

Универсальные алгебры (множества с операциями). Топологические алгебры, примеры. Гомоморфизмы, конгруэнции, факторалгебры, подалгебры. Тождества, многообразия алгебр, теорема Биркгофа. Свободные алгебры в данном многообразии.

1

универсальные алгебры

Универсальные алгебры

Пусть A — множество, $A \neq \emptyset$. Для $n \in \mathbb{N}$ отображение $A^n \rightarrow A$ называется n -арной операцией на A . В частности, $\{f\} \rightarrow A$ (фиксированный эл-т A) — нульарная операция. Универсальная алгебра, или просто алгебра, — это непустое мн-во A вместе с произвольными множествами операций.

Формализм:

Опр. Пусть Σ — множество (символов операций) вместе с функцией $\nu: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, которая присваивает каждому символу $\sigma \in \Sigma$ его арность $\nu(\sigma)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $\Sigma_n = \{\sigma \in \Sigma: \nu(\sigma) = n\}$. Тогда $\Sigma = \bigcup \Sigma_n$. Пара (Σ, ν) называется сигнатурой или типом [универсальной алгебры]. Структура Σ -алгебры на (непустом) множестве A — это семейство отображений $\Sigma_n \rightarrow A^n$, $n \geq 0$, которые сопоставляют (интерпретируют) каждому символу $\sigma \in \Sigma$ операцию $\sigma^A: A^{\nu(\sigma)} \rightarrow A$. Операции σ^A называются основными. Множество A с такой структурой называется Σ -алгеброй или (универсальной) алгеброй сигнатуры (или типа) Σ .

В дальнейшем мы обычно будем означать верхний индекс A и интерпретировать σ как символ операции или как саму операцию в зависимости от контекста.

Примеры: группа, полугруппа, magma (группоид), вект.-п.-о.

оп. алгебры

Опр. Σ -алгебра A , снабжённая топологией, относительно которой все (основные) операции непрерывны, называется топологической Σ -алгеброй.

Примеры: топ. группа ($(\tau \rightarrow \tau_1 \tau_2, \tau_1, \tau_2)$, группа k); n -прообразы (алгебра с центр. эл-т; функ. группа; топ. вект. пр.-ва; топ. калкулятор).

Теория Абсолютно свободных алгебр. Подалгебры

1

Теория Термов и производные операции

Понятия основных операций на Σ -алгебре возникают производные, которые индуктируются терминами или терминалами — комбинациями основных символов операций. Пусть X — множество (символов переменных). Вспомогательная сигнатура Σ фиксированной.

Опр. (по рекурсии).

Вамис
 $t(x_1, \dots, x_n)$
обозначает,
что t —
терм с
переменными
 $x_1, \dots, x_n$.

- Символы из Σ_0 — термы (константы) степени 0 над X . У них нет переменных.
- Символы из X — термы (переменные) степени 1 над X . Множество переменных Терма $x \in X$ — это $\{x\}$.
- Если $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы степеней k_i , то $\sigma(t_1, \dots, t_n)$ — терм степени $\max k_i + 1$ над X . Множество его переменных — это объединение множеств переменных термов $t_1, \dots, t_n$.

Мы будем обозначать множество всех термов степени k над X через $T_k(X)$, а множество всех вообще термов над X — через $T(X)$, так что $T(X) = \bigcup T_k(X)$.

абс. своб.

Легко видеть, что множество $T(X)$ является

Опр.

Σ -алгебра (по определению термов). Эта Σ -алгебра называется абсолютно свободной Σ -алгеброй или алгеброй слов над X .

Опр. Производные операции

Для любой сигнатуры A термы $t \in T(X)$ порождают производные операции t^A на A , определяемые естественным образом по рекурсии для $t \in T(X)$ (если $t = \sigma(t_1, \dots, t_n)$, то $t^A = \sigma^A(t_1^A, \dots, t_n^A)$).

Подалгебра

Подалгебры, гомоморфизмы и т.п.

Подмножество $B \subset A$ Σ -алгебры A называется подалгеброй, если оно замкнуто относительно всех операций, т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \forall \sigma \in \Sigma_n \sigma(B^n) \subset B$. Зам. $T(X)$ порождена мн-вом X .

Опр.

