Введение в топологию

Кривые

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 11, 16.11.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Деревья

Частично упорядоченное множество $(T, <)$ называется *деревом*, если для каждого $x \in X$ множество

$$\mathsf{pr}(x, T) = \{y \in T \,:\, y < x\}$$

всех *предшественников* элемента x является вполне упорядоченной цепью.

Элементы дерева называются *узлами*.

Минимальные элементы T называются *корнями*.

Максимальные элементы T называются *терминальным* узлами, то есть x терминальный узел, если $\{y \in T \,:\, x < y\} = \varnothing$.

Два узла $x, y \in T$ называются *сравнимыми* если либо $x < y$, либо $x = y$, либо $y < x$.

Порядковый тип $\mathsf{Ord}(\mathsf{pr}(x, T))$ предшественников $\mathsf{pr}(x, T)$ узла x называется *высотой* x.

Для ординала α, обозначим через $\mathsf{Lv}_\alpha(T)$ множество всех узлов в T высоты α. Множество $\mathsf{Lv}_\alpha(T)$ называется *α-уровень дерева* T.

Высотой дерева T называется минимальный ординал α, для которого α-уровень $\mathsf{Lv}_\alpha(T)$ пуст.

> Понятие дерева встречается в разных разделах математики, информатики и программировании. Терминология в разных разделах и в работах разных авторов отличается. В теории графов узлы называются вершинами, а терминальные узлы листьями.

Подмножество $S \subset T$ называется *поддеревом*, если $\mathsf{pr}(x, T) \subset S$ для $x \in S$. Отметим, что $\mathsf{pr}(x, T) = \mathsf{pr}(x, S)$ и высота узла x в T и S совпадают для $x \in S$.

Индукция по дереву

Метод индукции построения и доказательства распространяется на случай, когда индексное множество является деревом.

Пусть T дерево и $P(t)$ есть некоторое утверждение для каждого $t \in T$.

Предположим мы доказали:

- База индукция. $P(t)$ верно для каждого корня t дерева T;
- Шаг индукция. Если $u \in T$ и $P(t)$ верно для каждого $t < u$, то $P(u)$ верно.

Тогда $P(t)$ верно для каждого $t \in T$.

Аналогично определяется построение индукцией по T.

Предположим мы построили:

- База индукция. Строим множество M_t для каждого корня t дерева T;
- Шаг индукция. Если $u \in T$ и построено M_t для каждого $t < u$, то тогда определяем M_u.

Тогда мы построили M_t для каждого $t \in T$.

Полные M-арные деревья

Пусть M есть множество. Обозначим

$$M^{<\omega} = \bigcup_{n=0}^{\infty} M^n.$$

Множество $M^{<\omega}$ состоит из конечных последовательностей элементов из M. Обозначим через $\mathsf{lt}(x)$ длину n последовательности $u \in M^n$. Нулевая степень M^0 состоит из пустой последовательности длины ноль — $\varnothing$.

Пусть $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in M^n \subset M^{<\omega}$. Обозначим

$$u \restriction m = (u_0, ..., u_{m-1})$$

для $m \leqslant n$ — *начальный сегмент* последовательности u длины m.

Введем частичный порядок на множестве $M^{<\omega}$. Пусть $v, u \in M^{<\omega}$. Положим $v < u$, если v является начальным сегментом u и $\mathsf{lt}(v) < \mathsf{lt}(u)$. Другими словами, $v < u$, если $v = u \restriction n$ для некоторого $n < \mathsf{lt}(u)$.

Если $v < u$, то будем также говорить, что u *продолжает* v.

Множество $\{v \in M^{<\omega} \ : \ v < u\}$ является конечной цепью для $u \in M^{<\omega}$. Следовательно, $M^{<\omega}$ является деревом. Высота дерева $M^{<\omega}$ равна ω.

