

Задачи к лекции 3

1. Пусть κ и λ — кардиналы, X и Y — непересекающиеся множества, $|X| = \kappa$ и $|Y| = \lambda$. Напомним, что *сумма* $\kappa + \lambda$ кардиналов κ и λ определяется как мощность множества $X \cup Y$, их *произведение* $\kappa \cdot \lambda$ — как мощность множества $X \times Y$, а λ -я *степень* κ^λ кардинала κ определяется как мощность множества $X^Y = \{f: Y \rightarrow X\}$. (Заметьте, что для каждого множества A существует ровно одно отображение $f: \emptyset \rightarrow A$ с пустой областью определения (это пустое множество), так что $\kappa^0 = 1$ для любого кардинала κ ; заметьте также, что степень 0^κ не определена для $\kappa \neq 0$.) Проверьте следующие свойства этих операций (ниже κ, λ и μ — кардиналы):

а) ассоциативность сложения и умножения:

$$(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu), \quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu);$$

б) коммутативность сложения и умножения:

$$\kappa + \lambda = \lambda + \kappa, \quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa;$$

в) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu;$$

г) монотонность:

если $\kappa \leq \lambda$, то $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$, $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$ и $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$;

если $1 \leq \kappa$ и $\lambda \leq \mu$, то¹⁾ $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$;

д) если κ бесконечен, то $\kappa \cdot \kappa = \kappa$;

е) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они отличны от нуля, то

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\};$$

ё) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$, $\kappa^{\lambda \cdot \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$;

ж) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa \geq 2$ и $\lambda \geq 1$, то

$$\max\{\kappa, 2^\lambda\} \leq \kappa^\lambda \leq \max\{2^\kappa, 2^\lambda\};$$

в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda = \kappa^\lambda$ для любого $\kappa \leq 2^\lambda$, $\kappa \geq 2$.

2. Докажите *теорему Кёнига*: если A — произвольное множество и для каждого $\alpha \in A$ X_α и Y_α — множества, удовлетворяющие условию $|X_\alpha| < |Y_\alpha|$, то

$$\left| \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right| < \left| \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \right|.$$

Заметьте, что из этой теоремы немедленно вытекает теорема Кантора: $\kappa < 2^\kappa$ для любого кардинала κ .

3. Покажите, что если X — произвольное бесконечное множество, A — произвольное множество мощности $|A| \leq |X|$ и для каждого $\alpha \in A$ X_α — множество мощности $|X_\alpha| \leq |X|$, то $\left| \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right| \leq |X|$. Останется ли это утверждение верным, если всюду заменить знак « $\leq$ » на « $<$ »?

4. а) Докажите, что любое бесконечное множество X равномощно множеству $[X]^{<\aleph_0}$ всех его конечных подмножеств.

б) Покажите, что для любого бесконечного множества X и любого кардинала $\kappa \leq |X|$ множество $[X]^\kappa$ всех подмножеств X мощности κ равномощно множеству X^κ .

в) Верно ли, что любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?

г) Верно ли, что в предположении справедливости континуум-гипотезы любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?

¹⁾ Предупреждение: обратное неверно — существует модель ZFC, в которой $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.