Алгебра A порождена множеством $X \subset A$, если в A нет собственных подалгебр, содержащих X .

Гомоморфизм

Отображение $f: A \rightarrow B$ Σ -алгебр согласовано с операциями $\sigma \in \Sigma_n$, если $f(\sigma^A(x_1, \dots, x_n)) = \sigma^B(f(x_1), \dots, f(x_n)) \forall x_1, \dots, x_n \in A$. Отображение, согласованное со всеми операциями, называется гомоморфизмом.

Зам.

Образ любого гомоморфизма $h: A \rightarrow B$ — подалгебра алгебры B , порождённая множеством $h(A)$.

Гомоморфизмы, конгруэнции, факторалгебры

1

Зам. композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.

Универс. св-во. Пример: любое отображение $f: X \rightarrow A$ из X в Σ_n , порождает гомоморфизм $\hat{f}: T(X) \rightarrow A$, определённый естественным правилом $\hat{f}(t(x_1, \dots, x_n)) = t^A(f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Универс. св-во. Гомоморфизм, являясь биекцией, наз. изоморфизмом. В универсальной алгебре алгебры рассматриваются с точностью до изоморфизмов.

Опр. Ядро гомоморфизма $h: A \rightarrow B$ определяется как $\ker h = \{ (x, y) \in A \times A : h(x) = h(y) \}$.

Утв. Это отношение экв-ти на A . Оно согласовано со всеми операциями: если $\sigma \in \Sigma_n$, $x_1, \dots, x_n \in A$

$y_1, \dots, y_n \in A$ и $h(x_i) = h(y_i) \forall i \leq n$, то $h(\sigma(x_1, \dots, x_n)) = \sigma(h(x_1), \dots, h(x_n)) = \sigma(h(y_1), \dots, h(y_n))$

$= h(\sigma(y_1, \dots, y_n))$. Другими словами, если обозначить это отношение экв-ти через $\sim$, то будем иметь $x_1 \sim y_1, \dots, x_n \sim y_n \Rightarrow \sigma(x_1, \dots, x_n) \sim \sigma(y_1, \dots, y_n)$.

Конгруэнция. Опр. Отношение экв-ти с этими свойствами называется конгруэнцией. Зам. Пересечение конгр-й конгр-я.

Мы только что показали, что ядро любого гомоморфизма — конгруэнция. Верно и обратное:

Утв. Любая конгруэнция является ядром нек-го гом-ма.

Пусть $\sim$ — конгруэнция на A . Для $\sigma \in \Sigma_n$ положим $\sigma([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim) = [\sigma(x_1, \dots, x_n)]_\sim$.

Это определение корректно, так как $\sim$ — конгруэнция. Определим структуру Σ -алгебры на $A/\sim$.

Ясно, что естественное отображение $A \rightarrow A/\sim$ — гом-м.

Т. Для любого гомоморфизма $h: A \xrightarrow{\text{на}} B$ $B \cong A/\ker h$.

Обозначение

Опр. Для любой Σ -алгебры A и любой конгруэнции $\sim$ на A факторгомоморфизм $A/\sim$ с определённой выше структурой Σ -алгебры наз. факторалгеброй алгебры A (по конгруэнции $\sim$).

Зам. Ядро любого гомоморфизма $A \rightarrow B$ — подалгебра алгебры $A \times A$ с координатными операциями.

Многообразия, тождества

1

Зам. Пусть A — алгебра, порождённая множеством X . Тогда A является факторалгеброй алгебры $T(X)$ — это следует из теоремы об универсальности и примера ①. Вообще, для любого $f: X \xrightarrow{\text{на}} X$ гомоморфизм $\hat{f}: T(X) \rightarrow A$ (см. пример ①) строится, так что $A \cong T(X)/\ker \hat{f}$.

Многообразия

Интересно рассматривать классы Σ -алгебр, на которые наложены условия-аксиомы (как в классе групп и т.п.). Самый простой вариант — аксиоматизация тождествами. Например, класс групп описывается такими тождествами:

- $\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
- $\forall x (x \cdot 1 = x)$
- $\forall x (1 \cdot x = x)$
- $\forall x (x \cdot x^{-1} = 1)$
- $\forall x (x^{-1} \cdot x = 1)$

тожд-ва. Опр. Тождество сигнатуры Σ — это формула вида $\forall x_1 \dots \forall x_n (t = s)$, где $x_1, \dots, x_n$ — символы пер-х, а t, s — термы с переменными, содержащимися среди $x_1, \dots, x_n$. Будем писать просто $t = s$. не из фиксир. мн-ва!

