Функциональный анализ и его приложения
2023, т. 57, вып. 4, с. 89–99

Свободная топологическая алгебра с раздельно непрерывной операцией Мальцева

© 2023. О. В. Сипачёва, А. А. Солонков

Посвящается светлой памяти Израиля Моисеевича Гельфанда

Статья посвящена топологическим пространствам с раздельно непрерывной операцией Мальцева, которые мы называем квазимальцевскими пространствами. Доказано существование свободного квазимальцевского пространства, порожденного произвольным тихоновским пространством, и показано, что всякое квазимальцевское пространство является факторпространством свободного квазимальцевского пространства. Кроме того, показано, что топология свободного квазимальцевского пространства имеет простое и естественное описание в терминах порождающего пространства. Наконец, доказано, что всякое тихоновское квазимальцевское пространство является ретрактом квазитопологической группы.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa4159

В 1954 г. Мальцев охарактеризовал универсальные алгебры, в которых все конгруэнции перестановочны, в терминах специальной тернарной операции — операции Мальцева. Топологические пространства с непрерывной операцией Мальцева называются *мальцевскими пространствами*. Они изучаются давно и плодотворно. Например, известно, что мальцевские компакты являются ретрактами топологических групп [5], а также обладают свойством Суслина [6] и являются компактами Дугунджи [7]. Свойства и конструкции мальцевских пространств, а также условия, при которых мальцевские пространства являются ретрактами топологических групп, можно найти в [11], [12] и [14].

Эта статья посвящена топологическим пространствам с раздельно непрерывной операцией Мальцева, которые мы называем *квазимальцевскими пространствами*. Раздельно непрерывные операции имеют свои преимущества. Во-первых, многие (в частности, все перечисленные выше) утверждения о мальцевских пространствах остаются верными и для квазимальцевских (см. статью [12] и теорему 4 ниже). Во-вторых, класс квазимальцевских пространств замкнут относительно перехода к (топологическим) подалгебрам, произведениям и факторалгебрам, так что можно говорить о многообразии квазимальцевских пространств и о свободных квазимальцевских пространствах, порожденных произвольными тихоновскими топологическими пространствами. В этой статье мы докажем существование свободного квазимальцевского пространства, порожденного произвольным тихоновским пространством, и покажем, что всякое квазимальцевское пространство является факторпространством свободного квазимальцевского пространства. Кроме того, мы покажем, что топология свободного квазимальцевского пространства имеет простое и естественное описание в терминах порождающего пространства (см. теорему 3). Наконец, мы докажем, что всякое тихоновское квазимальцевское пространство является ретрактом квазитопологической группы (см. теорему 4).

Все используемые здесь алгебраические сведения, в частности, понятия универсальной алгебры, сигнатуры, терма, гомоморфизма и тождества, можно найти в книге [4], а топологические — в [9]. Универсальная алгебра (далее — просто алгебра) называется *топологической*, если она является топологическим пространством и все ее операции непрерывны, и *квазитопологической*, если все ее операции раздельно непрерывны. Класс (квази)топологических алгебр фиксированной сигнатуры, замкнутый относительно перехода к подалгебрам, произведениям и факторалгебрам, образует *многообразие (квази)топологических алгебр*. Важным частным случаем являются *полные многообразия* топологических алгебр — это классы, образованные всеми топологическими алгебрами фиксированной сигнатуры, в которых выполнен данный набор тождеств. Не все многообразия топологических алгебр полны: например, многообразие всех предкомпактных топологических групп не полно.

Конгруэнцией на алгебре A называется отношение эквивалентности $\sim$, согласованное со всеми операциями этой алгебры. Иначе говоря, оно должно удовлетворять следующему условию: если $f\colon A^n \to A$ — любая из операций алгебры A и $x_1 \sim x_1', \ldots, x_n \sim x_n'$, то $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1', \ldots, x_n')$.

Хорошо известно (см., например, [3]), что произведение (композиция) любых двух отношений эквивалентности $\sim_1$ и $\sim_2$ на произвольном множестве является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда эти отношения перестановочны, т. е. $\sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1$. Отсюда немедленно следует, что произведение двух конгруэнций $\sim_1$ и $\sim_2$ на алгебре является конгруэнцией тогда и только тогда, когда $\sim_1$ и $\sim_2$ перестановочны.

