и изоморфизма* $\pi_1(Y, f_0(x_0)) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, *индуцированного путём* $\alpha(t) = f_t(x_0)$, *соединяющим точки* $f_0(x_0)$ *и* $f_1(x_0)$.

Доказательство. Пусть ω — петля в X с началом в x_0. Достаточно доказать, что петли $f_1 \circ \omega$ и $\alpha^{-1} \cdot f_0 \circ \omega \cdot \alpha$ в Y гомотопны. Гомотопия $\{\varphi_s\}$ выглядит так:



□

Теорема

Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных линейно связных топологических пространств изоморфны.

Пусть X и Y — линейно связные пространства и $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ — непрерывные отображения такие, что $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f = \mathrm{id}_X$. По доказанной теореме гомоморфизмы $g_* \circ f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ и $f_* \circ g_*\colon \pi_1(Y, f(y_0)) \to \pi_1(X, g(y_0))$ являются композициями тождественного отображения и изоморфизма, т.е. изоморфизмами. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*^{(1)}} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*^{(2)}} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))).$$

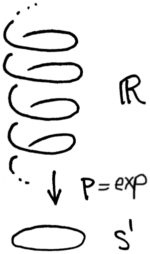
(Здесь $f_*^{(1)}$ и $f_*^{(2)}$ — гомоморфизмы фундаментальных групп с разными отмеченными точками, индуцированные одним и тем же отображением f.)

$g_* \circ f_*^{(1)}$ — изоморфизм $\Longrightarrow$ g_* — эпиморфизм. $f_*^{(2)} \circ g_*$ — тоже изоморфизм $\Longrightarrow$ g_* — мономорфизм. ☐

Следствие

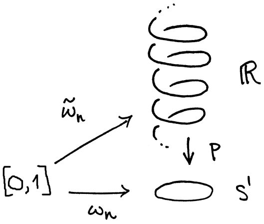
Фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны.

Накрытия



Пусть $\widetilde{X}$ и X — линейно связные пространства. Отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$ называется накрытием, если $p(\widetilde{X}) = X$ и существует дискретное пространство D такое, что у каждой точки $x \in X$ есть окрестность U, прообраз $p^{-1}(U)$ которой гомеоморфен $U \times D$, причём ограничение p на $p^{-1}(U)$ устроено как естественная проекция $U \times D \to U$. $\widetilde{X}$ называется накрывающим пространством, а X — базой накрытия p.

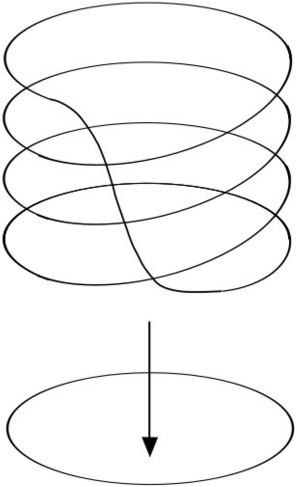
Пример: Отображение $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, переводящее точку $t \in \mathbb{R}$ в $e^{2\pi it} \in S^1$, — накрытие. $D = \mathbb{Z}$.



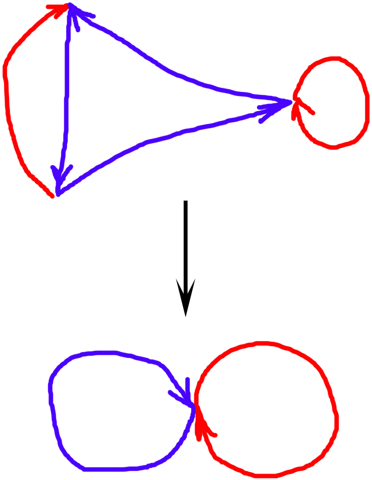
Поднятием пути $\omega(t)$ в X относительно накрытия p называется путь $\widetilde{\omega}(t)$ в $\widetilde{X}$ такой, что $p(\widetilde{\omega}(t)) = \omega(t)$ при всех t. Если x_0 — начало пути ω и $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, то существует единственное поднятие пути ω с началом в точке $\widetilde{x}_1$ (потому что D дискретно). Пример накрытия exp показывает, что поднятие петли (замкнутого пути) не обязательно является петлёй.