Покажем, как понимать высказывание "данное тождество выполнено в данной алгебре A ": $\forall a_1 \dots \forall a_n \in A (t^A(a_1, \dots, a_n) = s^A(a_1, \dots, a_n))$ (от некоторой a_1, t^A и s^A могут не являться!).

Закфиксируем любой набор тождеств и будем рассматривать класс $\mathcal{K}$ всех Σ -алгебр, в кот. выполнены все эти тождества.

Классами такого сорта являются классы всех групп, полей, вект. пр-в над данным полем и т.п.

Окажется. Покажем, что такой класс должен быть замкнут относительно перехода к подалгебрам, гомоморфным образом и произвольным декартовым произведениям (с координатными операциями). Следовательно, класс всех конечномерных векторных пространств над данным полем не задаётся тождествами.

Теорема Биркгофа

1

Многообразие
Опр Класс Σ -алгебр, замкнутой относительно декартовых произведений и перехода к подалгебрам и гомом-н образам называется многообразием Σ -алгебр.

Зам Если многообразие содержит хотя бы одну ненулевую алгебру, то оно не является множеством (мощности декартова произведения неограничена), даже если Σ состоит из n операций.

Зам Из определения видно, что если многообразие содержит какую-то алгебру, то оно содержит и все алгебры, ей изоморфные.

Теорема Биркгофа

Т. Биркгофа Класс $\mathcal{K}$ Σ -алгебр является многообразием $\Leftrightarrow$ его можно аксиоматизировать тождествами.

$\Rightarrow$ Пусть X — бесконечное множество. Рассмотрим семейство $\mathcal{A}_X$ всех Σ -алгебр, порождённых множествами Y , $|Y| \leq |X|$, и всех отображений $f: X \xrightarrow{m_a}$ порожд. мн-ва.

Они продолжают до (строгого) гомом-н $\hat{f}: T(X) \xrightarrow{m_a} A$. Нас интересует алгебры с тожд. до упр-нов, поднабу можно считать, что $A \in \mathcal{A}_X$ содержатся (как мн-ва) в том же множестве $\mathcal{Z}$, так что все такие гом-ны $\hat{f}$ составляют множество. Заиндексируем его: $\{\hat{f}_i: T(X) \rightarrow A_i, i \in I\}$.

Положим $\nu = \bigcap_{i \in I} \ker \hat{f}_i$. Это конгруэнция. Заметим, что $(t, s) \in \nu \Leftrightarrow$ во всех алгебрах $A \in \mathcal{A}_X$ выполнено тождество $t = s$. Более того, $(t, s) \in \nu \Leftrightarrow t = s$ во всех алгебрах из $\mathcal{K}$.

Импликация $\Leftarrow$ очевидна, а $\Rightarrow$ вытекает из того, что если $t(a_1, \dots, a_n) \neq s(a_1, \dots, a_n)$ для некоторых $a_1, \dots, a_n \in A$, $A \in \mathcal{K}$, то мы можем (различное) $x_1, \dots, x_n \in X$ и любое отображение $f: X \rightarrow A$, при котором $f(x_i) = a_i$; помня, что $(t, s) \notin \ker \hat{f}$.

(Ясно, как свести дело к случаю, когда $f(X) \subset X \subset A$ и A порождена мн-н $f(X)$).

Действительно: Пусть $\mathcal{Z}$ — любое мн-во, $|Z| \geq |\Sigma| \cdot |X|$. Ясно, что $|A| \leq |T(X)| \leq |Z|$. Пусть $\psi: A \rightarrow \mathcal{Z}$ — инъекция, $B = \psi(A)$. Положим $\phi(\psi(a_1), \dots, \psi(a_n)) = \psi(\phi(a_1, \dots, a_n))$. Тогда ψ — изоморфизм.

