

Задание N 6

1*. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывное отображение. Докажите, что если существует непрерывное отображение $g : Y \rightarrow X$ такое, что $f \circ g = \text{id}_Y$, то тогда f — факторное отображение.

Пусть $A \subset X$. Непрерывное отображение $f : X \rightarrow A$, для которого $f(a) = a$, $a \in A$, называется *ретракцией* X на A . Докажите, что ретракция — факторное отображение.

2*. Докажите, что факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\}$ (стягивание концов отрезка в точку) гомеоморфно окружности S^1 .

Рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ отношение эквивалентности $\mathcal{R}: x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Докажите, что факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по ее разбиению на классы отношения эквивалентности $\mathcal{R}$ гомеоморфно окружности S^1 .

3. Рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ отношение эквивалентности $\mathcal{R}: x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Найти факторпространство $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

4*. Докажите, что факторпространство B^2/S^1 замкнутого круга на плоскости по граничной сфере S^1 (стягивание окружности в точку) гомеоморфно сфере S^2 .

Докажите, что $\mathbb{R}^2/B^2$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$.

5*. Докажите, что факторпространство квадрата $I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без двух сторон $(0, 1) \times I$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, t)\}$, $t \in I$, гомеоморфно *цилиндру* $S^1 \times I$.

6*. Докажите, что факторпространство

- (а) цилиндра $S^1 \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества $S^1 \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(t, 0), (t, 1)\}$, $t \in S^1$,
- (б) квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, t)\}$, $\{(t, 0), (t, 1)\}$, $t \in I$,

гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

7*. Докажите, что факторпространство квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (t, 0)\}$, $\{(t, 1), (1, t)\}$, $t \in I$, гомеоморфен сфере S^2 .

8*. Факторпространство квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times [0, 1]$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, 1 - t)\}$, $t \in I$, называется *лентой Мебиуса*.

Факторпространство квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, t)\}$, $\{(t, 0), (1 - t, 1)\}$, $t \in I$, называется *бутылкой Клейна*.

Представьте бутылку Клейна как результат

- (а) факторизации цилиндра $S^1 \times I$,
- (б) факторизации ленты Мебиуса,
- (с) склейки по границам двух копий ленты Мебиуса посредством тождественного отображения,
- (д) склейки по границам двух копий цилиндра.

9*. Докажите, что факторпространство квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, 1 - t)\}$, $\{(t, 0), (1 - t, 1)\}$, $t \in I$, гомеоморфно проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

10*. Получить проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$

- (а) как результат склейки по границе диска B^2 и ленты Мебиуса,
- (б) как результат факторизации ленты Мебиуса.

11*. Описать канторово множество, используя представление точек отрезка $[0, 1]$ в троичной системе счисления. Описать отображение канторова множества на отрезок, используя данное представление.

12. Доказать, что любое несчетное замкнутое подмножество прямой $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

Доказать, что любое непустое замкнутое подмножество прямой $\mathbb{R}$ без изолированных точек имеет мощность континуум.