Теорема 1 (Мальцев [1]). *Любые две конгруэнции на любой универсальной алгебре A из многообразия $\mathfrak{V}$ перестановочны тогда и только тогда, когда существует такой терм $\mu(x, y, z)$, что во всех алгебрах из $\mathfrak{V}$ выполнены тождества $\mu(x, y, y) = \mu(y, y, x) = x$.*

Эта теорема послужила поводом для введения так называемой операции Мальцева.

Определение 1. Тернарная операция $\mu\colon X^3 \to X$ на множестве X называется *операцией Мальцева*, если она удовлетворяет тождествам $\mu(x, y, y) = \mu(y, y, x) = x$ для всех $x, y \in X$. Если при этом X — топологическое пространство и операция μ непрерывна, то X называется *мальцевским пространством*, а если раздельно непрерывна — *квазимальцевским пространством.*

Таким образом, квазимальцевское пространство — это топологическое пространство, являющееся при этом универсальной алгеброй с единственной операцией (Мальцева), в которой одноместные производные операции (то, что Мальцев называл трансляциями в [1]) непрерывны.

Определение 2 (см. [2]). *Свободной топологической алгеброй* произвольного топологического пространства X в данном многообразии $\mathfrak{V}$ топологических алгебр называется топологическая алгебра $A(X) \in \mathfrak{V}$, для которой существует непрерывное отображение $\varphi\colon X \to A(X)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) в $A(X)$ нет замкнутой подалгебры, отличной от $A(X)$ и содержащей $\varphi(X)$, т. е. $A(X)$ топологически порождается образами элементов пространства X при отображении φ;

(2) для каждого непрерывного отображения $\psi\colon X \to B$ в произвольную топологическую алгебру $B \in \mathfrak{V}$ найдется непрерывный гомоморфизм $\lambda\colon A(X) \to B$, такой, что $\psi = \lambda \circ \varphi$.

Большой вклад в изучение свободных топологических алгебр внес М. М. Чобан (см. [8]). В частности, он доказал, что в случае тихоновского пространства X отображение φ является вложением, так что в этом случае определение свободной топологической алгебры выглядит так:

Определение 3. Свободной топологической алгеброй тихоновского пространства X в данном многообразии $\mathfrak{V}$ топологических алгебр называется алгебра $A(X) \in \mathfrak{V}$ со свойствами

(1) X содержится в $A(X)$ как подпространство;

(2) $A(X)$ алгебраически порождается множеством X;

(3) любое непрерывное отображение $X \to B$ в топологическую алгебру $B \in \mathfrak{V}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $A(X) \to B$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только тихоновские пространства.

Аналогичным образом естественно определяются свободные квазитопологические алгебры. В частности, определение свободного квазимальцевского пространства таково:

Определение 4. Свободным квазимальцевским пространством тихоновского пространства X называется квазимальцевское пространство $M_q(X)$ со следующими свойствами:

(1) X содержится в $M_q(X)$ как подпространство;

(2) $M_q(X)$ алгебраически порождается множеством X;

(3) любое непрерывное отображение $X \to B$ в квазимальцевское пространство B продолжается до непрерывного гомоморфизма $M_q(X) \to B$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех алгебр сигнатуры $\{\mu\}$, состоящей из одной тернарной операции, в которых выполнены тождества $\mu(x,y,y) = \mu(y,y,x) = x$. Ясно, что это многообразие. Для множества X обозначим через $M(X)$ свободную алгебру с базой X в многообразии $\mathfrak{M}$ (без топологии).

Наряду с обычным произведением $X_1 \times X_2$ топологических пространств X_1 и X_2 будем также рассматривать произведение с кросс-топологией, обозначаемое через $X_1 \otimes X_2$ [10]. Ниже через π_1 и π_2 обозначены отображения проектирования на первый и второй сомножители.

Определение 5. *Кросс-произведением* $X_1 \otimes X_2$ пространств X_1 и X_2 называется декартово произведение множеств X_1 и X_2 с *кросс-топологией*, которая определяется следующим образом. Подмножество $U \subset X_1 \otimes X_2$ объявим открытым, если $\pi_1(U \cap X_1 \times \{y\})$ открыто в X_1 при всех $y \in X_2$ и $\pi_2(U \cap \{x\} \times X_2)$ открыто в X_2 при всех $x \in X_1$.

