

Задание N 5

1*. Докажите, что n -ая степень прямой $\mathbb{R}$ (отрезка $I = [0, 1]$) гомеоморфна евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ (кубу I^n — подпространству евклидова пространства $\mathbb{R}^n$), $n \in \mathbb{N}$.

2*. Докажите, что тор T^2 из Примера 16.2.2. Лекции 5 гомеоморфен произведению окружностей $S^1 \times S^1$.

3*. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ множество $\{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ называется *графиком отображения*. Докажите гомеоморфность пространства X и графика его произвольного непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$. Верно ли утверждение для произвольного отображения?

4*. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}$ гомеоморфно $S^{n-2} \times \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, где S^m — m -мерная сфера.

5. $T^k = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_k$ — k -мерный тор. Вложите T^k в $\mathbb{R}^{k+1}$.

6. Вложите $S^1 \times B^2$, $S^1 \times S^1 \times I$, $S^2 \times I$ в $\mathbb{R}^3$, где B^2 — замкнутый круг единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$, S^2 — двумерная сфера.

7*. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$. Проверьте выполнение равенств:

- (a) $\text{Int}(A \times B) = \text{Int}A \times \text{Int}B$;
- (b) $\text{Cl}(A \times B) = \text{Cl}A \times \text{Cl}B$;
- (c) $\text{Bd}(A \times B) = \text{Bd}A \times \text{Bd}B$;
- (d) $\text{Bd}(A \times B) = (\text{Bd}A \times B) \cup (A \times \text{Bd}B)$;
- (e) $\text{Bd}(A \times B) = (\text{Cl}A \times \text{Bd}B) \cup (\text{Bd}A \times \text{Cl}B)$.

8. Докажите, что пространство Бэра (Задача 17 Задания N 2) гомеоморфно счетной степени счетного дискретного пространства (натуральные числа в дискретной топологии).

9. Докажите, что пространство Бэра гомеоморфно пространству иррациональных чисел. Докажите, что счетная степень пространства иррациональных чисел гомеоморфна пространству иррациональных чисел.

10. Докажите, что конечная степень пространства рациональных чисел гомеоморфна пространству рациональных чисел. Верно ли утверждение для счетной степени?

11*. Топология на произведении $\prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, базу которой образуют множества

$$\prod\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\},$$

где U_α — открытое подмножество X_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, называется *ящичной топологией*.

Докажите, что ящичная топология сильнее тихоновской топологии на произведении, и для конечных произведений они совпадают.

12. Докажите, что произведение $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ подпространств $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, в ящичной топологии совпадает с подпространством $\bigcap\{pr_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ произведения $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ в ящичной топологии.

13*. Докажите, что

$$\text{Cl}(\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}) = \prod\{\text{Cl } Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$$

для подмножества $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ произведения $\prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, в тихоновской или ящичной топологиях.

14*. Докажите, если произведение f отображений $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывно, то и каждое отображение f_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывно.

Верно ли Предложение 16.6 Лекции 5 и его обратное утверждение для произведения пространств $\prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ в ящичной топологии.

15*. Докажите, если диагональное произведение f отображений непрерывно, то и каждое отображение f_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывно.

Верно ли Предложение 16.8 Лекции 5 и его обратное утверждение для произведения пространств $\prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ в ящичной топологии.

16*. Пусть $X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{множество } \{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\} \text{ конечно}\}$. Найти замыкание X в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с тихоновской и ящичной топологиями.

17*. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\mathcal{T}_\rho$ — метрическая топология на X . Докажите, что метрика ρ непрерывна на квадрате пространства $(X, \mathcal{T}_\rho)$.

Докажите, что если метрика ρ непрерывна на квадрате пространства $(X, \mathcal{T})$, то $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_\rho$.