

Задание N 4

1*. Следующие условия на биективное отображение $f : X \rightarrow Y$ эквивалентны:

- (a) отображение f — гомеоморфизм;
- (b) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f(O)$ открыто;
- (c) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f(F)$ замкнуто;
- (d) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(O)$ открыто;
- (e) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(F)$ замкнуто.

2*. Если $f : X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, то для любого $A \subset X$ выполнено:

- (a) $f(\text{Cl}A) = \text{Cl}(f(A))$;
- (b) $f(\text{Int}A) = \text{Int}(f(A))$;
- (c) $f(\text{Bd}A) = \text{Bd}(f(A))$.

3*. Постройте гомеоморфизмы:

- (a) $[0, 1]$ на $[a, b]$, $a < b$;
- (b) $(0, 1)$ на $[0, 1]$;
- (c) $(0, 1)$ на $\mathbb{R}$.

Доказать, что $[0, 1]$, $[0, 1)$ и $(0, 1)$ попарно не гомеоморфны.

4*. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

- (a) $\mathbb{R}^2$;
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), y \in (0, 1)\}$;
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$;
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
- (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$;
- (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 > x\}$;
- (g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus (0, 0, 1)$ (сфера S^2 без точки).

5. Описать все гомеоморфизмы числовой прямой (отрезка $[0, 1]$).

6*. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

- (a) $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$;
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
- (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$;
- (e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 0\}$.

- 7*. Докажите, что сфера S^n с выкинутой точкой гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 8*. Докажите, что квадрат $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ гомеоморфен кругу $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
9. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup\{x_k : k = 1, \dots, n\}$ (все точки различны) гомеоморфно $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup\{D_k : k = 1, \dots, n\}$, где D_k — попарно дизъюнктные замкнутые круги.
10. В шаровом слое просверлили цилиндрическое отверстие, соединяющее граничные сферы. Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару в пространстве.
- 11*. Докажите, что пространства $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ попарно не гомеоморфны.
12. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется вложением, если f — гомеоморфизм X на подпространство $f(X)$. Доказать, что $\mathbb{Q}$ не вкладывается в $\mathbb{Z}$.
13. Доказать, что любое счетное метрическое пространство вложимо в $\mathbb{Q}$.
- 14*. Доказать, что прямая в евклидовой топологии, прямая в топологии Зариского и прямая Зоргенфрея попарно не гомеоморфны.
15. Привести пример непрерывного биективного отображения $f : X \rightarrow Y$ пространств X и Y , не являющегося гомеоморфизмом. Можно ли при этом потребовать дополнительно, что $X = Y$?
16. Существуют ли негомеоморфные пространства X и Y для которых определены непрерывные биекции $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$?
17. Всякая ли непрерывная биекция прямой в стандартной топологии (прямой Зоргенфрея, прямой в топологии Зариского) является гомеоморфизмом?
18. Докажите, что любое замкнутое выпуклое подмножество плоскости гомеоморфно или точке, или отрезку, или кругу, или лучу, или прямой, или полосе, или полуплоскости, или плоскости.