

Задание N 2

1*. Пусть на множестве X дано семейство топологий $\mathcal{A}$. Доказать, что существуют: точная верхняя грань топологий из $\mathcal{A}$ (наименьшая топология, большая любой топологии из $\mathcal{A}$); точная нижняя грань топологий из $\mathcal{A}$ (наибольшая топология, меньшая любой топологии из $\mathcal{A}$).

2. Найти точную верхнюю и нижнюю грани топологий $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ и $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ на $X = \{a, b, c\}$.

3*. Описать базы топологии дискретного и антидискретного пространств.

4*. Доказать:

1) топологии в Примере 8.8 корректно определены,

2) $\mathcal{T}_4 \leq \mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_5$, $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_3$,

3) $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_4$ несравнимы, $\mathcal{T}_5$ и $\mathcal{T}_3$ несравнимы.

4) найти точную верхнюю и нижнюю грани данных топологий.

5. Пусть $Y = [-1, 1]$ подпространство $\mathbb{R}$ со стандартной топологией. Какие из подмножеств Y открыты в Y , открыты в $\mathbb{R}$: 1) $\{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$, 2) $\{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}$, 3) $\{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$, 4) $\{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$, 5) $\{x : 0 < |x| < 1, \frac{1}{x} \notin \mathbb{N}\}$?

6. Могут ли различные топологии на множестве X индуцировать одинаковые топологии на подмножестве $A \subset X$?

7*. Доказать, что любое открытое подмножество прямой является объединением не более чем счетного числа дизъюнктивных интервалов (интервалами дополнительно считаются вся прямая и открытые лучи (∞, a) , (a, ∞)).

Какова мощность стандартной топологии прямой?

8. Описать открытые подмножества прямой в топологиях из задачи 4. Каковы мощности их топологий?

9*. Пусть Y подмножество X . Доказать, что подмножество F замкнуто в Y в том и только том случае, если существует замкнутое подмножество Φ в X такое, что $F = \Phi \cap Y$.

10. Пусть Y открытое (замкнутое) подмножество X . Доказать, что любое открытое (замкнутое) подмножество Y открыто (замкнуто) в X .

11*. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана прямоугольная система координат, $s = (x_s, y_s)$, $q = (x_q, y_q)$. Определим отображения $\rho_* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

(ρ_d) $\rho_d(s, q) = 1$, если $s \neq q$, $\rho_d(s, q) = 0$, если $s = q$;

(ρ_1) $\rho_1(s, q) = |x_s - x_q| + |y_s - y_q|$;

(ρ_2) $\rho_2(s, q) = \sqrt{|x_s - x_q|^2 + |y_s - y_q|^2}$;

(ρ_∞) $\rho_\infty(s, q) = \max\{|x_s - x_q|, |y_s - y_q|\}$;

(ρ_j) $\rho_j(s, q) = |y_s - y_q|$, если $x_s = x_q$, $\rho_j(s, q) = |x_s - x_q| + |y_s| + |y_q|$, если $x_s \neq x_q$.

Проверить, что они являются метриками. Нарисовать единичные открытые шары точек в этих метриках. Сравнить топологии, порождаемые этими метриками.

12. Пусть

(ρ_1) $\ell^1 = \{\mathbf{x} = (x_i) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$ — пространство последовательностей действительных чисел с нормой $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$;

(ρ_2) $\ell^2 = \{\mathbf{x} = (x_i) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ — пространство последовательностей действительных чисел с нормой $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$;

(ρ_∞) $\ell^\infty = \{\mathbf{x} = (x_i) : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$ — пространство последовательностей действительных чисел с нормой $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$.

Проверить, что нормированные пространства корректно определены. Какие из норм задаются скалярным произведением?

13. Докажите, что пространство $C([0, 1], \mathbb{R})$ непрерывных вещественных функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой

(ρ_1) $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$;

$$(\rho_2) \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$(\rho_\infty) \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

корректно определено. Сравнить топологии, порождаемые этими нормами. Какие из норм задаются скалярным произведением?

14*. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, заданные формулами $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ и $\rho_2(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$, являются метриками на множестве X .

15. Пусть p — простое число и разность $x - y$ различных чисел $x, y \in \mathbb{Q}$ представлена в виде $\frac{r}{s}p^\alpha$, где r, s и $\alpha \in \mathbb{Z}$, r, s взаимно просты с p . Положим $\rho(x, y) = p^{-\alpha}$ для $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Доказать, что ρ — метрика (p -адическая метрика на $\mathbb{Q}$). Сравнить евклидову топологию на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и топологию $\mathbb{Q}$, порожденную p -адической метрикой на $\mathbb{Q}$.

16. *Пространство Бэра*. Пусть X произвольное бесконечное множество. На множестве $X^{\mathbb{N}}$ введем метрику ρ следующим образом: для $p = (x_1, x_2, \dots), q = (y_1, y_2, \dots) \in \mathcal{B}$ полагаем $\rho(p, q) = 0$, если $p = q$, и $\rho(p, q) = 1/k$, если k наименьшее натуральное число, для которого $x_k \neq y_k$. Показать, что метрика корректно определена.

17. *"Метризуемый еж"*. Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0, 1]$, который обозначим через $[0, 1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0, 1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим метрику $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Для $p, q \in X$ полагаем $\rho(p, q) = |p - q|$, если p и q принадлежат одному отрезку $[0, 1]_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$, и $\rho(p, q) = p + q$, если p и q не принадлежат одному отрезку $[0, 1]_\lambda$. Показать, что метрика корректно определена.

18. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $M \subset X$. Если $\sup\{\rho(x, y) : x, y \in M\} = d < \infty$, то множество M называется *ограниченным*, а число d называется его *диаметром* и обозначается через $\text{diam}(M)$. Докажите, что для любого метрического пространства (X, ρ) расстояние Хаусдорфа

$$d_\rho(A, B) = \max\{\sup\{\rho(a, B) : a \in A\}, \sup\{\rho(b, A) : b \in B\}\}$$

является метрикой в множестве ограниченных замкнутых подмножеств $A, B \subset X$. Можно ли отказаться от требования их замкнутости? ограниченности?

19. Может ли открытый шар большего радиуса содержаться в открытом шаре меньшего радиуса?

20. Привести пример множества и различных метрик на нем, порождающих одну и ту же топологию.

21*. Будет ли дискретной топология линейного порядка на квадрате $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ линейно упорядоченного пространств $\mathbb{N}$ с лексикографическим порядком?

22*. Найти метрику на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, которая задает топологию, порожденную лексикографическим порядком на квадрате линейно упорядоченного пространств $\mathbb{R}$.

23. Доказать, что топология на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, порожденная топологией лексикографического порядка на квадрате линейно упорядоченного пространств $\mathbb{R}$, и топология порожденная лексикографическим порядком на $[0, 1] \times [0, 1]$ различны.