Это определение естественным образом обобщается на произведение произвольного конечного числа сомножителей. Всюду ниже для любого пространства X его n-ю степень с кросс-топологией будем обозначать[1] через $X^{\otimes n}$.

Кросс-топология обладает общеизвестным простым свойством, удобным при рассмотрении раздельно непрерывных отображений:

Лемма 1 (см., например, [10]). *Раздельная непрерывность отображения $f\colon X_1 \times X_2 \to Y$ в произвольное пространство Y относительно обычной топологии произведения на $X_1 \times X_2$ эквивалентна его обычной непрерывности относительно кросс-топологии на $X_1 \otimes X_2$.*

Для произвольного семейства топологических пространств X_i, $i \in I$, через $\coprod_{i \in I} X_i$ мы будем обозначать топологическую сумму этих пространств, т. е. объединение их попарно не пересекающихся гомеоморфных копий, в которое все X_i вложены как открыто-замкнутые подпространства.

Определение 6. Если даны отображения $\varphi_i\colon X_i \to Y$, где X_i, $i \in I$, и Y — топологические пространства, то *суммой отображений* φ_i назовем отображение $\coprod_{i \in I} \varphi_i\colon \coprod_{i \in I} X_i \to Y$, такое, что $\coprod_{i \in I} \varphi_i|_{X_i} = \varphi_i$ для всех $i \in I$. Очевидно, что $\coprod_{i \in I} \varphi_i$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все φ_i.

Если даны топологические пространства X_i и Y_i, $i \in I$, и отображения $\varphi_i\colon X_i \to Y_i$, то *кросс-произведение* $\bigotimes_{i \in I} \varphi_i\colon \bigotimes_{i \in I} X_i \to \bigotimes_{i \in I} Y_i$ — это обычное произведение отображений φ_i между указанными кросс-произведениями.

Следующая лемма представляет собой один из наших основных технических инструментов. Напомним, что отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$ называется *факторным*, если оно сюръективно и прообраз $f^{-1}(U)$ множества $U \subset Y$ открыт в X тогда и только тогда, когда U открыто в Y. Другими словами, сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ факторно, если топология пространства Y является самой сильной среди всех топологий, относительно которых f непрерывно.

Лемма 2 [10]. *Кросс-произведение $\bigotimes_{i \in I} \varphi_i$ непрерывно (факторно) тогда и только тогда, когда непрерывны (факторны) все φ_i.*

Перейдем к построению свободного квазимальцевского пространства $M_q(X)$ произвольного тихоновского пространства X. Для этого рассмотрим вспомогательные пространства $\widehat{M}_k(X)$. Положим

$$\begin{aligned}
&\widehat{M}_0(X) = X,\\
&\widehat{M}_1(X) = \widehat{M}_0(X)^{\otimes 3},\\
&\widehat{M}_n(X) = \coprod_{\substack{\max\{i,j,k\}=n-1\\ i,j,k \geqslant 0}} \widehat{M}_i(X) \otimes \widehat{M}_j(X) \otimes \widehat{M}_k(X) \qquad (n \geqslant 2).
\end{aligned}$$

Очевидно, $\widehat{M}_i(X) \cap \widehat{M}_j(X) = \varnothing$ при $i \neq j$. Положим

$$\widehat{M}(X) = \coprod_{i \in \mathbb{N}} \widehat{M}_i(X)$$

[1]В отличие от X^n с обычной топологией произведения.

и введем на $\widehat{M}(X)$ тернарную операцию μ. Для $x \in \widehat{M}_i(X)$, $y \in \widehat{M}_j(X)$, $z \in \widehat{M}_k(X)$ положим

$$\mu(x, y, z) = (x, y, z) \in \widehat{M}_i(X) \otimes \widehat{M}_j(X) \otimes \widehat{M}_k(X) \subset \widehat{M}_N(X),$$

где $N = \max\{i, j, k\} + 1$. Ясно, что отображение $\mu\colon \widehat{M}(X)^{\otimes 3} \to \widehat{M}(X)$ непрерывно.

Рассмотрим на $\widehat{M}(X)$ отношение R, определенное следующим правилом: $(x, y) \in R$, если существует $z \in \widehat{M}(X)$, для которого $x = (z, z, y)$ или $x = (y, z, z)$. Найдутся конгруэнции[2], согласованные с операцией μ и содержащие отношение R. Пересечение $\sim$ всех таких конгруэнций является наименьшей конгруэнцией, согласованной с операцией μ [3, с. 69].