Свободные алгебры

1

Положим $h = \Delta \hat{f}_i: T(X) \rightarrow \prod A_i$. Это гомоморфизм и $\ker h = \bigcap_{i \in I} \ker \hat{f}_i = \nu$. Значит, $T(X)/\nu \in \mathcal{K}$ (это подалгебра алгебры $\prod A_i$ по теореме об изоморфизме).

Пусть $\mathcal{K}'$ — класс всех Σ -алгебр, в кот. выполнены тождества, выполненные во всех алгебрах из $\mathcal{K}$. Тогда $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$. Для $\mathcal{K}'$ — бесконечного множества X продолжим ту же процедуру, что и выше — рассмотрим отображение $f: X \rightarrow A \in \mathcal{K}'$, продолжим его до гомоморфизмов $\hat{f}$ и положим $\nu' = \bigcap \ker \hat{f}$. Показано, что $\nu' = \nu$. Значит, $T(X)/\nu' \in \mathcal{K}$. Но любая алгебра $A \in \mathcal{K}'$ является образом $\hat{f}(X)$ для достаточно большого X ($|X| \geq |A|$). Значит, $A \in \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, откуда $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$.

Импликация $\Leftarrow$ очевидна.

[Следствие: класс конечномерных вект. н-в не задаётся тождествами]

Свободные алгебры

Своб. алг.
Опр. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие Σ -алгебр, и пусть X — ненулевое множество. Алгебра $A \in \mathcal{V}$ называется свободной алгеброй над X в многообразии $\mathcal{V}$, если A порождена мн-н X ;

$\forall f: X \rightarrow B \in \mathcal{V} \exists$ гом-н $\hat{f}: A \rightarrow B, \hat{f}|_X = f$.
Более общее определение: (A, i) — своб. алг. над X , если $i: X \rightarrow A$ — вложение, A порождена мн-н $i(X)$ и $\forall f: X \rightarrow B \in \mathcal{V} \exists$ гом-н $\hat{f}: A \rightarrow B, \hat{f} \circ i = f$.

Зам. Показано, что эти определения дают изоморфизм алгебр. Пусть (A_1, i_1) и (A_2, i_2) — две св. алгебры. Тогда $i_1 = \hat{i}_1 \circ i_2$ и $i_2 = \hat{i}_2 \circ i_1$, где $\hat{i}_2: A_2 \rightarrow A_1$ — гом-н. Алгебра A_1 порожд. мн-вом $i_1(X) \Rightarrow \forall x \in A_1 \exists t \in T(X), a = t(i_1(x_1), \dots, i_1(x_n))$. Имеем $\hat{i}_2(a) = t(\hat{i}_2(i_1(x_1)), \dots, \hat{i}_2(i_1(x_n))) = t(i_2(x_1), \dots, i_2(x_n))$ и $i_1(\hat{i}_2(a)) = t(i_1(i_2(x_1)), \dots, i_1(i_2(x_n))) = t(i_1(x_1), \dots, i_1(x_n)) = a$, так что $\hat{i}_1$ и $\hat{i}_2$ взаимно обратны.

Зам. Ясно также, что если гом-н $\hat{f}$ существует, то он единственный.

Существование свободной алгебры

1

Пример: $T(X)$ — свободная алгебра над X в многообразии всех Σ -алгебр. (без тождеств).

Т. Для любого ^{нестривительного} многообразия $\mathcal{V}$ Σ -алгебр и любого непустого множества X свободная алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ существует. (и определена однозначно).

□ $F_{\mathcal{V}}(X) = T(X)/\sim$ из доп-ва теоремы Биркгофа. Эта алгебра обладает универсальным свойством (см. определение свободной алгебры): Пусть $A \in \mathcal{V}$ и $f: X \rightarrow A$ — отображение. Положим $Y = f(X)$ и рассмотрим инъекцию ψ между Y и подмногообразием $Z: \psi(Y) \subseteq Z$. Подалгебра A' , порождённая множеством Y в A , изоморфна некоторой алгебре A'' , содержащейся в Z как множество. Пусть ψ'' — соответствующий изоморфизм, $\psi'': A' \rightarrow A''$. Положим $\hat{f} = \psi'' \circ f: X \rightarrow A''$. Гомоморфизм $\hat{f}'': T(X) \rightarrow A''$ — это $\hat{f}'': T(X) \rightarrow A''$ для некоторого $i_0 \in I$. Ясно, что $\hat{f}'_{i_0} = \pi_{i_0} \circ \Delta_{i_0} \hat{f}$, где $\pi_{i_0}: \Pi A_{i_0} \rightarrow A_{i_0}$ — канонические проециции. Это гомоморфизм. Значит, $\psi''^{-1} \circ \hat{f}'_{i_0} = \psi''^{-1} \circ \hat{f}$ — тоже гомоморфизм, и $(\psi''^{-1} \circ \hat{f})|_X = f$. $F_{\mathcal{V}}(X)$ порождена X .

