Задание N 11

1*. Будет ли компактификация X интервала $(0, 1)$ из пункта 3 Примера 28.2 Лекции 11 эквивалентна компактификации $X' \subset \mathbb{R}^2$, являющейся объединением вертикального отрезка $X_1 = \{(0, y) : -1 \le y \le 1\}$ и графика X_2' функции $y = \sin\frac{1}{1-x}$; $0 \le x < 1$ (вложение $t \to (1-t, \sin\frac{1}{1-t})$)?

2*. Докажите, что любое отображение $f : X \to Y$ тихоновского пространства X в компактное пространство Y продолжается до отображения его Стоун-Чеховской компактификации βX.

Установить единственность (с точностью до эквивалентности) Стоун-Чеховской компактификации βX тихоновского пространства X.

3. Для компактификаций (Y_1, i_1) и (Y_2, i_2) считаем $Y_1 \le Y_2$, если существует отображение $f : Y_2 \to Y_1$ такое, что $f \circ i_2 = i_1$. Доказать, что $f(Y_2 \setminus i_2(X)) = (Y_1 \setminus i_2(X))$.

Доказать, что $\le$ — упорядочение на множестве компактификаций, для которой βX — наибольший элемент. Если пространство X локально компактно, то αX — наименьший элемент.

4. (*Вторая Теорема Тихонова*). *Весом топологического пространства* называется наименьшая из мощностей его баз. Доказать, что тихоновское пространство X имеет компактификацию bX, вес которой равен весу X.

5*. Доказать. а) Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, являются локально компактными пространствами.

б) Открытое (замкнутое) подмножество локально компактного пространства локально компактно.

в) Прямая в топологии Зариского — компактное, не локально компактное пространство.

г) Хаусдорфово компактное пространство локально компактно.

6*. Доказать, что $\mathbb{Q}$ не локально компактное пространство.

7*. В какой из топологий из Примера 8.8 Лекции 2 прямая локально компактна?

8*. Доказать, что одноточечная компактификация Александрова $\mathbb{R}^n$ — сфера S^n, $n \in \mathbb{N}$.

9*. Доказать, что одноточечная компактификация Александрова счетного дискретного пространства $\mathbb{N}$ — сходящаяся последовательность $\{0\} \cup (\frac{1}{n})$.

10*. Доказать, что гомеоморфизм тихоновских пространств, продолжается до гомеоморфизма их Стоун-Чеховских компактификаций.

Доказать, что гомеоморфизм хаусдорфовых локально компактных пространств, продолжается до гомеоморфизма их одноточечных компактификаций Александрова.

11*. Будет ли непрерывный хаусдорфов образ локально компактного пространства локально компактным?

12. Доказать, что множество $T(\omega_1)$ счетных трансфинитов (Пример 5.6 Лекции 1) является локально компактным, не компактным хаусдорфовым пространством.

Доказать, что $\beta T(\omega_1) = T(\omega_1) \cup \{\omega_1\} = T$.

13 (*Альтернативное определение локальной компактности пространства*). *Пространство X называется локально компактным, если для произвольной точки x существует такая ее окрестность Ux, что* $\mathrm{Cl}(Ux)$ *является компактным подпространством X.*

Какие из свойств Задачи 5 Задания 11 выполнены?

Какое из определений локальной компактности влечет другое определение? Привести соотвествующие примеры.

Доказать, что для хаусдорфовых пространств оба понятия локальной компактности совпадают.

14. *n-Мерным топологическим многообразием* называется хаусдорфово пространство X со счетной базой, для любой точки x которого существует окрестность, гомеоморфная открытому подмножеству евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Доказать, что n-мерное компактное топологическое многообразие X вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.