

Определения (1 балл).

1. Метрическое пространство.
2. Предельная точка множества.
3. Гомеоморфизм.
4. Первая аксиома счетности.
5. Консервативное семейство множеств.
6. Связность.
7. Гомотопический класс отображений.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Отображения гомотопических классов отображений.
2. Сохранение аксиом отделимости произведениями.
3. Компоненты связности.
4. Теорема Урысона о метризуемости нормального пространства со счетной базой.

Задачи (10 баллов).

1. Доказать, что если два непрерывных отображения $f, g : X \rightarrow Y$ совпадают на всюду плотном множестве $A \subset X$, то они совпадают.
2. Докажите, что любое метрическое пространство нормально.
3. Доказать, что для любого открытого покрытия ω метрического компакта X существует $\epsilon > 0$ такое, что покрытие X из открытых шаров радиуса ϵ вписано в покрытие ω . Можно ли условие компактности метрического пространства заменить условием рассмотрения конечных покрытий?
4. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то гомотопические классы отображений произвольного пространства Z в X и Y соответственно, биективны.

Определения (1 балл).

1. Топологическое пространство.
2. Изолированная точка.
3. Слабая топология на пространстве относительно семейства отображений.
4. Вторая аксиома счетности.
5. Компактность
6. Линейная связность.
7. Обратная петля.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Отображения $X \times Y \rightarrow Z$ и $X \rightarrow C(Y, Z)$.
2. Теорема Брауэра–Титце–Урысона.
3. Компактные пространства.
4. Пространства с отмеченной точкой. Операции над ними.

Задачи (10 баллов).

1. Докажите, что для любого подмножества A метрического пространства (X, ρ) функция $f_A : X \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_A(x) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$ непрерывна. Всегда ли существует точка $a \in A$ такая, что $f_A(x) = \rho(x, a)$?
2. Докажите, что любое счетное регулярное пространство нормально.
3. Доказать, что подмножество A пространства $\mathbb{R}^n$ компактно в том и только том случае, если оно замкнуто и ограничено. Привести примеры, показывающие существенность обоих условий.
4. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то их гомотопические классы отображений в произвольное пространство биективны.

Определения (1 балл).

1. Топология метрического пространства.
2. Граничная точка множества.
3. Диагональное произведение отображений.
4. Нормальное пространство.
5. Центрированное семейство множеств.
6. Индуктивно-нульмерное пространство.
7. Произведение петель.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Теорема Урысона о метризуемости нормального пространства со счетной базой.
2. Лемма Урысона.
3. Компактность произведения компактных пространств.
4. Множество $\pi_1(X, x_0)$ и умножение в нем.

Задачи (10 баллов).

1. Следующие условия на отображение $f : X \rightarrow Y$ эквивалентны:
 - (a) отображение f — непрерывно;
 - (b) прообраз любого замкнутого множества замкнут.
2. Метризуема ли прямая Зоргенфрея?
3. Покажите, что любое нормальное пространство со счетной базой является всюду плотным подмножеством метризуемого компакта.
4. Докажите гомотопическую эквивалентность тора T^2 с вырезанным диском D^2 (т.е. ручки) и букета двух окружностей $S^1 \vee S^1$.

Определения (1 балл).

1. Открытые, замкнутые множества.
2. Точка прикосновения множества.
3. Произведение пространств и отображений.
4. Регулярное пространство.
5. Локальная компактность.
6. Вполне несвязное пространство.
7. Фундаментальная группа.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Фундаментальная группа окружности.
2. Произведение нормальных пространств.
3. Лемма Куратовского–Цорна.
4. Операции над топологическими пространствами: цилиндры, конусы.

Задачи (10 баллов).

1. Будет ли пересечение всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?
2. Докажите гомеоморфность пространства X и графика его произвольного непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$. Верно ли утверждение для произвольного отображения?
3. Докажите, что счетное пересечение связных компактных подмножеств хаусдорфова пространства A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно.
4. Найдите счетное число попарно гомотопически эквивалентных пространств, не являющихся попарно гомеоморфными.

Определения (1 балл).

1. Функционально открытые (замкнутые) множество.
2. Внутренняя точка множества.
3. Сумма пространств и отображений.
4. Аксиома отделимости T_4 .
5. Финальная компактность.
6. Компонента связности.
7. Стягиваемое пространство.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Изоморфность групп $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ линейно связных пространств.
2. Компактность произведения компактных пространств.
3. Канторovo совершенное множество.
4. Операции над непрерывными отображениями.

Задачи (10 баллов).