Факторпространство пространства $\widehat{M}(X)$ по отношению $\sim$ обозначим через $M_q(X)$, а соответствующее естественное факторное отображение — через Q. Поскольку конгруэнция $\sim$ согласована с операцией μ и содержит отношение R, на факторпространстве $M_q(X)$ — множестве классов эквивалентности $[x]_\sim$ — возникает операция Мальцева $\mu\colon (M_q(X))^{\otimes 3} \to M_q(X)$, которая определяется правилом

$$\mu([x]_\sim, [y]_\sim, [z]_\sim) = \mu(Q(x), Q(y), Q(z)) = Q(\mu(x, y, z)) = [\mu(x, y, z)]_\sim.$$

Для каждого $n \geqslant 0$ положим $M_q(X)_n = R(\widehat{M}_n(X))$. Заметим, что как множество $\widehat{M}(X)$ — не что иное, как абсолютно свободная алгебра сигнатуры $\{\mu\}$ и $M_q(X)$ — свободная алгебра в многообразии $\mathfrak{M}$, порожденная множеством X. В дальнейшем мы будем обозначать множества $M_q(X)$ и $M_q(X)_n$ (без топологии) через $M(X)$ и $M(X)_n$ соответственно. Когда возможна путаница, мы будем снабжать обозначение операции μ на алгебре $M(X)$ индексом X, а обозначение операции на абсолютно свободной алгебре $\widehat{M}(X)$ оставлять без индекса.

Теорема 2. *Для любого тихоновского пространства X $M_q(X)$ с операцией μ является свободным квазимальцевским пространством пространства X.*

Доказательство. Сначала докажем раздельную непрерывность операции μ. Для этого рассмотрим факторное отображение $Q\colon \widehat{M}(X) \to M_q(X)$. По определению отображений Q и μ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}(X)^{\otimes 3} & \xrightarrow[\mu]{} & \widehat{M}(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Q^{\otimes 3}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Q} \\ M_q(X)^{\otimes 3} & \xrightarrow[\mu_X]{} & M_q(X) \end{array}$$

коммутативна. Верхняя стрелка (операция μ) непрерывна в кросс-топологии, поскольку она просто осуществляет гомеоморфизм $\widehat{M}(X)^{\otimes 3} \simeq \widehat{M}(X) \setminus \widehat{M}_0(X)$. Рассмотрим открытое множество $U \subset M_q(X)$. Его прообраз $V \subset \widehat{M}(X)^{\otimes 3}$ при

[2]Например, конгруэнция $\widehat{M}(X) \times \widehat{M}(X)$.

композиции $Q \circ \mu$ открыт в $\widehat{M}(X)^{\otimes 3}$. Поскольку диаграмма коммутативна, этот прообраз совпадает с прообразом $\mu^{-1}(Q^{-1}(U))$. В силу факторности отображения $Q^{\otimes 3}$ (лемма 2) получаем, что $Q^{\otimes 3}(V) = \mu_X^{-1}(U)$ открыто в $M_q(X)^{\otimes 3}$.

Таким образом, и отображение μ_X, соответствующее нижней стрелке, непрерывно в кросс-топологии, что означает раздельную непрерывность данного отображения относительно обычной топологии произведения, т. е. $M_q(X)$ — квазимальцевское пространство.

По построению пространство $M_q(X)$ обладает свойствами 1) и 2) из определения свободного квазимальцевского пространства. Проверим наличие свойства 3).

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение в Y — квазимальцевское пространство с операцией μ_Y. Определим отображения $f_i\colon \widehat{M}_i(X) \to Y$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, так:

$$
\begin{gathered}
f_0 = f;\\
f_1(\mu(x,y,z)) = \mu_Y(f_0(x), f_0(y), f_0(z)) \text{ для } x,y,z \in \widehat{M}_0(X),\\
\text{т. е. для } \mu(x,y,z) = (x,y,z) \in \widehat{M}_1(X);\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f_i(\mu(x,y,z)) = \mu_Y(f_k(x), f_l(y), f_n(z)) \ \text{ для } x \in \widehat{M}_k(X),\ y \in \widehat{M}_l(X),\ z \in \widehat{M}_n(X),\\
\text{где } 0 \leqslant k,l,n \leqslant i-1,\ \max\{k,l,n\} = i-1,\ \text{ т. е. для } \mu(x,y,z) = (x,y,z) \in \widehat{M}_i(X).
\end{gathered}
$$

