

Задание N 8

1*. Пусть $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Доказать, что функции $f + g$ ($(f + g)(x) = f(x) + g(x)$), fg ($(fg)(x) = f(x)g(x)$) и $\frac{1}{f}$ ($(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$), при условии $f(x) \neq 0, x \in X$, непрерывны.

2*. Пусть $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Доказать, что функции $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ и $|f| = \max\{f, -f\}$ непрерывны.

3*. Доказать, что любая непрерывная функция на прямой в топологии Зариского является постоянной.

4. Описать все непрерывные функции на пространствах из Примера 8.8 Лекции 2.

5*. *Разбиение единицы.* Пусть $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Открытое множество $U_\varphi = \{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}$ называется *носителем* функции φ и обозначается $\text{supp}(\varphi)$.

Пусть $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие X . Семейство непрерывных функций $\varphi_i : X \rightarrow [0, 1], i = 1, \dots, k$, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию u* , если

$$\text{Cl}(\text{supp}(\varphi_i)) \subset U_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

и

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1.$$

Доказать, что для всякого конечного открытого покрытия $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ нормального пространства X существует разбиение единицы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, подчиненное покрытию u .

6*. Существует ли непрерывная функция на плоскости $\mathbb{R}^2$, принимающая значение 0 на осях координат Ox и Oy и значение 1 на графике гиперболы $y = 1/x$?

7. Доказать, что любую равномерно непрерывную функцию на интервале $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ можно продолжить на $\mathbb{R}$.

8*. Пусть A — замкнутое подмножество метрического пространства (X, ρ) , $f : A \rightarrow I$ — непрерывное отображение. Доказать, что отображение

$$g(x) = \begin{cases} \inf\{f(a) + \frac{\rho(x, a)}{\rho(x, A)} - 1 : a \in A\} & x \in X \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

является непрерывным продолжением f на X .

9. Можно ли в теореме Брауэра–Титце–Урысона рассматривать продолжения отображений в $\mathbb{R}^n, n > 1$, в сферы $S^n, n \geq 1$?

10. Существует ли регулярное пространство X , содержащее более двух точек, на котором любая непрерывная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ постоянна?

11*. Доказать Лемму Урысона, используя теорему Брауэра–Титце–Урысона.

12. *Индуктивным пределом* семейства вложенных пространств $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, где X_n замкнутое подмножество $X_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, называется множество $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ с топологией: O открыто в X в том и только том случае, если $O \cap X_n$ открыто в $X_n, n \in \mathbb{N}$. Проверить корректность задания топологии и доказать, что подмножество $X_n, n \in \mathbb{N}$, замкнуто в X .

Доказать, что отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в том и только том случае, если $f|_{X_n}$ непрерывно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказать, что X нормально в том и только том случае, если X_n нормально, $n \in \mathbb{N}$.