

Задание N 9

1. Доказать, что тихоновское произведение $\mathbb{R}^A$, где A несчетно, — не нормальное пространство.
2. Дать прямое доказательство не нормальности квадрата прямой Зоргенфрея (т.е. указать два дизъюнктивных замкнутых множества, у которых не существует дизъюнктивных окрестностей).
- 3* (Плоскость Немыцкого). Базу топологии на полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ образуют открытые шары

$$O_\varepsilon(x, y) \cap \mathbb{R}^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

и открытые шары с добавленной точкой касания

$$O_y(x, y) \cup \{(x, 0)\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Доказать, что плоскость Немыцкого — тихоновское не нормальное пространство.

4. Привести пример тихоновского не регулярного пространства.
- 5*. Доказать, что произведение $\mathbb{R}^A$ в ящичной топологии является тихоновским пространством.
- 6*. Доказать, что две метрики на одном и том же множестве топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда всякая сходящаяся последовательность точек этого множества в одной метрике, сходится и в другой.
- 7*. Докажите, что тихоновское произведение $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — линейное топологическое пространство (т.е. естественно определенные операции сложения и умножения на скаляры непрерывны).
8. Докажите, что любое подпространство тихоновского произведения $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, содержащее подмножество точек, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля, не нормируемо.
- 9*. Докажите, что топология ℓ^2 сильнее топологии на ℓ^2 как на подпространстве тихоновского произведения $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- 10*. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2 . Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x, y) \leq k_2 \rho_2(x, y)$ и $\rho_2(x, y) \leq k_1 \rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 топологически эквивалентны.
Пусть метрики ρ_1 и ρ_2 на X топологически эквивалентны. Будут ли они удовлетворять условию Задачи 7?
Привести пример (бесконечного) метризуемого пространства, любые две метрики на котором удовлетворяют условию Задачи 7.
11. Докажите, что любое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.