О Σ-произведениях компактов

Е.А.Резниченко

Москва

Содержание

Σ-произведения пространств

Пусть X_α, $\alpha \in A$ семейство пространств и $(x_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Обозначим

$$\Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A) = \{(y_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : |\{\alpha \in A : x_\alpha \neq y_\alpha\}| \leq \omega\}$$

Σ-произведение пространств.

Σ-произведения компактов, которые k-пространства

Пространство X называется *k-пространством*, если выполняется условие: множество $F \subset X$ замкнуто если и только если $F \cap K$ замкнуто в X для любого компактного $K \subset X$.

Problem (Лейдерман)

Является ли Σ-произведение компактов k-пространством?

Theorem (Комбаров,Малыхин, 1973)

Если X_α компакт и $t(X_\alpha) \leq \tau$ для $\alpha \in A$, то $t(\Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A)) \leq \tau$.

Corollary (1)

Если X_α компакт и $t(X_\alpha) \leq \omega$ для $\alpha \in A$, то $\Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A)$ k-пространство.

Пространство X называется *ω-ограниченным*, если $\overline{M}$ компактно для любого счетного $M \subset M$.

Предложение (2)

Если X компакт, $Y \subset X$ ω-ограниченно и $\chi(X) \leq \omega_1$, то Y k-пространство.

Corollary (3)

Если X_α компакт и $\chi(X_\alpha) \leq \omega_1$ для $\alpha \in A$, то $\Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A)$ k-пространство.

Corollary (4)

Если X_α компакт и $\chi(x_\alpha, X_\alpha) \leq \omega_1$ для $\alpha \in A$, то $\Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A)$ k-пространство.

Σ-произведения компактов, которые $k_{\mathbb{R}}$-пространства

Пространство X называется $k_{\mathbb{R}}$-*пространством*, если выполняется условие: функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна если и только если $f \restriction_K$ непрерывно для любого компактного $K \subset X$.

Problem

Является ли Σ-произведение компактов $k_{\mathbb{R}}$-пространством?

Подмножество $Y \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ назовем 2-*замкнутым*, если выполняется условие:

$$\prod_{\alpha \in A} \{x_\alpha, y_\alpha\} \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \quad \text{для } (x_\alpha)_\alpha, (y_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Предложение (5)

Если $S = \Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A)$ $k_{\mathbb{R}}$-пространство, $Y \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 2-замкнуто и $S \subset Y$, то Y $k_{\mathbb{R}}$-пространство.

Пусть $X_\alpha \supset M_\alpha$, $\alpha \in A$ семейство пространств. Обозначим

$$\Sigma(X_\alpha, M_\alpha, A) = \{(y_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : |\{\alpha \in A : x_\alpha \notin M_\alpha\}| \leq \omega\}.$$

Corollary (6)

Если $S = \Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A)$ $k_{\mathbb{R}}$-пространство и

$$(x_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha \in A} M_\alpha \subset \prod_{\alpha \in A} M_\alpha.$$

Тогда $\Sigma(X_\alpha, M_\alpha, A)$ $k_{\mathbb{R}}$-пространство.

Theorem (7)

Если X_α компакт для $\alpha \in A$, то $\Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A)$ $k_{\mathbb{R}}$-пространство.

Доказательство.

Пусть z_α добавленная изолированная точка в $Z_\alpha = X_\alpha \cup \{z_\alpha\}$. Из Corollary (4) вытекает, что $\Sigma(Z_\alpha, z_\alpha, A)$ k-пространство. Из Corollary (6) вытекает, что $S = \Sigma(Z_\alpha, \{z_\alpha, x_\alpha\}, A)$ $k_{\mathbb{R}}$-пространство. Тогда $\Sigma(X_\alpha, x_\alpha, A)$, как совершенный образ S, $k_{\mathbb{R}}$-пространство. $\square$

Спасибо