Накрытие p индуцирует гомоморфизм $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$, где $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$. Гомотопический класс петли $\omega(t) \subset X$ с началом в x_0 принадлежит подгруппе $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0) \iff$ поднятие этой петли с началом $\widetilde{x}_0$ замкнуто (является петлёй). Для другой точки $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ группы $G_0 = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ и $G_1 = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1))$ не обязательно совпадают: $G_1 = \alpha^{-1} G_0 \alpha$, где α — проекция пути в $\widetilde{X}$, соединяющего точки $\widetilde{x}_0$ и $\widetilde{x}_1$. Совпадение групп G_0 и G_1 равносильно тому, что поднятие петли с началом в $\widetilde{x}_0$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто поднятие этой петли с началом в $\widetilde{x}_1$. Любое поднятие петли с началом в x_0 соединяет некоторые точки в $p^{-1}(x_0)$. Поэтому поднятия петли с началом в x_0, начинающиеся в разных точках из $p^{-1}(x_0)$, одновременно замкнуты или одновременно незамкнуты $\iff \alpha^{-1} \cdot G_0 \cdot \alpha = G_0$ для любого $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, т.е. $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$. Накрытия p с этим свойством называются регулярными.

Конечнократное накрытие окружности:



Нерегулярное накрытие букета двух окружностей:



Если накрытие p регулярно, то $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ — группа. Более того, в этом случае группа $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ изоморфна группе $\mathrm{Aut}(p)$ автоморфизмов накрытия p. Гомеоморфизм $f\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ называется автоморфизмом накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$, если $p(f(\widetilde{x})) = p(\widetilde{x})$ для всех $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Если $\widetilde{y} = f(\widetilde{x})$, то $p(\widetilde{y}) = p(f(\widetilde{x})) = p(\widetilde{x})$, так что автоморфизм просто переставляет точки в прообразах точек из X при отображении p.

Теорема

Любой автоморфизм накрытия полностью определяется образом одной точки (при этом автоморфизме).

Доказательство. Надо показать, что для накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ существует не более одного автоморфизма $f\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, переводящего $\widetilde{x}_0$ в $\widetilde{x}_1$. Пусть $\widetilde{y}_0 \in \widetilde{X}$ — любая точка. Рассмотрим путь $\widetilde{\alpha}_0$ в $\widetilde{X}$, соединяющий $\widetilde{x}_0$ и $\widetilde{y}_0$. Пусть $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}_0$ — его проекция, и пусть $\widetilde{\alpha}_1$ — поднятие α с началом $\widetilde{x}_1$. Тогда f переводит $\widetilde{\alpha}_0$ в $\widetilde{\alpha}_1$, а значит, $f(\widetilde{y}_0) = \widetilde{y}_1$ — конец пути $\widetilde{\alpha}_1$, который определён однозначно.

Автоморфизм f, переводящий $\widetilde{x}_0$ в $\widetilde{x}_1$, существует $\iff$ точка $\widetilde{y}_1$ однозначно определяется точкой $\widetilde{y}_0$, т.е. поднятие с началом в $\widetilde{x}_1$ проекции любого замкнутого пути с началом в $\widetilde{x}_0$ тоже замкнуто. □

Теорема

Для регулярного накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ *группа* $\mathrm{Aut}(p)$ *изоморфна факторгруппе* $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.