1. Докажите, что в любом всюду плотном подмножестве $\mathbb{R}$ имеется счетное всюду плотное подмножество.
2. Докажите гомеоморфность пространства X и графика его произвольного непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$.
Верно ли утверждение для произвольного отображения?
3. Докажите, что в компактном хаусдорфовом пространстве компонента связности точки совпадает с пересечением всех открыто-замкнутых множеств, ее содержащих. Можно ли отказаться от условия компактности?
4. Непрерывные отображения $f, g : X \rightarrow Y \times Z$ гомотопны в том и только том случае, если гомотопны пары композиций $pr_Y \circ f, pr_Y \circ g$ и $pr_X \circ f, pr_X \circ g$, где pr_X и pr_Y — проекции в произведении на соответствующие сомножители.

Определения (1 балл).

1. Окрестность множества.
2. Частичный порядок на семействе топологий множества.
3. Замкнутое (открытое) отображение.
4. Аксиома отделимости T_3 .
5. Разбиение единицы.
6. Компонента линейной связности.
7. Гомотопический тип пространств.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Критерий односвязности линейно связного пространства.
2. Лемма Александера.
3. Кривая Пеано.
4. Равномерно сходящиеся последовательности непрерывных функций.

Задачи (10 баллов).

1. Докажите, что если A нигде не плотное подмножество, то $\text{Cl}A$ также нигде не плотное подмножество.
2. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{O}_1$ и компактная $\mathcal{O}_2$ топологии. Показать, что если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.
3. Пусть I и O — замкнутая и открытая компоненты линейной связности компакта $X = \sin 1/x$. Докажите, что если при непрерывном отображении $f : X \rightarrow X$ существует точка $x \in O$, для которой $f(x) \in I$, то и $f(X) \subset I$.
4. Докажите гомотопность любых непрерывных не сюръективных отображений $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Определения (1 балл).

1. Внутренность множества.
2. Всюду плотное подмножество.
3. Факторное отображение.
4. Аксиома отделимости T_2 .
5. Приклеивание пространства по отображению.
6. Локальная связность.
7. Гомотопическая эквивалентность пространств.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Отношение гомотопической эквивалентности пространств — отношение эквивалентности.
2. Нормальность паракомпактного пространства.
3. Лемма об ужатии.
4. Аксиомы отделимости.

Задачи (10 баллов).

1. Доказать, что подмножество A метрического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда предел всякой сходящейся последовательности точек из множества A принадлежит также множеству A .
2. Докажите, что отображение $f : X \rightarrow Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.
3. Доказать, что открытое подмножество прямой $\mathbb{R}^1$ имеет счетное число компонент связности.
4. Докажите гомотопность любых непрерывных отображений $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Определения (1 балл).

1. Замыкание множества.
2. Предбаза топологии.
3. Факторная топология.
4. Аксиома отделимости T_1 .
5. Паракомпактность.
6. Компактно-открытая топология.
7. Односвязное пространство.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Отношение гомотопности непрерывных отображений — отношение эквивалентности.
2. Паракомпактность регулярного финально компактного пространства.
3. Разбиение единицы.
4. Операция произведения топологических пространств.

Задачи (10 баллов).

1. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ заданные формулами $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ и $\rho_2(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$ являются метриками на множестве X , эквивалентными метрике ρ , и сравнить открытые и замкнутые шары метрик ρ , ρ_1 и ρ_2 .
2. Пусть X — хаусдорфово пространство, K_α , $\alpha \in A$, — семейство компактных подмножеств, U — окрестность $\cap\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Тогда существует конечное подмножество $A_{Fin} \subset A$ такое, что $\cap\{K_\alpha : \alpha \in A_{Fin}\} \subset U$.
3. Доказать связность отрезка, пространств $\mathbb{R}^n$ и сфер S^n , $n \in \mathbb{N}$.
4. Можно ли в определении компактно-открытой топологии на множестве отображений заменить компакты на конечные множества?

Определения (1 балл).

1. Граница множества.
2. База топологии.
3. Непрерывное отображение топологических пространств.
4. Аксиома отделимости T_0 .
5. Локально конечное семейство множеств.
6. Топология равномерной сходимости.
7. Гомотопия отображений.

Теоретические вопросы (5 баллов).

1. Метризуемость счетного произведения метризуемых пространств.
2. Лемма Урысона.
3. Лемма Александра.
4. Фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$.

Задачи (10 баллов).

1. Докажите, что базой топологии метрического пространства является множество открытых шаров рациональных радиусов, центрами которых являются точки произвольного всюду плотного подмножества.
2. Доказать, что метризуемое пространство X компактно в том и только том случае, если любая вещественная функция на X ограничена.
3. Докажите, что счетное нормальное пространство несвязно. Оцените снизу мощность бесконечного нормального связного пространства.
4. Пусть X — метризуемое пространство. Доказать, что множество путей (петель) в компактно-открытой топологии метризуемо.