Дерево $M^{<\omega}$ называется *полным M-арным* деревом. В дереве $M^{<\omega}$ есть единственный корень, пустая последовательность $() = \varnothing \in M^0$. Высота узла из $M^{<\omega}$ совпадает с длиной. Для $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in M^n$ и $x \in M$ обозначим

$$u \frown x = (u_0, ..., u_{n-1}, x) \in M^{n+1}.$$

Бесконечная последовательность $s = (s_0, s_1, ...) \in M^\omega$ называется *бесконечной ветвью* дерева T, если $s \restriction n = (s_0, s_1, ..., s_{n-1}) \in T$ для всех $n \in \omega$. Множество всех бесконечных ветвей называется *телом* дерева T и обозначается как $[T]$.

Для $s \in [T]$ и $u \in T$, будем говорить *u является начальным сегментом s* или *s продолжает s*, если $u = s \restriction n$ для $n = \mathsf{lt}(u)$.

Продолжим частичный порядок с T на $T \cup [T]$. Различные элементы из $[T]$ попарно не сравнимы. Если $u \in T$ и $s \in [T]$, то $u < s$ если s продолжает u. Относительно этого порядка, множество $T \cup [T]$ является деревом, в котором T поддерево $T \cup [T]$ и $[T]$ является ω-уровнем дерева $T \cup [T]$.

> Данное определение ветвей дерева соответствует использованию деревьев в дискриптивной теории множеств. В других разделах математики, ветвь дерева — максимальная цепь в дереве. Бесконечные ветви в нашем контексте также называются ветвь сквозь дерево или путь сквозь дерево. *Ветвъ сквозъ дерево* — это ветвь, длина (порядковый тип) которой совпадает с высотой дерева.

Пространство Бэра

Поддеревья полного ω-арного дерева $\omega^{<\omega}$ назовем *дескриптивными деревьями.*

Пусть T есть дескриптивное дерево. Для $u \in T$, обозначим

$$W(u,T) = \{s \in [T] : u < s\}.$$

Несложно проверяется следующее утверждение.

Утверждение

Пусть $v, u \in T$. *Тогда*

1. *если* $v < u$, *то* $W(v,T) \supset W(u,T)$;
2. *если* v *и* u *несравнимы, то* $W(v,T) \cap W(u,T) = \varnothing$.

Обозначим

$$\mathcal{B}_T = \{W(u, T) : u \in T\}.$$

Семейство $\mathcal{M}$ подмножеств множества X называется *неархимедовым*, если для любых $U, V \in \mathcal{M}$, либо $U \cap V = \varnothing$, либо $U \subset V$, либо $V \subset U$.

Утверждение

Семейство $\mathcal{B}_T$ является неархимедовым семейством.

Семейство $\mathcal{B}_T$ является базой топологии.

На множестве $[T]$ будем рассматривать топологию, которая определяется с помощью базы топологии $\mathcal{B}_T$.

Метрика ρ на множестве X называется *неархимедовой*, если

$$\rho(x,z) \leqslant \max \rho(x,y), \rho(y,z)$$

для любых $x, y, z \in X$. Метрика ρ является неархимедовой если и только если семейство всех шаров является неархимедовым.

Определим на множестве $[T]$ неархимедову метрику ρ_T. Пусть $s = (s_n)_n \in [T]$ и $q = (q_n)_n \in [T]$. Положим $\rho_T(s,q) = 0$ если $s = q$. Если $s \neq q$ и $n = \min i \in \omega : s_i \neq q_i$, то положим

$$\rho_T(s,q) = \tfrac{1}{2^n}.$$

Утверждение

ρ_T является неархимедовой метрикой, которая задает топологию $[T]$.

Пространство Бэра

Пространство $[\omega^{<\omega}] = \omega^\omega$ называется *пространством Бэра*. Обозначим $\rho_B = \rho_{\omega^{<\omega}}$.

Из определения метрики ρ_T вытекает следующее утверждение.

Утверждение

$\rho_T = \rho_B|_{[T]}$. *Топология* $[T]$ *является топологией подпространства пространства Бэра* ω^ω.

Предложение

Топология пространство Бэра ω^ω является топологией произведения ω^ω, где на ω рассматривается дискретная топология.

Доказательство.