Доказательство. Пусть α — петля в X с началом в x_0. Гомотопическому классу $[\alpha]$ поставим в соответствие такой автоморфизм $g_\alpha \in \mathrm{Aut}(p)$: пусть $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\widetilde{y}_0$ — любая точка в $\widetilde{X}$. Соединим $\widetilde{x}_0$ и $\widetilde{y}_0$ путём $\widetilde{\gamma}$ и рассмотрим путь $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$. Положим $g_\alpha(\widetilde{y}_0) = \widetilde{y}_1$, где $\widetilde{y}_1$ — конец поднятия пути $\gamma\alpha$ с началом $\widetilde{x}_0$.

Ядро гомоморфизма $\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(p)$ — подгруппа $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$. Этот гомоморфизм эпиморфен: $\forall \widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ можно рассмотреть петлю, являющуюся проекцией пути из $\widetilde{x}_0$ в $\widetilde{x}$. Петле α соответствует автоморфизм, переводящий $\widetilde{x}_0$ в $\widetilde{x}$, и этот автоморфизм единствен. $\square$

Следствие

Если $p\colon \widetilde{X} \to X$ *— накрытие и* $\pi_1(\widetilde{X})$ *тривиальна, то* $\mathrm{Aut}(p) \cong \pi_1(X)$.

Следствие

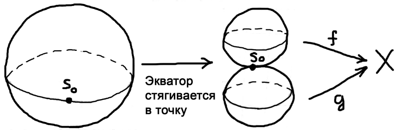
$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. Рассмотрим накрытие $p = \exp\colon \mathbb{R} \to S^1$. $\mathbb{R}$ стягиваемо $\implies$ $\pi_1(\mathbb{R}) = \{0\}$ и $\pi_1(S^1) \cong \mathrm{Aut}(p)$. Любой автоморфизм $g \in \mathrm{Aut}(p)$ однозначно задаётся точкой $g(0) = 2\pi n_g$, где $n_g \in \mathbb{Z}$. Для $t \in \mathbb{R}$ имеем $g(t) = t + 2\pi n_g$, $\implies$ для $h \in \mathrm{Aut}(p)$ имеем $h \circ g(t) = t + 2\pi(n_h + n_g)$, $\implies$ $\mathrm{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$. Целому числу n соответствует автоморфизм $t \mapsto t + 2\pi n$, а этому автоморфизму соответствует петля, обходящая окружность n раз. □

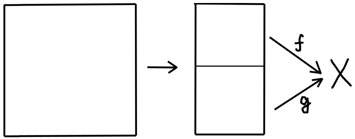
Высшие гомотопические группы

Гомотопическая группа $\pi_n(X, x_0)$ получается из $\pi_1(X, x_0)$, если вместо петель (отображений S^1 с отмеченной точкой в (X, x_0)) рассматривать сфероиды (отображения S^n с отмеченной точкой в (X, x_0)). Два сфероида эквивалентны, если они связаны гомотопией $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ такой, что $h_t(s_0) = x_0 \ \forall t \in [0, 1]$.
Отображения $S^n \to X$, переводящие s_0 в x_0, отождествляются с отображениями $[0, 1]^n \to X$, переводящими $\partial[0, 1]^n \to \{x_0\}$, или с отображениями $\overline{D}^n \to X$, переводящими $\partial D^n \to \{x_0\}$.

Умножение:



или

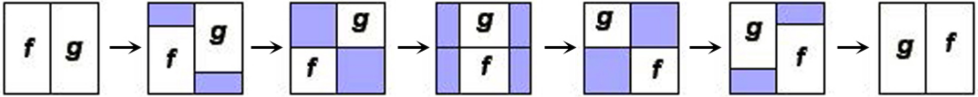


Обратный элемент для класса отображения $f\colon [0,1]^n \to (X, x_0)$: надо найти $\hat{f}$ такое, что $f \cdot \hat{f}$ гомотопно постоянному отображению. Представим куб $[0,1]^n$ в виде $[0,1]^{n-1} \times [-1,1]$ и положим $\hat{f}(x,s) = f(x,-s)$ для $x \in [0,1]^{n-1}$, $s \in [-1,1]$. Тогда $f \cdot \hat{f}(x,s) = f \cdot \hat{f}(x,-s)$, и семейство

$$g_t(x,s) = \begin{cases} f \cdot \hat{f}(x,s) & \text{при } |s| \geqslant t, \\ f \cdot \hat{f}(x,t) & \text{при } |s| \leqslant t \end{cases}$$

