

Задание N 7

1*. Доказать, что метризуемое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

2. Пусть X — топологическое пространство и $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность точек $x_n \in X$. Говорят, что последовательность ξ *сходится* к точке $x \in X$, если для всякой окрестности Ox точки x существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $x_n \in Ox$ для всех $n \geq n_0$.

Пусть пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Докажите, что в X замыкание любого подмножества A совпадает с множеством пределов всевозможных последовательностей точек множества A .

Докажите, что отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке x_0 в том и только том случае, если для любой последовательности (x_n) сходящейся к x последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$.

3*. Проверить выполнение аксиом счетности и сепарабельность произведения $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в ящичной топологии.

4*. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из любой его базы можно выбрать счетное семейство, являющееся базой.

5*. Выяснить выполнение первой и второй аксиом счетности, сепарабельность и метризуемость в пространствах из Примера 8.8 Лекции 2.

6*. Докажите, что в любом подмножестве $\mathbb{R}$ (со стандартной топологией) имеется счетное всюду плотное подмножество.

7*. Сохраняются ли первая (вторая) аксиомы счетности, сепарабельность пространства в сторону образа при непрерывных отображениях?

8. Будет ли факторпространство пространства, удовлетворяющего первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворять первой (второй) аксиоме счетности?

9. Докажите, что тихоновское произведение континуума сепарабельных пространств сепарабельно.

10. Существует ли счетное пространство, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности?

11. Привести пример сепарабельного пространства и его не сепарабельного подпространства.

12*. Докажите, что подмножество Z всюду плотно в X в том и только том случае, если пересечение любого непустого открытого подмножества X с Z непусто.

13. Найдите (опишите все) топологии на множестве X , для которых всюду плотно одноточечное множество $\{x\}$, где $x \in X$.

14*. Будет ли пересечение двух всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?

Будет ли пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно?

15*. Подмножество A пространства X *нигде не плотно*, если множество $X \setminus \text{Cl}A$ всюду плотно. Докажите, что канторово множество *нигде не плотно* в $\mathbb{R}$.

16*. Докажите, что если A *нигде не плотное* подмножество, то $\text{Cl}A$ также *нигде не плотное* подмножество.

17*. Докажите, что граница замкнутого (открытого) множества *нигде не плотна*. Приведите пример пространства и его подмножества, со всюду плотной границей.

18*. Проверьте верность утверждений:

- (a) непрерывный образ всюду плотного множества всюду плотен в образе;
- (b) непрерывный образ *нигде не плотного* множества *нигде не плотен* в образе.

19. Докажите, что в любом конечном T_0 -пространстве

- a) существует изолированная точка;
- б) множество изолированных точек всюду плотно.

20. Привести пример T_1 -пространства и последовательность точек в нем, имеющей ровно n пределов, где $n \in \mathbb{N}$ или бесконечно.

21. Докажите, что пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, хаусдорфово в том и только том случае, если любая последовательность точек в нем имеет не более одного предела.

22*. Доказать, что для непрерывных отображений $f, g : X \rightarrow Y$ в хаусдорфово пространство Y множество точек совпадения $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

Можно ли в Задаче и Предложении 22.4 Лекции 7 отказаться от условия хаусдорфовости образа?

23*. Докажите, что пространство X хаусдорфово в том и только том случае, если диагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ произведения замкнута в $X \times X$.

24*. Докажите, что для непрерывного отображения пространства X в хаусдорфово пространство Y график отображения замкнут в $X \times Y$. Следует ли из замкнутости графика отображения его непрерывность?

25*. Докажите, что пространство из Примера 8.8.5 Лекции 2 хаусдорфово не регулярно.

26*. Докажите, что выполнение аксиом T_0 и T_3 эквивалентно выполнению аксиом T_1 и T_3 .

27*. Докажите, что в регулярном пространстве любые две различные точки имеют дизъюнктные окрестности, замыкания которых не пересекаются.

Докажите, что следующие условия на пространство X равносильны:

а) X — нормальное пространство;

б) для всякого замкнутого множества F и всякой его окрестности OF существует такая окрестность O_1F , что $\text{Cl}(O_1F) \subset OF$;

в) любую дизъюнктную пару замкнутых множеств можно заключить в окрестности с непересекающимися замыканиями.

28. Докажите, что любое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально.

Докажите, что любое счетное регулярное пространство нормально.

29. Докажите, что линейно упорядоченное пространство с интервальной топологией нормально.

30*. Докажите, что всякое подпространство T_0 (соответственно T_1 , T_2 , регулярного) пространства является T_0 (соответственно T_1 , T_2 , регулярным) пространством. Докажите, что всякое замкнутое подмножество нормального пространства является нормальным пространством.

31*. Какие из аксиом отделимости сохраняются в сторону образа при непрерывных отображениях?

32. Пусть на множестве X даны топологии $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$. Если пространство $(X, \mathcal{T}_1)$ хаусдорфово (регулярно, нормально), то что можно сказать об отделимости пространства $(X, \mathcal{T}_2)$? Если пространство $(X, \mathcal{T}_2)$ хаусдорфово (регулярно, нормально), то что можно сказать об отделимости пространства $(X, \mathcal{T}_1)$?

33*. *Лемма об ужасии.* Пусть $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие нормального пространства X . Доказать, что существует такое открытое покрытие $v = \{V_1, \dots, V_k\}$ пространства X , что $\text{Cl}(V_i) \subset U_i$, $i = 1, \dots, k$.