Пользуясь непрерывностью операции μ_Y относительно кросс-топологии, легко показать по индукции, что все отображения f_i непрерывны. Следовательно, отображение

$$
\tilde{f} = \coprod_i f_i\colon \widehat{M}(X) \to Y
$$

непрерывно. (Оно определено корректно, потому что $\tilde{f}|_{\widehat{M}_0(X)=X} = f$ и любой элемент множества $\widehat{M}(X) \setminus \widehat{M}_0(X)$ имеет вид $(x,y,z) = \mu(x,y,z)$ для некоторых $x,y,z \in \widehat{M}(X)$.) По построению $\tilde{f}$ является гомоморфизмом абсолютно свободной алгебры $\widehat{M}(X)$ в Y, продолжающим отображение f. С другой стороны, по определению свободной алгебры $M(X)$ отображение множеств $f\colon X \to Y$ продолжается до гомоморфизма $h\colon M(X) \to Y$. Поскольку $M(X) = Q(\widehat{M}(X))$, для любых $x,y,z \in \widehat{M}(X)$ имеем

$$
\mu_Y(h(Q(x)), h(Q(y)), h(Q(z))) = h(\mu_X(Q(x), Q(y), Q(z)) = h(Q(\mu(x,y,z))).
$$

Значит, композиция $h \circ Q$ — гомоморфизм свободной алгебры $\widehat{M}(X) \to Y$, причем она, очевидно, является продолжением отображения f. Так как гомоморфное продолжение на свободную алгебру любого отображения базы в любую другую алгебру той же сигнатуры единственно, то $\tilde{f} = h \circ Q$. Из непрерывности отображения $\tilde{f}$ и факторности отображения Q вытекает непрерывность гомоморфизма $h\colon M_q(X) \to Y$ (если U — открытое подмножество пространства Y, то

$\tilde{f}^{-1}(U) = Q^{-1}(h^{-1}(U))$ открыто в силу непрерывности отображения $\tilde{f}$ и $h^{-1}(U)$ открыто в силу факторности отображения Q). $\square$

Пусть X — топологическое пространство, X_i, $i \in I$, — его подпространства и $X = \bigcup_{i\in I} X_i$. Напомним, что X имеет *топологию индуктивного предела* относительно разложения $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, если $U \subset X$ открыто (замкнуто) в X тогда и только тогда, когда $U \cap X_i$ открыто (замкнуто) в X_i при всех $i \in I$.

Теорема 3. *Для любого тихоновского пространства X пространство $M_q(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $M_q(X) = \bigcup_{n\geqslant 0} M_q(X)_n$.*

Доказательство. Пусть bX — какая-нибудь компактификация пространства X. В статье [13] было доказано, что если Y — тихоновское пространство и $A(Y)$ — свободная алгебра (без топологии) с базой Y в некотором многообразии, то на $A(Y)$ имеется хаусдорфова топология, относительно которой $A(Y)$ является топологической алгеброй и содержит Y в качестве подпространства. В частности, на свободной алгебре $M(bX)$ имеется хаусдорфова топология, относительно которой операция Мальцева непрерывна. Обозначим алгебру $M(bX)$ с этой топологией через $M_f(bX)$, а ее подпространство $M_f(bX) \cap M(X)$ — через $M_f(X)$. Из непрерывности операции Мальцева на $M_f(bX)$ следует, что все подмножества $M(bX)_n$ пространства $M_f(bX)$ компактны, будучи непрерывными образами компактных пространств $\widehat{M_f}(X)_n$, которые определяются точно так же, как $\widehat{M_n}(X)$, только кросс-произведения везде нужно заменить на обычные. Следовательно, все множества $M_f(bX)_n$ замкнуты в $M_f(bX)$, а значит, все множества $M(X)_n$ замкнуты в $M_f(X)$. Из непрерывности операции Мальцева на $M_f(bX)$ вытекает ее непрерывность, а значит, и раздельная непрерывность на $M_f(X)$. Поэтому в силу свойства 3) из определения свободного квазимальцевского пространства топология пространства $M_f(X)$ слабее топологии пространства $M_q(X)$. Следовательно, все множества $M(X)_n$ замкнуты и в $M_q(X)$.