След. Любая алгебра $A \in \mathcal{V}$ является гомоморфным образом (изоморфна факторалгебре) алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ для некоторого множества X .

□ Возьмём любое бесконечное X , $|X| \geq |A|$. Любая сюръекция $f: X \xrightarrow{\text{на}} A$ продолжается до гомоморфизма, очевидно, сюръективного.

Зам. Если алгебра $A \in \mathcal{V}$ порождается множеством Y , то $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ продолжается до сюръективного гомоморфизма $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$.

В дальнейшем мы будем обозначать продолжение отображения на свободную алгебру

Нестривительное многообразие

1

Опр. Скажем, что многообразие $\mathcal{V}$ тривиально, если ^{тривиально} все алгебры в $\mathcal{V}$ одноэлементны.

Зам. Многообразие $\mathcal{V}$ тривиально $\Leftrightarrow$ среди определяющих его тождеств нет тождеств вида $x=y$.

В дальнейшем будем рассматривать только нестривительные многообразия.

Утв. В любом нестривительном многообразии $\mathcal{V}$ для любого (непустого) множества X ^{можно считать} $X \subset T(X)/\sim$ ^{из т. Биркгофа}.

□ Для гомоморфизма $h: T(X) \rightarrow T(X)/\ker h$ (см. доп-во т. Биркгофа) имеем $(t, s) \in \ker h \Leftrightarrow$ тождество $t=s$ выполнено во всех алгебрах из $\mathcal{V}$. Для $x, y \in X$, $x \neq y$, тождество $x=y$ не выполнено $\Rightarrow (x, y) \notin \ker h \Rightarrow \Rightarrow h(x) \neq h(y) \Rightarrow h|_X$ — инъекция (будем считать тождественная).

Зам. Алгебра $T(X)/\sim$ порождена множеством X , так как $T(X)$ им порождена. (при условии, что $\mathcal{V}$ нестривительно).

Зам. Если многообразие нестривительно, то оно содержит алгебры произвольно большой мощности. Действительно, если A содержит хотя бы две разные точки и принадлежит многообразию, то для любого кардинала κ $|A^\kappa| \geq 2^\kappa > \kappa$ и A^κ принадлежит многообразию.

Операция Мальцева. Теорема Мальцева о многообразиях с перестановочными конгруэнциями.
Аксиомы отделимости в топологических алгебрах с операцией Мальцева (и в некоторых других). Коммутативность фундаментальной группы ленточно свободной топологической алгебры, имеющей бинарную операцию с нейтральным элементом.

2

Замечание об отделимости эквивалентности на X и конгруэнции на $F_{gr}(X)$.

Пусть $\mathcal{V}$ — (непустое) многообразие Σ -алгебр и $X \neq \emptyset$ — множество и $\sim_x$ — отношение эквивалентности на X . Положим $Y = X/\sim_x$ и рассмотрим естественное отображение (факторизацию) $f: X \rightarrow Y$. Поскольку $Y \subset F_{gr}(Y)$, это отображение можно трактовать как от-е $X \rightarrow F_{gr}(Y)$. Оно продолжается до гом-изма $\hat{f}: F_{gr}(X) \rightarrow F_{gr}(Y)$. Отношение $\ker \hat{f}$ — конгруэнция на $F_{gr}(X)$, причём для $x, y \in X$ $(x, y) \in \ker \hat{f} \Leftrightarrow x \sim_x y$, потому что $\hat{f}$ — продолжение f , а значит, $\hat{f}(x) = \hat{f}(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim_x y$.

