

Задание N 3

1*. Доказать:

- (1) $\text{Cl}A = A \cup \text{Bd}A$;
- (2) $\text{Int}A = A \setminus \text{Bd}A$;
- (3) $X \setminus \text{Bd}A = \text{Int}A \cup \text{Int}(X \setminus A)$;
- (4) $\text{Bd}A = \text{Cl}A \cap \text{Cl}(X \setminus A)$;
- (5) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Bd}A \subset A$;
- (6) A открыто тогда и только тогда, когда $\text{Bd}A \cap A = \emptyset$;
- (7) $A^d \setminus A = \text{Bd}A \setminus A$, где A^d — множество предельных точек A ;
- (8) A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^d \subset A$.

2*. Справедливы ли следующие соотношения:

- (1) если $A \subset B$, то $\text{Int}A \subset \text{Int}B$, $\text{Cl}A \subset \text{Cl}B$;
- (2) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}A \cap \text{Int}B$; $\text{Cl}(A \cap B) = \text{Cl}A \cap \text{Cl}B$; $\text{Bd}(A \cap B) = \text{Bd}A \cap \text{Bd}B$;
- (3) $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}A \cup \text{Int}B$; $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl}A \cup \text{Cl}B$; $\text{Bd}(A \cup B) = \text{Bd}A \cup \text{Bd}B$;
- (4) $\text{Bd}(A \cap B) \subset \text{Bd}A \cup \text{Bd}B$;
- (5) $\text{Bd}(X \setminus A) = \text{Bd}A$, $\text{Bd}(\text{Cl}A) \subset \text{Bd}A$, $\text{Bd}(\text{Int}A) \subset \text{Bd}A$;
- (6) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$?

3*. Найти замыкания подмножеств лексикографически упорядоченного квадрата I^2 :

- (1) $C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$;
- (2) $D = \{(x, \frac{1}{2}) : 0 < x < 1\}$;
- (3) $E = \{(\frac{1}{2}, y) : 0 < y < 1\}$.

4*. Найти внутренность и границу следующих подмножеств $\mathbb{R}^2$:

- (1) $A = \{(x, y) : y = 0\}$;
- (2) $B = \{(x, y) : x > 0, y \neq 0\}$;
- (3) $C = A \cup B$;
- (4) $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q}\}$;
- (5) $E = \{(x, y) : 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$;
- (6) $F = \{(x, y) : x \neq 0, y \leq \frac{1}{x}\}$.

5. Пусть $Y \subset X$, $A \subset Y$. Доказать, что $\text{Cl}_Y(A) = \text{Cl}_X(A) \cap Y$. Верна ли аналогичная формула для внутренностей?

6. Найти замыкание множества $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ на прямой в топологии Зариского.

7*. Доказать, что точка x принадлежит замыканию множества A метрического пространства X в том и только том случае, когда $\inf\{\rho(x, y) : y \in A\} = 0$, в том и только том случае, если существует последовательность ξ точек A , сходящаяся к x .

8. Подмножество пространства ℓ^2 , состоящее из всех точек $(x_1, \dots, x_k, \dots)$, для которых $0 \leq x_k \leq 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом*. Доказать, что гильбертов куб — замкнутое подмножество ℓ^2 ; внутренность гильбертова куба в ℓ^2 — пустое множество.

9. Перечислите все различные множества, которые можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции Cl и Int .

10. Для каких $n \in \mathbb{N}$ на прямой можно построить n попарно дизъюнктивных открытых множеств, имеющих одну и ту же границу?

11. Доказать, что следующие условия на отображение $f : X \rightarrow Y$ эквивалентны:

- (а) отображение f — непрерывно;
- (d) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $\text{Cl}(f^{-1}B) \subset f^{-1}(\text{Cl}B)$;
- (е) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $f^{-1}(\text{Int}B) \subset \text{Int}(f^{-1}B)$.

12*. Проверьте, что если тождественное отображение множества X с топологией τ_2 в X с топологией τ_1 непрерывно, то $\tau_1 \subset \tau_2$ (топология τ_2 на X сильнее топологии τ_1).

13. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, $M \subset X$. Будет ли образ предельной точки множества M предельной точкой множества $f(M)$?

14. Пусть Y — линейно упорядоченное пространство, $f, g : X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения.

- а) Докажите, что множество $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ замкнуто в X .
- б) Докажите, что отображение $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ непрерывно.

15. Пусть X является счетным объединением замкнутых множеств $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, ограничение $f|_{A_i}$ отображения $f : X \rightarrow Y$ на подмножество A_i непрерывно, $i \in \mathbb{N}$. Будет ли отображение f непрерывно?

16*. Докажите, что для любого подмножества A метрического пространства (X, ρ) функция $f_A : X \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_A(x) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$, непрерывна. Всегда ли существует точка $a \in A$ такая, что $f_A(x) = \rho(x, a)$?

17. Отображение метрических пространств $f : X \rightarrow Y$ называется *изометрическим вложением*, если для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y))$. Доказать, что любое изометрическое вложение непрерывно.

18. Отображение f метрического пространства X в себя называется *сжимающим*, если существует $0 < \alpha < 1$ такое, что для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства X непрерывно.

19*. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя имеет неподвижную точку.