Задание N 15

1*. Докажите, что $\pi(X, V)$ одноточечно для любого выпуклого подмножества V в $\mathbb{R}^n$.

2*. Установите гомотопность любых непрерывных не сюръективных отображений $f, g : X \to \mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3*. Докажите, что если X одноточечное пространство, то множество $\pi(X, Y)$ есть множество компонент линейной связности пространства Y.

4*. Когда гомотопны два постоянных отображения?

5*. Пусть X — линейно связное пространство. Докажите, что $\pi(I, X)$ одноточечно.

6. Будут ли гомотопными любые два непрерывных отображения произвольного пространства X в линейно связное пространство?

7*. Докажите, что если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то $\pi(X, Y)$ — компонентны линейной связности пространства $C(X, Y)$ в компактно-открытой топологии.

8*. Докажите, что если отображения $f, f' : X \to Y$ гомотопны и отображения $g, g' : Y \to Z$ гомотопны, то тогда отображения $g \circ f$ и $g' \circ f'$ гомотопны.

9*. Докажите, что непрерывные отображения $f, g : X \to Y \times Z$ гомотопны в том и только том случае, если гомотопны пары композиций $p_Y \circ f$, $p_Y \circ g$ и $p_Z \circ f$, $p_Z \circ g$, где p_Y и p_Z — проекции в произведении на соответствующие сомножители.

10*. Докажите, что отношение гомотопности путей является отношением эквивалентности.

11*. Привести пример пространств X и Y, подмножества A пространства X и непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ таких, что $f|_A = g|_A$, f и g гомотопны, но не A-гомотопны.

12*. Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств совпадает число компонент (линейной) связности.

13*. Найдите счетное число попарно гомотопически эквивалентных пространств, не являющихся попарно гомеоморфными.

14*. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) окружности S^1 и кольца $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(2) окружности S^1 и плоскости с выкинутой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$;

(3) окружности S^1 и пространства $\mathbb{R}^3$ с выкинутой прямой;

(4) окружности S^1 и ленты Мебиуса.

15. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) плоскости с двумя выкинутыми точками и букета двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$;

(2) тора T^2 с вырезанным диском D^2 (т.е. ручки) и букета двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$;

(3) сферы S^2 с отождествленной парой точек и букета сферы и окружности $S^2 \bigvee S^1$;

(4) тора T^2 с замкнутыми дисками B^2, приклеенными по границе с меридианом и по границе с параллелью, и сферы S^2;

(5) пространства невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ и ортогональных матриц $O(n)$.

16*. Докажите, что букет двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$ гомотопически эквивалентен объединению окружности и ее произвольного диаметра.

17. Докажите, что связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

18. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между их гомотопическими классами отображений в произвольное пространство.

19. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений произвольного пространства Z в X и Y соответственно.

20*. Докажите, что стягиваемое пространство линейно связно. Верна ли обратная импликация?

21*. Докажите, что пространство стягиваемо тогда и только тогда когда оно имеет гомотопический тип точки.

22*. Докажите, что выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ стягиваемо.

Докажите, что любое линейное пространство над полем вещественных чисел стягиваемо.

Непрерывное отображение $f : X \to X$ называется *ретракцией* пространства X, если $f \circ f = f$; образ $f(X)$ при ретракции пространства X называется *ретрактом* пространства X. Докажите, что ретракт стягиваемого пространства стягиваем.

Пусть X — пространство. Произведение $X \times I$ пространства X на отрезок I называется *цилиндром* пространства X. Если отождествить между собой все точки верхнего основания $X \times \{1\}$ цилиндра $X \times I$ (стянуть $X \times \{1\}$ в точку), то получится *конус* $\mathrm{Con}(X)$ *над* X. Докажите, что конус $\mathrm{Con}(X)$ стягиваем для любого пространства X.

23. Докажите, что бесконечномерная сфера $S^\infty = \{x \in \ell^2 : \sum |x_i|^2 = 1\}$ стягиваема.

24. Доказать, что для линейно связного пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) X — стягиваемо;

(2) $\pi(X, Y)$ тривиально (т.е. состоит из одного элемента) для любого линейно связного пространства Y;

(3) $\pi(Y, X)$ тривиально для любого пространства Y.

25. Докажите, что произведение $X \times Y$ пространств X и Y стягиваемо в том и только том случае, если пространства X и Y стягиваемы. Верен ли аналогичный результат для счетного (произвольного) числа сомножителей?

26*. Вычислить фундаментальную группу:

(1) дискретного пространства;

(2) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.