Задачи к лекции 2

1. Пусть X — любое множество и $\mathscr{F}$ — любое семейство множеств. Объединение $\bigcup\mathscr{F}$ семейства $\mathscr{F}$ — это множество всех элементов всех множеств из этого семейства. Можно считать, что множества в семействе $\mathscr{F}$ индексированы элементами некоторого (произвольного) индексного множества A: $\mathscr{F}=\{F_\alpha:\alpha\in A\}$. В этом случае для объединения семейства $\mathscr{F}$ наряду с обозначением $\bigcup F$ используются обозначения $\bigcup\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ и $\bigcup\limits_{\alpha\in A}F_\alpha$. Аналогичные обозначения используются для пересечения семейства $\mathscr{F}$ (оно состоит из элементов, принадлежащих всем множествам семейства $\mathscr{F}$ одновременно).

Докажите, что

$$X\cap\bigcup\mathscr{F}=\bigcup\{X\cap Y:Y\in\mathscr{F}\}\qquad\text{и}\qquad X\cup\bigcap\mathscr{F}=\bigcap\{X\cup Y:Y\in\mathscr{F}\},$$

т.е.

$$X\cap\bigcup_{\alpha\in A}F_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A}(X\cap F_\alpha)\qquad\text{и}\qquad X\cup\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}(X\cup F_\alpha).$$

2. Докажите, что для любого множества X и любого семейства множеств $\mathscr{F}=\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ выполнены *законы де Моргана*:

$$X\setminus\bigcup\mathscr{F}=\bigcap\{X\setminus Y:Y\in\mathscr{F}\}\qquad\text{и}\qquad X\setminus\bigcap\mathscr{F}=\bigcup\{X\setminus Y:Y\in\mathscr{F}\},$$

т.е.

$$X\setminus\bigcup_{\alpha\in A}F_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}(X\setminus F_\alpha)\qquad\text{и}\qquad X\setminus\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A}(X\setminus F_\alpha).$$

3. Проверьте, что для любых множеств $X_1\subset X_2\subset X$ и $Y_1\subset Y_2\subset Y$ и любого отображения $f\colon X\to Y$

$$\begin{array}{lcl}
f(X_1)\subset f(X_2) & \text{и} & f^{-1}(Y_1)\subset f^{-1}(Y_2);\\
f(X_1\cap X_2)\subset f(X_1)\cap f(X_2) & \text{и} & f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2);\\
f(X_1\cup X_2)=f(X_1)\cup f(X_2) & \text{и} & f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2);\\
f(X_2\setminus X_1)\supset f(X_2)\setminus f(X_1) & \text{и} & f^{-1}(Y_2\setminus Y_1)=f^{-1}(Y_2)\setminus f^{-1}(Y_1);\\
f(X_1\vartriangle X_2)\supset f(X_1)\vartriangle f(X_2) & \text{и} & f^{-1}(Y_1\vartriangle Y_2)=f^{-1}(Y_1)\vartriangle f^{-1}(Y_2);\\
f^{-1}\big(f(X_1)\big)\supset X_1 & \text{и} & f\big(f^{-1}(Y_1)\big)=Y_1\cap f(X).
\end{array}$$

Как изменятся эти формулы для инъективных, сюръективных и биективных отображений?

4. Элемент x упорядоченного множества $(X,\leqslant)$ называется *максимальным* (*минимальным*), если всякий элемент $y\in X$, удовлетворяющий неравенству $x\leqslant y$ ($y\leqslant x$), совпадает с x. Элемент x упорядоченного множества $(X,\leqslant)$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если для всякого $y\in X$ выполнено неравенство $y\leqslant x$ ($x\leqslant y$).

а) Всякий ли максимальный (минимальный) элемент в упорядоченном множестве является наибольшим (наименьшим)? Всякий ли наибольший элемент является максимальным?

б) Может ли упорядоченное множество иметь несколько максимальных элементов? несколько наибольших элементов? не иметь ни максимальных, ни наибольших элементов?

в) Верно ли, что если упорядоченное множество имеет единственный максимальный элемент, то этот элемент наибольший?

5. *Колексикографический порядок* на плоскости и полуплоскости определяется подобно лексикографическому, только первая и вторая координаты меняются ролями: $(x_1,y_1)\leqslant(x_2,y_2)$, если либо $y_1<y_2$, либо $y_1=y_2$ и $x_1\leqslant x_2$.

Сравните следующие топологии на верхней полуплоскости (вместе с граничной прямой):

а) топология, индуцированная из евклидовой плоскости;

б) топология, индуцированная из плоскости с топологией лексикографического порядка;

в) топология, индуцированная из плоскости с топологией колексикографического порядка;

г) топология, порождённая лексикографическим порядком на верхней полуплоскости;

д) топология, порождённая колексикографическим порядком на верхней полуплоскости.

6. Опишите топологию, индуцированную на граничной прямой $y=0$ из верхней полуплоскости с топологией, порождённой лексикографическим порядком на этой полуплоскости.

7. Покажите, что у топологии подпространства вещественной прямой (с обычной топологией), состоящего из всех иррациональных чисел, имеется счётная база, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Верно ли это для подпространства, состоящего из рациональных чисел?

8. Говорят, что топологическое пространство *удовлетворяет первой аксиоме счётности* или является пространством *с первой аксиомой счётности*, если в каждой точке этого пространства имеется счётная локальная база. (Говорят также, что топологическое пространство *удовлетворяет второй аксиоме счётности* или является пространством *со второй аксиомой счётности*, если у топологии этого пространства имеется счётная база.)

Приведите пример топологического пространства без первой аксиомы счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

9. Пусть X — топологическое пространство и $Y\subset X$. Говорят, что Y — множество *типа G_δ* или *G_δ-множество* в X, если Y является пересечением счётного числа открытых в X множеств. Вместо «одноточечное множество типа G_δ» говорят «точка типа G_δ».

а) Заметьте, что в метризуемом пространстве все замкнутые множества имеют тип G_δ.
б) Является ли множество всех иррациональных чисел G_δ-подмножеством вещественной прямой с обычной топологией? Является ли таковым множество всех рациональных чисел?
в) Заметьте, что в пространстве с первой аксиомой счётности все точки имеют тип G_δ. Верно ли, что в пространстве с первой аксиомой счётности все замкнутые множества имеют тип G_δ?