— гомотопия, $g_0 = f \cdot \hat{f}$, $g_1 \equiv x_0$ (так как все точки $(x,1)$ граничные и потому переходят в x_0 при f, $\hat{f}$ и $f \cdot \hat{f}$).

Для $n \geqslant 2$ группы $\pi_n(X, x_0)$ абелевы. Гомотопия между $f \cdot g$ и $g \cdot f$:



(границы всех (и маленьких) прямоугольников и фиолетовые области переходят в x_0).

Вместо накрытий в многомерном случае используются расслоения (прообразы точек уже не одноточечны и могут быть гомеоморфны любому пространству, но локально отображение по-прежнему устроено как проектирование).

Цилиндр над топологическим пространством X — это $X \times [0,1]$. Конус CX над X — это факторпространство $X \times [0,1]/(X \times \{1\})$ (одно из оснований цилиндра стянуто в точку), а надстройка ΣX — это факторпространство

$$\Sigma X = CX/(X \times \{0\}) = X \times [0,1]/\sim,$$

где $(x,t) \sim (y,s)$, если $t = s$ и либо $x = y$, либо $t = s = 0$ (а x и y любые). Иными словами, каждое основание цилиндра стягивается в точку.

Конус CS^n гомеоморфен D^{n+1}, а надстройка ΣS^n гомеоморфна S^{n+1}.

Рассмотрим сфероид $f\colon S^n \to X$. Отображение $\Sigma f\colon \Sigma S^n = S^{n+1} \to \Sigma X$, определённое правилом $\Sigma f([(y,t)]_\sim) = [(f(y),t)_\sim]$ для $y \in S^n$ и $t \in [0,1]$, является сфероидом пространства ΣX. Если $f, g\colon S^n \to X$ гомотопны, то Σf и Σg тоже гомотопны. $\Sigma(f \cdot g)$ гомотопен $\Sigma f \cdot \Sigma g$. Таким образом, $f \mapsto \Sigma f$ — гомоморфизм $\pi_n(X) \to \pi_{n+1}(\Sigma X)$; он называется гомоморфизмом надстройки и обозначается Σ. В частности, для любых n и k возникает отображение $\Sigma\colon \pi_n(S^k) \to \pi_{n+1}(S^{k+1})$.

Теорема Фрейденталя (лёгкая часть)

Гомоморфизм $\Sigma\colon \pi_n(S^k) \to \pi_{n+1}(S^{k+1})$ *является изоморфизмом при* $n \leqslant 2k-2$ *и эпиморфизмом при* $n = 2k-1$.

Следствие

$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ *для всех* $n \geqslant 1$.

$\pi_n(S^k) = \{0\}$ для $n < k$, $\pi_n(S^1) = \{0\}$ для $n > 1$, $\pi_n(\mathbb{R}^k) = \pi_n(D^k) = \{0\}$ для всех n и k.

Следствие

Не существует ретракции $r\colon \overline{D}^n \to \partial D^n = S^{n-1}$.

Доказательство. Пусть r существует, и пусть $i\colon S^{n-1} \to \overline{D}^n$ — тождественное вложение. Тогда композиция $S^{n-1} \xrightarrow{i} \overline{D}^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$ — тождественное отображение, поэтому оно индуцирует тождественный изоморфизм гомотопических групп. Однако композиция $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(\overline{D}^n) \xrightarrow{r_*} \pi_{n-1}(S^{n-1})$ не может быть изоморфизмом, потому что $\pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ и $\pi_{n-1}(\overline{D}^n) = \{0\}$. ☐