Теперь теорема вытекает из факторности отображения Q и замкнутости $\widehat{M_n}(X)$ в $\widehat{M}(X)$ при всех n. Действительно, для произвольного множества $F \subset M_q(X)$, такого, что пересечения $F_n = F \cap M_q(X)_n$ замкнуты при всех n, имеем равенство $Q^{-1}(F) \cap \widehat{M_n}(X) = Q^{-1}(F_n) \cap \widehat{M_n}(X)$. Эти множества замкнуты в пространстве $\widehat{M}(X)$, которое является топологической суммой, а значит, и индуктивным пределом своих подпространств $\widehat{M_n}(X)$. Следовательно, и весь прообраз $Q^{-1}(F)$ замкнут в $\widehat{M}(X)$. Из факторности отображения Q вытекает замкнутость множества F в $M_q(X)$. $\square$

Замечание 1. Из теоремы 2 вытекает существование свободного квазимальцевского пространства для любого тихоновского пространства, а из рассуждения в начале доказательства теоремы 3 — его хаусдорфовость (топология пространства $M_q(X)$ сильнее хаусдорфовой топологии пространства $M_f(X)$).

Таким образом, топология свободного квазимальцевского пространства $M_q(X)$ устроена вполне понятным образом: это индуктивный предел подпространств $M_q(X)_n$, каждое из которых является образом при естественном факторном отображении пространств, получающихся из X применением конечного числа операций кросс-произведения и топологической суммы.

В [5] было доказано, что всякое компактное мальцевское пространство является ретрактом топологической группы. В случае квазимальцевских пространств тем же методом удается доказать аналогичную теорему без предположения компактности. В ее формулировке упоминается свободная квазитопологическая группа $F_q(X)$ пространства X. Такая группа была построена в работе [10] для каждого T_1-пространства X. Как абстрактная группа она является свободной группой, порожденной множеством X. Тот факт, что группа $F_q(X)$ квазитопологическая, означает, что умножение в ней раздельно непрерывно, а инверсия (операция взятия обратного) непрерывна. Кроме того, $F_q(X)$ содержит X в качестве подпространства и любое непрерывное отображение пространства X в квазитопологическую группу G продолжается до непрерывного гомоморфизма $F_q(X) \to G$.

Теорема 4. *Всякое квазимальцевское пространство X с операцией μ является ретрактом своей свободной квазитопологической группы $F_q(X)$.*

Доказательство. Для каждого натурального n обозначим через $F_q(X)_n$ множество слов длины, не превосходящей n, в $F_q(X)$, а через $F_q(X)_n^o$ (через $F_q(X)_n^e$) множество слов нечетной (четной) длины $\leqslant n$. Положим $F_q(X)^o = \bigcup_n F_q(X)_n^o$ и $F_q(X)^e = F_q(X) \setminus F_q(X)^o$. Следуя работе [5], для каждого нечетного n введем непрерывное отображение $f_n \colon X^{\otimes n} \to X$, такое, что f_1 — тождественное отображение, $f_3 = \mu$, а при $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned} f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_{n-2}\{ & f_3[f_1(x_1), x_2, f_{n-2}(x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n)],\\ & f_3[f_3(x_1, x_2, x_3), x_3, f_{n-2}(x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n)],\\ & f_3[f_3(x_1, x_2, x_3), x_4, f_{n-4}(x_5, x_6, x_7, \ldots, x_n)],\\ & f_3[f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_5, f_{n-4}(x_5, x_6, x_7, \ldots, x_n)],\\ & f_3[f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_6, f_{n-6}(x_7, x_8, x_9, \ldots, x_n)],\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ & f_3[f_{n-4}(x_1, \ldots, x_{n-4}), x_{n-4}, f_5(x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)],\\ & f_3[f_{n-4}(x_1, \ldots, x_{n-4}), x_{n-3}, f_3(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)],\\ & f_3[f_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}), x_{n-2}, f_3(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)],\\ & f_3[f_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}), x_{n-1}, f_1(x_n)]\}. \end{aligned}$$

