

Задание N 14

- 1*. Доказать, что отрезок $[0, 1]$ связан.
- 2*. Пусть $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ — топологии на X . Что можно сказать о связности X в одной топологии, если X связно в другой топологии?
- 3*. Докажите, что объединение семейства попарно пересекающихся связных подмножеств связно.
- 4*. Пусть $A \cap B$ и $A \cup B$ — связные (соответственно линейно связные) множества. Верно ли, что A и B — связные (соответственно линейно связные) множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?
- 5*. Верно ли, что пересечение связных множеств связно? Будет ли счетное пересечение связных множеств A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно?
- 6*. Докажите, что счетное пересечение связных компактных подмножеств хаусдорфова пространства A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно.
- 7*. Будет ли внутренность связного (соответственно линейно связного) множества связна? Будет ли граница связного (соответственно линейно связного) множества связна? Будет ли множество связно (соответственно линейно связно), если его граница связна (соответственно линейно связна)?
- 8*. Пусть $A \subset X$. Докажите, что если C связное подпространство X , пересекающее как A , так и $X \setminus A$, то $C \cap \text{Bd}A \neq \emptyset$.
- 9*. Пусть A и B собственные подмножества связных пространств X и Y соответственно (т.е. $A \neq X$, $B \neq Y$). Докажите, что $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ связно.
- 10*. Будет ли прообраз при непрерывном отображении связного множества связан, если прообраз любой точки связан?
- 11*. Докажите, что счетное нормальное пространство несвязно. Оцените снизу мощность бесконечного нормального связного пространства. Существует ли счетное хаусдорфово связное пространство?
- 12*. Докажите связность линейно упорядоченного пространства X такого, что:
- 1) любое ограниченное подмножество X имеет точную верхнюю грань в X ;
 - 2) если $x < y$, то существует $z \in X$, $x < z < y$.
13. Какие из следующих пространств $\mathbb{N} \times [0, 1]$, $[0, 1] \times \mathbb{N}$, $[0, 1] \times [0, 1]$, $[0, 1] \times [0, 1]$ с топологиями, порожденными лексикографическим порядком на произведениях, будут связными (соответственно линейно связными)?
- 14*. Доказать связность пространств $\mathbb{R}^n$, сфер S^n и замкнутых шаров B^n , $n \in \mathbb{N}$.
- 15*. Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, не гомеоморфны. Докажите, что не существует непрерывной биекции прямой на квадрат. Доказать, что $[0, 1]$, $[0, 1)$ и $(0, 1)$ попарно не гомеоморфны.
- 16*. Пространство X называется *локально связным*, если во всякой окрестности произвольной точки $x \in X$ содержится связная окрестность. Доказать, что компоненты связности локально связного пространства открыто-замкнуты.
- 17*. Найти компоненты связности (соответственно линейной связности) следующих подпространств вещественных матриц:
- (a) $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;
 - (b) $\text{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$;
 - (c) $\text{Symm}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A\}$?
- 18*. Доказать, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в ящичной топологии несвязно. Будет ли $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ связно в топологии равномерной сходимости?
19. Верно ли утверждение, что функция на отрезке непрерывна в том и только том случае, если образ любого отрезка отрезок?
20. Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существует единственная прямая, параллельная фиксированной прямой l , которая делит A на два множества равной площади. Докажите, что если A и B — открытые связные ограниченные множества на плоскости, то существует прямая, которая делит каждое из множеств A и B на два множества равной площади.

Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существуют две перпендикулярные прямые, которые делят A на четыре множества равной площади.

Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ существует точка x такая, что $f(x) = f(-x)$.

21*. Докажите, что вполне несвязное пространство является T_1 -пространством.

22*. Докажите, что нульмерное пространство вполне несвязно.

23*. Докажите, что подпространства $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$) рациональных (соответственно иррациональных) чисел числовой прямой $\mathbb{R}$ нульмерны.

24*. Докажите, что прямая Зоргенфрея нульмерна.

25*. Докажите, что тихоновское произведение нульмерных (соответственно вполне несвязных) пространств нульмерно (соответственно вполне несвязно).

26. Доказать, что пространство *веер Кнастера-Куратовского* $\mathcal{K}$ (Пример 37.4 Лекции 14) связно, подпространство $\mathcal{K} \setminus \{a\}$ является вполне несвязным, но не нульмерным пространством.

27. Доказать, что множество точек гильбертова пространства ℓ^2 все координаты которых рациональны вполне несвязно, но не нульмерно.

28*. Докажите, что факторпространство хаусдорфова компактного пространства по его разбиению на компоненты связности является нульмерным хаусдорфовым компактным пространством.

29. Докажите, что любой нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек гомеоморфен канторову множеству.

30*. Пусть X_1 и X_2 — замкнутая и открытая компоненты линейной связности компакта X из Примера 28.2.3 Лекции 11. Докажите, что если при непрерывном отображении $f : X \rightarrow X$ существует точка $x \in X_2$, для которой $f(x) \in X_1$, то и $f(X) \subset X_1$.

31*. Докажите, что для подмножеств прямой связность и линейная связность эквивалентны.

Докажите, что открытое связное подмножество $\mathbb{R}^2$ линейно связно.

32. Пусть A — счетное подмножество $\mathbb{R}^2$. Доказать, что $\mathbb{R}^2 \setminus A$ линейно связно.

33. Существует ли непрерывное сюръективное отображение прямой $\mathbb{R}$ на евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$? На тихоновское произведение $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

34*. Доказать, что пространство гомеоморфизмов отрезка $[0, 1]$ в компактно-открытой топологии имеет две компоненты связности.