

Программа

1. Фильтр, база фильтра. Ультрафильтр. Главные и неглавные ультрафильтры. Существование неглавных ультрафильтров. Теорема: любое центрированное семейство подмножеств любого множества содержится в ультрафильтре. Основное свойство ультрафильтров. Отображения фильтров и ультрафильтров.
2. Топологическое пространство. Окрестности, замыкания, плотные множества. Сходимость фильтров. Характеризация точек прикосновения в терминах сходимости фильтров и ультрафильтров. Непрерывность отображений. Характеризация непрерывности в терминах сходимости ультрафильтров.
3. Компактные пространства. База топологии. Хаусдорфовы пространства, подпространства. Компактность и замкнутость в хаусдорфовых пространствах. Регулярность хаусдорфовых компактных пространств. Характеризация компактности в терминах сходимости ультрафильтров.
4. Топологическое пространство ультрафильтров, восемь его свойств.
5. Полугруппа ультрафильтров.
6. Две теоремы о компактных полугруппах.
7. Теорема Хиндмана. Следствие: теорема Шура.
8. Топологические группы: определение, примеры, специфические свойства. Топологические кольца. Алгебраически изолированные точки.
9. Теорема Арнаутова.
10. Теорема ван дер Вардена.
11. Топологическое (тихоновское) произведение. Теорема Тихонова о компактности произведений.
12. Теорема компактности для разбиений. Конечные версии комбинаторных теорем (на примере теоремы Шура).
13. Объединение множества минимальных идеалов в полугруппе, его связь с правыми идеалами.
14. Естественный порядок на множестве идемпотентов полугруппы. Теорема: для любого идемпотента e в компактной полугруппе S каждый минимальный идеал в Se содержит идемпотент, не превосходящий e . Теорема о минимальных идемпотентах.
15. Толстые множества в группах. Теорема о толстых множествах. Критерий толстоты в полугруппе N .
16. Синдетические множества в полугруппах. Теорема двойственности. Теорема о синдетических множествах. Критерий синдетичности в полугруппе N .
17. Кусочно синдетические множества. Теорема о кусочно синдетических множествах.
18. Действие полугруппы на множестве. Динамическая система. Подсистемы, орбиты, транзитивные системы, минимальные системы. Теорема о минимальных подсистемах.
19. Множество времён возврата. Теорема о синдетических множествах возврата (без доказательства).
20. Рекуррентные точки. Теорема: x рекуррентна тогда и только тогда, когда $px = x$ для некоторого ультрафильтра p , отличного от 1.
21. Топологическое пространство N^* . Его мощность. Отсутствие в нём сходящихся последовательностей.
22. P -точки. Вывод неоднородности N^* из существования P -точки в N^* .
23. Критерий того, что неглавный ультрафильтр является P -точкой.
24. Четыре типа неглавных ультрафильтров на N : определение в терминах разбиений и в терминах отображений. Определение порядка Рудин–Кейслера. Определение эквивалентности ультрафильтров. Существование несравнимых ультрафильтров. Теорема о том, что всякий ультрафильтр, не превосходящий некоторого P -ультрафильтра в смысле порядка Рудин–Кейслера, тоже является P -ультрафильтром, и что всякий селективный ультрафильтр минимален. Определение порядка Рудин–Бласса. Теорема о том, что всякий ультрафильтр, не превосходящий некоторого быстрого ультрафильтра в смысле порядка Рудин–Бласса, тоже является быстрым, и что всякий Q -ультрафильтр минимален.
25. Рамсеевские ультрафильтры. Равносильность рамсеевости селективности. Существование рамсеевских ультрафильтров в предположении справедливости континуум-гипотезы.
26. Быстрые ультрафильтры, их характеристики.
27. Тензорное произведение ультрафильтров. Теорема: тензорное произведение любого ультрафильтра на N и быстрого ультрафильтра является быстрым. Следствие: множество быстрых ультрафильтров — левый идеал. Существование быстрого идемпотента. Доказательство того, что тензорные произведения и идемпотенты не бывают Q - и P -ультрафильтрами.