Эти отображения обладают свойством

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_{n-2}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) \quad \text{при } x_i = x_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Обозначим через X^{-1} гомеоморфную копию пространства X и для каждого нечетного k определим отображения $j_k \colon (X \amalg X^{-1})^{\otimes k} \to F_k(X)$ и $i_k \colon (X \amalg X^{-1})^{\otimes k} \to X^{\otimes k}$ правилами

$$\begin{aligned} j_k(x_1^{\pm 1}, \ldots, x_k^{\pm 1}) &= x_1^{\pm 1} \ldots x_k^{\pm 1},\\ i_k(x_1^{\pm 1}, \ldots, x_k^{\pm 1}) &= (x_1, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Положим $j = \coprod_{n\geqslant 0} j_n$ и $i = \coprod_{n\geqslant 0} i_n$. В [10] было показано, что отображение $j\colon \coprod (X \amalg X^{-1})^{\otimes n} \to F_q(X)$ факторно. Ясно, что i тоже факторно. Заметим, что $F_q(X)^o$ — открыто-замкнутое подмножество пространства $F_q(X)$, потому что оно является ядром непрерывного гомоморфизма в дискретную группу $\mathbb{Z}_2$, переводящего X в 1. При этом $\coprod_{n\in\mathbb{N}} (X \amalg X^{-1})^{\otimes(2n-1)} = j^{-1}(F_q(X)^o)$. Значит, сужение j^o отображения j на $\coprod_{n\in\mathbb{N}} X^{\otimes(2n-1)}$ факторно. Сужение i^o отображения i на $\coprod_{n\in\mathbb{N}} X^{\otimes(2n-1)}$ факторно по тем же причинам. И отображение $f^o = \coprod_{n\in\mathbb{N}} f_{2n-1}$ непрерывно, поскольку все слагаемые f_{2n-1} непрерывны. С помощью следующей коммутативной диаграммы введем отображение r^o:

$$\begin{array}{ccc}
\coprod\limits_{n\in\mathbb{N}} (X \amalg X^{-1})^{\otimes(2n-1)} & \xrightarrow{\quad j^o \quad} & F_q(X)^o \\
\Big\downarrow {\scriptstyle i^o} & & \Big\downarrow {\scriptstyle r^o} \\
X^{\otimes n} & \xrightarrow{\qquad f^o \qquad} & X
\end{array}$$

В силу непрерывности композиции $\coprod_{n\in\mathbb{N}} f_{2n-1} \circ i^o$ и факторности отображения j^o отображение r^o непрерывно. Искомая ретракция r определяется так:

$$r(x) = \begin{cases} r^o(x), & \text{если } x \in F_q^o(X), \\ x_0, & \text{если } x \in F_q^e(X), \end{cases}$$

причем в качестве x_0 берется произвольный элемент из X. Она непрерывна, так как $F_q(X)^o$ и $F_q(X)^e$ — открыто-замкнутые подмножества в $F_q(X)$ и отображение r^o непрерывно на $F_q^o(X)$. □

Следующая теорема была доказана в [1, теорема 10] для мальцевских пространств (см. также [12, теорема 4.11]). Для удобства читателя мы приводим ее доказательство, хотя оно почти полностью повторяет рассуждения Мальцева из [1].

Теорема 5. *Если X и Y — квазимальцевские пространства и $f\colon X \to Y$ — факторный гомоморфизм, то f — открытый гомоморфизм.*

Доказательство. Для проверки открытости факторного отображения f достаточно показать, что для любого открытого множества $U \subset X$ множество $U^* = f^{-1}(f(U))$ также открыто в X. Пусть это не так, тогда найдется точка $x^* \in U^*$, не являющаяся внутренней точкой для U^*. Найдется точка $x \in U$, такая, что $f(x) = f(x^*)$. Для операции Мальцева μ на X имеет место равенство $x = \mu(x^*, x^*, x)$, и в силу ее раздельной непрерывности найдется окрестность $V^* \ni x^*$, такая, что $\mu(V^*, x^*, x) \subset U$. Так как x^* — не внутренняя точка для U^*, то найдется точка $y \in V^*$, такая, что $y \notin U^*$; для этой точки имеем $\mu(y, x^*, x) \in U$. Так как f — гомоморфизм и $f(x) = f(x^*)$, то $f(\mu(y, x^*, x)) = f(\mu(y, x, x)) = f(y) \in f(U)$, т. е. $y \in U \subset U^*$ — противоречие. □

Пусть X и Y — любые множества. Напомним, что по определению порожденной множеством X свободной алгебры $M(X)$ всякое отображение множества X в любую алгебру из многообразия $\mathfrak{M}$ единственным образом продолжается до гомоморфизма всей свободной алгебры $M(X)$. Отсюда немедленно вытекает, что любое отображение $f\colon X \to Y \subset M(Y)$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $g\colon M(X) \to M(Y)$. Следующая теорема показывает, что в случае, когда X и Y — тихоновские пространства и отображение f факторно, единственный гомоморфизм $g\colon M_q(X) \to M_q(Y)$, продолжающий отображение f, непрерывен и открыт.