Пусть $u = (u_0, u_1, ..., u_{n-1}) \in \omega^{<\omega}$. Тогда базисная окрестность $W(u, \omega^{<\omega})$ пространства Бэра совпадает с базисной окрестностью $\prod_{i=0}^{\infty} U_i$ произведения ω^ω с топологией произведения, где $U_i = \{u_i\}$ для $i < n$ и $U_i = X$ для $i \geqslant n$. $\square$

Утверждение

Пространство $[T]$ *замкнуто в* ω^ω*.*

Обозначим

$$\widetilde{T} = \{s \restriction n \, : \, s \in [T], \; n \in \omega\}.$$

Дерево $\widetilde{T}$ называется *усечением* дерева T.

Утверждение

$[T] = [\widetilde{T}]$.

Дерево без терминальных узлов называется *обрезанным*. Обозначим

$$\mathsf{suc}(u, T) = \{x \in \omega : u^\frown x \in T\}$$

для $u \in T$.

Предложение

Пусть T дескриптивное дерево. Следующие условия эквивалентны:

1. *T обрезанное дерево;*
2. *$\mathsf{suc}(u, T) \neq \varnothing$ для всех $u \in T$;*
3. *$W(u, T) \neq \varnothing$ для всех $u \in T$;*
4. *$T = \widetilde{T}$.*

Доказательство.

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (2) вытекает из того, что узел $u \in T$ является терминальным, если и только если $\mathsf{suc}(u, T) = \varnothing$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $u = (u_0, \ldots, u_{n-1}) \in T$. Из (2) вытекает, что существует последовательность $u_n, u_{n+1}, \ldots$, такая что $s_m = (u_0, \ldots, u_{m-1}) \in T$ и $u_m \in \mathsf{suc}(s_m, T)$ для $m \geqslant n$. Тогда $s = (u_0, u_1, \ldots) \in [T]$ и $s \in W(u, T)$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $u = (u_0, \ldots, u_{n-1}) \in T$ и $s = (u_m)_m \in W(u, T)$. Тогда $u_n \in \mathsf{suc}(u, T)$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (4). По построению $T \supset \widetilde{T}$. Докажем $T \subset \widetilde{T}$. Пусть $u = (u_0, \ldots, u_{n-1}) \in T$. Из (3) вытекает, что $W(u, T) \neq \varnothing$. Пусть $s \in W(u, T) \subset [T]$. Тогда $u = s \restriction n$. Следовательно $u \in \widetilde{T}$.

Докажем (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $u = (u_0, \ldots, u_{n-1}) \in T$. Из (4) вытекает, что $u \in \widetilde{T}$. Следовательно, $u = s \restriction n$ для некоторого $s \in [T]$. Следовательно $s \in W(u, T)$. $\square$

Дерево T называется *совершенным*, если для любого $x \in T$ существуют несравнимые $u, v \in T$, для которых $x < u$ и $x < v$.

Из определений вытекает вытекает следующие утверждение.

Предложение

Совершенное дерево является обрезанным.

Пространство X называется *совершенным*, если в X нет изолированных точек.

Предложение

Пусть T обрезанное дескриптивное дерево. Тело $[T]$ дерева T совершенно если и только если дерево T совершенно.

Доказательство.

Докажем ($\Rightarrow$). Пусть $u \in T$. Так как T обрезано (предложение 3), то из предложения 2 вытекает, что $W(u, T) \neq \varnothing$. Так как $[T]$ совершенное пространство, то $|W(u, T)| > 1$. Пусть $s, q \in W(u, T)$ различные элементы. У s и q есть непересекающиеся окрестности $W(s', T)$ и $W(q', T)$, лежащие в $W(u, T)$. Тогда s' и q' больше u и несравнимы.

Докажем ($\Leftarrow$). Достаточно доказать, что $|W(u, T)| > 1$ для $u \in T$. Пусть $a, b \in T$ больше u и несравнимы. Тогда $W(a, T), W(b, T) \subset W(u, T)$, $W(a, T)$ и $W(b, T)$ не пусты (предложение 2), $W(a, T) \cap W(b, T) = \varnothing$ (утверждение 1). $\square$

Дерево T называется *компактным*, если T обрезанное дерево и для любого $u \in T$ множество $\mathsf{suc}(u, T)$ конечно.

Дерево T компактно если и только если T обрезанное дерево и каждый уровень в T конечен.

