

Задание N 13

1*. Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство. Доказать, что на подмножестве $B(X, Y)$ произведения Y^X корректно определена метрика

$$d(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\},$$

и $d'(f, g) = \min\{d(f, g), 1\}$, где d' — равномерная метрика на Y^X . (Если $Y = \mathbb{R}$, то метрика d порождается нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ на линейном пространстве $B(X)$.)

2*. Будет ли множество

$$U(f, \epsilon) = \{h \in \mathbb{R}^X : \rho(f(x), h(x)) < \epsilon, x \in X\}$$

открыто в топологии равномерной сходимости на $\mathbb{R}^X$.

Докажите, что для ε -окрестности $O_\varepsilon(f)$ точки f в равномерной метрике выполнено

$$O_\varepsilon(f) = \bigcup_{\delta < \varepsilon} U(f, \delta).$$

Докажите, что на произведении $\mathbb{R}^X$ ящичная топология сильнее топологии равномерной сходимости, которая сильнее тихоновской топологии. Установите их совпадение для конечных произведений.

Докажите, что на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ящичная топология, топология равномерной сходимости и тихоновская топология попарно различны.

3. Верны ли утверждения Задач 13, 14 и 15 Задания 5 для произведений пространств с топологией равномерной сходимости?

4. Будет ли тихоновское произведение $\mathbb{R}^X$ (произведение $\mathbb{R}^X$ в ящичной топологии, произведение $\mathbb{R}^X$ в топологии равномерной сходимости) линейным топологическим пространством (т.е. естественно определенные операции сложения и умножения на скаляры непрерывны)?

5*. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в топологии равномерной сходимости не удовлетворяет второй аксиоме счетности и не сепарабельно.

6*. Докажите, что множество $C([0, 1], \mathbb{R})$ не замкнуто в тихоновском произведении $\mathbb{R}^{[0, 1]}$.

7*. В какой из топологий на множестве $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ последовательность функций $f_n = \frac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, является сходящейся?

8*. Докажите, что множество $C(X, Y)$ в компактно-открытой топологии регулярно, если Y регулярно.

9*. Пусть X — метризуемое компактное пространство, Y — сепарабельное метризуемое пространство. Доказать, что множество $C(X, Y)$ в компактно-открытой топологии сепарабельно.

10. Семейство непрерывных функций $\mathcal{F} \subset C(X)$ на метрическом пространстве X называется *равностепенно непрерывным в точке x* , если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ для любых $f \in \mathcal{F}$, $t \in O_\delta(x)$. Семейство $\mathcal{F} \subset C(X)$, равностепенно непрерывное во всех точках X , называется *равностепенно непрерывным*.

Докажите, что любое конечное подсемейство $\mathcal{F} \subset C(X)$ равностепенно непрерывно.

Докажите, что любая равномерно сходящаяся последовательность функций $f_n \in C(X)$ является равностепенно непрерывным семейством.

Будет ли равностепенно непрерывным семейством последовательность функций $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}$?

11. Какие из семейств отображений $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(a) $\{f_n = x + \sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{f_n = n + \sin(x) : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $\{f_n = x^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$,

(d) $\{f_n = n \sin(\frac{x}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

будут равностепенно непрерывными?

12. (*Теорема Асколи для отображений в $\mathbb{R}$*) Пусть K — метризуемое компактное пространство, $C(K)$ с топологией равномерной сходимости. Докажите, что подмножество $\mathcal{F} \subset C(K)$ компактно в том и только том случае, когда оно замкнуто, равностепенно непрерывно и ограничено.

Сформулируйте и докажите теорему Асколи для хаусдорфова локально компактного пространства X и компактно-открытой топологии на $C(K)$.

13. (*Теорема Арцела для отображений в $\mathbb{R}$*) Пусть K — метризуемое компактное пространство, $C(K)$ с топологией равномерной сходимости, $f_n \in C(K)$, $n \in \mathbb{N}$. Если последовательность (f_n) является равностепенно непрерывным семейством и для любой точки $x \in K$ множество $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено, то у последовательность (f_n) есть сходящаяся подпоследовательность.

14. Пусть последовательность функций $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ сходится в топологии поточечной сходимости к функции f . Докажите, что если семейство f_n , $n \in \mathbb{N}$, равномерно непрерывно, то f непрерывно, и f_n сходится к f в компактно-открытой топологии.
15. Докажите, что если $f \in C(X \times Y, Z)$, то $F : X \rightarrow C(Y, Z)$ (см. пункт 35.5 Лекции 13) непрерывно, где множество отображений $C(Y, Z)$ с топологией поточечной сходимости. Привести пример, когда отображение $f \in C(X \times Y, Z)$, определяемое непрерывным отображением $F : X \rightarrow C(Y, Z)$, где множество отображений $C(Y, Z)$ с топологией поточечной сходимости, не является непрерывным.
16. Докажите, что если отображение $F : X \rightarrow C(Y, Z)$, где множество отображений $C(Y, Z)$ с топологией равномерной сходимости, непрерывно, то отображение $f \in C(X \times Y, Z)$ (см. пункт 35.5 Лекции 13) непрерывно. Привести пример, когда отображение $F : X \rightarrow C(Y, Z)$, определяемое непрерывным отображением $f \in C(X \times Y, Z)$, где множество отображений $C(Y, Z)$ с топологией равномерной сходимости, не является непрерывным.
17. Докажите, что отображение $\Lambda : C(X \times Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z))$, пространств отображений в компактно-открытых топологиях, определяемое условием $\Lambda(f) = F$ (см. пункт 35.5 Лекции 13), непрерывно для любых X, Y, Z . Если же Y хаусдорфово и локально компактно, то это отображение является гомеоморфизмом.
18. Докажите, что отображение $\circ : C(X, Y) \times C(Y, Z) \rightarrow C(X, Z)$, $\circ(f, g) = g \circ f$ пространств отображений в компактно-открытых топологиях, непрерывно.
19. Установить единственность пополнения метрического пространства (с точностью до изометрий).
20. Найти пополнение $\mathbb{R}$ с метриками $\rho_\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 а) $\rho_1(x, y) = |\exp^x - \exp^y|$;
 б) $\rho_2(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$.
21. Найти пополнения рациональных и иррациональных чисел с обычной метрикой.
22. Существует ли метрика на пространстве рациональных (иррациональных) чисел, пополнением по которой является евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, тихоновское произведение $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
23. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ не изометрично $\mathbb{R}^m$ (с евклидовыми метриками) при $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.
24. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) может быть изометрично вложено в ℓ^2 .
25. Для всякой ли изометрии f пространства ℓ^2 существует неподвижная точка отображения f ?