

Задание N 10

1*. Какие топологии на прямой $\mathbb{R}$ из Примера 8.8 Лекции 2 задают компактную топологию?

Какие подмножества прямой Зоргенфрея являются компактными?

Какие подмножества прямой в топологии Зариского являются компактными?

2. Пусть X — линейно упорядоченное пространство. Докажите, что любой отрезок X компактен в том и только том случае, если любое ограниченное подмножество X имеет точную верхнюю грань в X .

3*. Докажите, что лексикографически упорядоченный квадрат (Задача 24 Задания 3) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, и не сепарабелен.

4*. Докажите, что подмножество $(0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1) \times \{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство “Две стрелки Александра”) компактно, и не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

5. Будут ли компактами пространство Бэра, метризуемый еж (Задачи 17, 18 Задания 2)?

6 “Компактный еж”. Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0, 1]$, который обозначим через $[0, 1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0, 1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим топологию: на полуинтервалах $(0, 1]_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ — обычная интервальная топология, базисными окрестностями $\{0\}$ являются всевозможные конечные объединения полуинтервалов $[0, a(\lambda))_\lambda$, $0 < a(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_{Fin} \subset \Lambda$, и всех отрезков $[0, 1]_\lambda$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_{Fin}$. Показать, что топология корректно задана, компактный еж — компактен.

“Еж”. Пусть Λ бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0, 1]$, который обозначим через $[0, 1]_\lambda$. На сумме $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} [0, 1]_\lambda$ определим разбиение $\mathcal{R}$ на одноточечные подмножества $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (0, 1]_\lambda$ и множество $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \{0\}_\lambda$. Факторпространство суммы $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} [0, 1]_\lambda$ по разбиению $\mathcal{R}$ назовем “ежом”.

Докажите, что “еж”, “компактный еж” и “метризуемый еж” (Задача 18 Задания 2) попарно не гомеоморфны.

7*. Привести пример T_1 пространства и его не замкнутого компактного подмножества.

8*. Докажите, что в регулярном пространстве для любых дизъюнктивных замкнутого и компактного подмножеств существуют их дизъюнктивные окрестности.

9*. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{T}_1$ и компактная $\mathcal{T}_2$ топологии. Показать, что если $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, то $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Показать, что любые две хаусдорфовы, компактные топологии на множестве X или совпадают, или не сравнимы.

10* “Лемма о трубке”. Пусть в произведении $X \times Y$ сомножитель Y компактен. Доказать, что для любой окрестности O “слоя” $\{x\} \times Y$, где x произвольная точка X , существует окрестность Ox точки x такая, что $Ox \times Y \subset O$.

Привести пример, показывающий, что требование компактности сомножителя Y существенно.

Доказать Первую Теорему Тихонова в случае конечного числа сомножителей, используя “Лемму о трубке”.

11*. Докажите, что отображение $f : X \rightarrow Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.

12*. Пусть X — хаусдорфово пространство, K_α , $\alpha \in A$, — семейство компактных подмножеств X , U — окрестность $\bigcap\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Тогда существует конечное подмножество $A_{Fin} \subset A$ такое, что $\bigcap\{K_\alpha : \alpha \in A_{Fin}\} \subset U$.

13*. Докажите, что в хаусдорфовом компактном пространстве объединение счетного числа замкнутых подмножеств, внутренность которых пуста, имеет пустую внутренность.

14. Докажите, что непустое хаусдорфово компактное пространство без изолированных точек несчетно.

15*. Какие из подмножеств пространства матриц $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ компактны:

(a) $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\text{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$;

(c) $\text{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$?

16*. Привести пример метрического пространства (с неограниченной метрикой) и его замкнутого, ограниченного, не компактного подмножества.

17*. Докажите, что для любых компактных подмножеств A и B метрического пространства (X, ρ) существуют точки $a \in A$, $b \in B$ такие, что $\rho(a, b) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

18. Докажите, что любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны (задают одну и ту же топологию).