Предложение

Пусть T обрезанное дескриптивное дерево. Тело $[T]$ дерева T компактно если и только если дерево T компактно.

Доказательство.

Пусть π_n есть проекция ω^ω на n-ю копию ω. Положим $L_n = \pi_n([T])$. Дескриптивное обрезанное дерево T компактно если и только если каждое L_n конечно.

Докажем ($\Rightarrow$). Так как проекция π_n непрерывна и $[T]$ компактно, то L_n конечно.

Докажем ($\Leftarrow$). Так как $[T] \subset \prod_{n\in\omega} L_n$, все L_n конечны и $[T]$ замкнуто в ω^ω (утверждение 6), то $[T]$ замкнутое подпространство компактного пространства $\prod_{n\in\omega} L_n$. Следовательно, $[T]$ компактно. $\square$

A-системы

Пусть T есть дескриптивное дерево и X топологическое пространство. Отображение $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ называется *A-системой*.

> Стандартное определение A-системы: отображение из $\omega^{<\omega}$ в $\mathsf{Exp}(X)$. Отображение $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ можно продолжить до $\omega^{<\omega}$ в $\mathsf{Exp}(X)$: $\Phi(u) = \varnothing$ для $u \in \omega^{<\omega} \setminus T$.

Будем говорить, что *последовательность множеств* $(M_n)_n$ *сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует N, такое что $M_n \subset U$ для $n > N$.

Рассмотрим условия на Φ:

(A$_1$) $\Phi(v) \subset \Phi(u)$ для $v, u \in T$ и $v < u$;

(A$_2$) $\Phi(u)$ замкнуто в X для $u \in T$;

(A$_3$) для $s \in [T]$, пересечение $\bigcap_{n\in\omega} \Phi(s \restriction n)$ состоит из одной точки $\widehat{\Phi}(s)$ и последовательность множеств $(\Phi(s \restriction n))_{n\in\omega}$ сходится к точке $\widehat{\Phi}(s)$;

A-систему Φ назовем *непрерывной*, если выполняются условия (A$_1$), (A$_2$) и (A$_3$). Для $s \in [T]$, единственный элемент $\bigcap_{n\in\omega} \Phi(s \restriction n)$ обозначим через $\widehat{\Phi}(s)$.

Утверждение

Если A-система Φ непрерывна, то отображение $\widehat{\Phi} : [T] \to X$ непрерывно.

Доказательство.

Пусть $s \in [T]$ и U окрестность точки $\widehat{\Phi}(s)$. Из ($\mathsf{A}3$) вытекает, что $\Phi(s \restriction n) \subset U$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда

$$\widehat{\Phi}(W(s \restriction n, T)) \subset \Phi(s \restriction n) \subset U.$$

$\square$

Утверждение

Предположим, что для А-системы Φ *выполняется условия* (A_1), (A_2) *и следующие условие:*

(A_3^m) *существует полная метрика* ρ *на* X, *которая порождает топологию* X, *последовательность* $(\varepsilon_n)_n$ *положительных чисел, сходящаяся к* 0, *такие что*

$$\mathrm{diam}_\rho(\Phi(u)) < \varepsilon_n$$

для $u \in T$ *и* $n = \mathsf{lt}(u)$.

Тогда Φ *непрерывно.*

Утверждение

Предположим, что для А-системы Φ *выполняется условия* (A_1), (A_2) *и следующие условие:*

(A_3^c) *пространство* X *является хаусдофовым компактом и* $\bigcap_{n\in\omega} \Phi(s \upharpoonright n)$ *состоит не более чем из одной точки.*

Тогда Φ *непрерывно.*

Утверждение

Предположим, что A-операция Φ непрерывна и выполняется следующие условие:

(A4) *для $u \in T$, $\Phi(u) = \bigcup\{\Phi(u \frown l) : l \in \mathsf{suc}(u, T)\}$.*

Тогда $\widehat{\Phi}([T]) = \Phi(\varnothing)$.

Утверждение

Предположим, что A-операция Φ непрерывна и выполняется следующие условие:

(A5) *для $u \in T$, семейство $\{\Phi(u \frown l) : l \in \mathsf{suc}(u, T)\}$ является дискретным семейством;*

Тогда $F = \widehat{\Phi}([T])$ замкнуто в X и отображение $\widehat{\Phi} : [T] \to F$ является гомеоморфизмом.

