

Задание N 12

1*. Докажите, что любое некомпактное метризуемое пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подпространство.

2*. Докажите, что на любом некомпактном метризуемом пространстве X существует непрерывная функция $f : X \rightarrow (0, 1]$, для которой $\inf\{f(x) : x \in X\} = 0$.

3* (*Теорема Лебега о покрытиях*). Доказать, что для любого открытого покрытия Ω метрического компакта X существует $\epsilon > 0$ такое, что покрытие X из открытых шаров радиуса ϵ вписано в покрытие Ω . Можно ли условие компактности метрического пространства заменить условием рассмотрения конечных покрытий?

4* (*Равномерная непрерывность функций на метризуемых компактах*). Доказать, что любая непрерывная функция на метрическом компакте X равномерно непрерывна (функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что образ множества диаметра меньше δ имеет диаметр меньше ϵ).

5*. Доказать, что для любых метрик ρ_1 и ρ_2 на метризуемом компакте X выполнено следующее условие: для любого $\epsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для любых точек $x, y \in X$ $\rho_2(x, y) < \epsilon$ как только $\rho_1(x, y) < \delta_1$, и $\rho_1(x, y) < \epsilon$ как только $\rho_2(x, y) < \delta_2$.

6*. Докажите, что пространства $\mathbb{R}^n$ в любой из метрик Примера 31.2.1 полны.

7*. Привести пример множества и топологически эквивалентных метрик на нем таких, что одна метрика полна, а другая не полна.

8*. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2 . Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x, y) \leq k_2 \rho_2(x, y)$ и $\rho_2(x, y) \leq k_1 \rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 топологически эквивалентны. Кроме того, если одна из метрик полна, то и другая метрика полна.

9*. Докажите, что пространство ℓ^2 полно.

10*. Докажите, что метрическое пространство (X, ρ) полно в том и только том случае, если любая убывающая последовательность непустых замкнутых подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ пространства X таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} A_n = 0$, имеет непустое пересечение.

11*. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $Y \subset X$. Докажите, что $(Y, \rho|_Y)$ — полное метрическое пространство в том и только том случае, если Y замкнуто в X .

12*. Метрическое пространство (X, ρ) является полным в том и только том случае, если (X, ρ') полно, где $\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$.

13. Доказать, что на счетном произведении полных метрических пространств существует полная метрика.

14. Доказать, что пространство иррациональных чисел метризуемо полной метрикой.

15*. Доказать, что пространство рациональных чисел не метризуемо полной метрикой.

16. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $Y \subset X$. Докажите, что Y метризуемо полной метрикой в том и только том случае, если Y является G_δ -подмножеством X (т.е. Y является пересечением счетного числа открытых в X множеств).

17*. (*Принцип сжимающих отображений Банаха*.) Отображение $f : X \rightarrow X$ метрического пространства называется *сжимающим*, если существует $0 \leq \alpha < 1$ такое, что $\rho(f(x), f(y)) < \alpha \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

Доказать, что любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет неподвижную точку (т.е. точку, отображающуюся в себя).

18*. Доказать, что не более чем счетное пересечение открытых всюду плотных множеств полного метрического пространства всюду плотно.

19. Покажите, что любой метризуемый компакт является непрерывным образом канторова множества (т.е. является *диадическим компактом*).

20. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве вполне ограничена, то пространство компактно.

21. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве полна, то пространство компактно.

22*. Доказать, что подмножество Y метрического пространства (X, ρ) вполне ограничено в том и только том случае, если из любой бесконечной последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

23 (*Критерий компактности в ℓ^2*). Подмножество X в ℓ^2 компактно в том и только том случае, если оно замкнуто, ограничено и выполнено условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{\mathbf{x} \in X} \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 \right) = 0.$$

Доказать, что подмножество $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 \leq 1\}$, где $a_n > 0$, $a_n \rightarrow +\infty$ компактно.