Теорема 6. *Всякое факторное отображение $f\colon X \to Y$ тихоновских топологических пространств X и Y единственным образом продолжается до непрерывного открытого гомоморфизма $g\colon M_q(X) \to M_q(Y)$.*

Доказательство. Пользуясь определением пространств $\widehat{M}(X)$ и $\widehat{M}(Y)$ как топологической суммы тройных кросс-степеней пространств X и Y, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}(X) & \xrightarrow{Q_X} & M_q(X) \\ \Big\downarrow F & & \Big\downarrow g \\ \widehat{M}(Y) & \xrightarrow{Q_Y} & M_q(Y), \end{array}$$

где g — гомоморфизм, продолжающий отображение f, Q_X и Q_Y — факторное отображение Q из построения квазимальцевского пространства для данных пространств X и Y и $F = \coprod_{n\geqslant 0} F_n$ для отображений $F_n\colon \widehat{M}_i(X) \to \widehat{M}_i(Y)$, определенных следующим образом:

$$\begin{aligned} &F_0 = f, \\ &F_1 = F_0 \otimes F_0 \otimes F_0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &F_n = \coprod_{\substack{\max\{i,j,k\}=n-1 \\ i,j,k\geqslant 0}} F_i \otimes F_j \otimes F_k \quad \text{для } n > 0. \end{aligned}$$

По определению Q_X, Q_Y — факторные отображения, и отображение F, будучи суммой кросс-произведений факторных отображений, тоже факторно (лемма 2). Из этой диаграммы следует факторность гомоморфизма g. Открытость этого гомоморфизма следует из предыдущей теоремы.

Следствие 1. *Любое квазимальцевское пространство является фактор-пространством (т. е. образом при факторном гомоморфизме) свободного квазимальцевского пространства.*

Литература

[1] А. И. Мальцев, *К общей теории алгебраических систем*, Матем. сб., **35(77)**:1 (1954), 3–20.

[2] А. И. Мальцев, *Свободные топологические алгебры*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **21**:2 (1957), 171–198.

[3] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.

[4] *Общая алгебра*, *том* 2. *Под общ. ред. Л. А. Скорнякова*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1991.

[5] О. В. Сипачева, *Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1991, № 1, 33–36.

[6] В. В. Успенский, *О непрерывных образах линделёфовых топологических групп*, Докл. АН СССР, **285**:4 (1985), 824–827.

[7] В. В. Успенский, *Ретракты топологических групп и компакты Дугунджи*, Топология и ее приложения, Тр. МИАН СССР, **193** (1992), 192–196.

[8] М. М. Чобан, *К теории топологических алгебраических систем*, Тр. ММО, **48** (1985), 106–149.

[9] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.

[10] J. Brazas, S. Emery, *Free Quasitopological Groups*, Topology Appl., **326** (2023), 108416.

[11] P. M. Gartside, E. A. Reznichenko, O. V. Sipacheva, *Mal'tsev and retral spaces*, Topology Appl., **80**:1–2 (1997), 115–129.

[12] E. A. Reznichenko, V. V. Uspenskij, *Pseudocompact Mal'tsev spaces*, Topology Appl., **86**:1 (1998), 83–104.

[13] S. Świerczkowski, *Topologies on free algebras*, Proc. London Math. Soc., **14**:3 (1964), 566–576.

[14] V. V. Uspenskii, *The Mal'tsev operation on countably compact spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **30**:2 (1989), 395–402.

О. В. Сипачёва
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет, Москва, Россия
E-mail: o-sipa@yandex.ru

А. А. Солонков
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет, Москва, Россия
E-mail: 456700@bk.ru

Поступила в редакцию
15 сентября 2023 г.
После доработки
27 сентября 2023 г.
Принята к публикации
29 сентября 2023 г.