Канторово множество и его непрерывные образы

Обозначим $\mathbf{2} = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ — дискретное двоеточие. Полное $\mathbf{2}$-арное дерево $\mathbf{2}^{<\omega}$ называется *канторовым* деревом.

Lemma

В метризуемом нульмерном компактном пространство семейство открыто-замкнутых множеств не более чем счетно.

Theorem

Любое метризуемое совершенное нульмерно компактное пространство X гомеоморфно $\mathbf{2}^{\omega}$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{B}$ все открыто-замкнутые подмножества X. Из леммы 1 вытекает, что $\mathcal{B}$ счетно. Пусть $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$.

Определим A-систему $\Phi : \mathbf{2}^{<\omega} \to \mathsf{Exp}(X)$. Положим $\Phi(\varnothing) = X$. Предположим, что построено открыто-замкнутое непустое $\Phi(u) \subset X$ для $u \in \mathbf{2}^{<\omega}$. Пусть

$$n = \min\{m \in \omega \ : \ F(u) \cap U_m \neq \varnothing \text{ и } F(u) \setminus U_m \neq \varnothing\}.$$

Положим $\Phi(u \frown 0) = F(u) \cap U_n$ и $\Phi(u \frown 0) = F(u) \setminus U_n$. Построение завершено.

Проверим, что Φ непрерывно. Условия (A_1) и (A_2) очевидны. Проверим условие (A_3^c) утверждения 9. ... Из утверждения 9 вытекает, что Φ непрерывно.

По построению, для Φ выполняется условия (A_4) и (A_5) утверждений 10 и 11. Из этих утверждений вытекает, что $\widehat{\Phi} : \mathbf{2}^{\omega} \to X$ является гомеоморфизмом. $\square$

В частности, $\mathbf{2}^\omega$ гомеоморфно канторовому множеству. Часто пространство $\mathbf{2}^\omega$ также называют канторовым множеством.

Theorem

Любое метризуемое компактное пространство X является непрерывным образом $\mathbf{2}^\omega$.

Доказательство

Пусть ρ есть метрика на X, определяющая топологию X.

Лемма

Построим совершенное компактное дискриптивное дерево T и непрерывную A-систему $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ таким образом, что ядро $\ker \Phi = \widehat{\Phi}([T])$ A-системы Φ совпадает с X.

Доказательство.

База индукции. Добавим $\varnothing$ в T и положим $\Phi(\varnothing) = X$.

Шаг индукции. Пусть построено $u \in T$, $l = \mathsf{lt}(u)$ и $\Phi(u) \subset X$ замкнутое непустое множество. Из леммы **??** вытекает, что существует замкнуто покрытие $\{F_0, F_1, ..., F_{n-1}\}$ множества $\Phi(u)$, такое что $\mathrm{diam}_\rho(F_i) < \frac{1}{2^l}$ для $i = 0, 1, ..., n-1$. Можно считать, что $n > 1$ — если $n = 1$, то семейство $\{F_0\}$ заменим на $\{F_0, F_1\}$, где $F_1 = F_0$. Для $i = 0, 1, ..., n-1$, добавим $u \frown i$ в дерево T и положим $\Phi(u \frown i) = F_i$.

Построение завершено.

По построению, $1 < |\mathsf{suc}(u, T)| < \omega$ для $u \in T$. Следовательно, дерево T совершенно и компактно. По построению, для $\mathcal{F}$ выполнятся (A_1), (A_2), (A_3^m) утверждения 8 и (A_4) предложения **??**. Из утверждения 9 вытекает, что Φ непрерывно. Из предложения **??** вытекает, что $\widehat{\Phi}([T]) = \Phi(\varnothing) = X$. $\square$

Пространство X является непрерывным образом тела $[T]$. Так как T совершенно и компактно, то $[T]$ совершенно, компактно и нульмерно (предложения **??**, **??** и **??**, утверждение **??**). Из теоремы 2 вытекает, что $[T]$ гомеоморфно $\mathbf{2}^\omega$.

Конец