Таким образом, любое отношение эквивалентности на X продолжается до конгруэнции на $F_{gr}(X)$ алгебры $F_{gr}(Y)$ свободной $\Rightarrow \ker \hat{f}$ — наименьшая конгруэнция на $F_{gr}(X)$, продолжающая отношение $\sim_x$.

Опр. композиция отношений

Пусть X — м-во, $R_1, R_2 \subset X \times X$ — отношения на X . Композицией (произведением) $R_1 \circ R_2$ отношений R_1 и R_2 называется отношение $R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X (x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_2\}$. В частности, если $\sim_1$ и $\sim_2$ — отн-е эквив-ти на X , то $x \sim_1 \circ \sim_2 y \Leftrightarrow \exists z \in X : x \sim_1 z \sim_2 y$.

Упр. Пусть $\sim_1$ и $\sim_2$ — отн-е эквив-ти на X . Композиция $\sim_1 \circ \sim_2$ является отношением эквив-ти $\Leftrightarrow \sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1$.

Опр. Отношение $R_1 \sim R_2$ называется перестановочным, если $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Опр. Многообразие Σ -алгебр называется перестановочным или конгруэнц-перестановочным, если любое уже конгруэнция на любой алгебре из этого многообразия перестановочна.

Фактически, пусть $\sim$ — конгруэнция на $F_{gr}(X)$, $\sim \cap (X \times X) = \sim_x$. Положим $A = F_{gr}(X)/\sim$. Пусть h — гомоморфизм $F_{gr}(X) \rightarrow A$, $\ker h = \sim$. Тогда $h|_X = f: X \rightarrow X/\sim_x = Y$. Значит, $Y \subset A$. Пусть $i: Y \rightarrow A$ — вложение $i: F_{gr}(Y) \rightarrow A$ — продолжением его гом-изма. Тогда гом-изм $i \circ \hat{f}$ продолжается до отображения $i \circ \hat{f}: F_{gr}(X) \rightarrow A$ также его продолжением. Такой гом-изм $F_{gr}(X) \rightarrow A$ отображает $\ker \hat{f}$ в $\ker(i \circ \hat{f}) \Rightarrow \ker h = \sim = \ker(i \circ \hat{f})$. Ясно, что $\ker(i \circ \hat{f}) \supset \ker \hat{f}$.

Операция Мальцева (мальцевский терм).
Теорема Мальцева о перестановочности конгруэнции

2

Операция Мальцева (мальцевский терм)

Опр. Операция $\mu: X^3 \rightarrow X$ на множестве X называется операцией Мальцева, если $\forall x, y \in X$ $\mu(x, y, y) = \mu(y, y, x) = x$.

Опр. Пусть A — Σ -алгебра. Терм $\mu(x, y, z)$ (в сигнатуре Σ) называется мальцевским термом для A , если $\forall a, b \in A$ $\mu(a, b, b) = \mu(b, b, a) = a$. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие Σ -алгебр. Терм $\mu(x, y, z)$ (в сигнатуре Σ) будет называться мальцевским термом в $\mathcal{V}$, если в $\mathcal{V}$ выполняются тождества $\mu(x, y, y) = x$ и $\mu(y, y, x) = x$. (Непустое)

Т. Мальцева

Многообразие $\mathcal{V}$ перестановочно $\Leftrightarrow$ в $\mathcal{V}$ существует мальцевский терм.

□ $\Rightarrow$ Рассмотрим множество $X = \{a, b, c\}$ ($a \neq b \neq c \neq a$) и свободную алгебру $F_{gr}(X)$. Пусть $\sim_1 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}$ (это отн-е эквив-ти на X , которое склеивает a и b) $\sim_2 = \{(b, c), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c)\}$ (это отн-е эквив-ти на X , которое склеивает b и c).

Отношения эквив-ти $\sim_1$ и $\sim_2$ порождают на $F_{gr}(X)$ конгруэнции $\sim_1$ и $\sim_2$, причём $a \sim_1 \circ \sim_2 c$. По предположению $\sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1$. Значит, $\exists x \in F_{gr}(X) : a \sim_2 x \sim_1 c$. Элемент x является образом некоего терма $\mu \in T(X)$ при гомоморфизме $h: T(X) \rightarrow F_{gr}(X)$.

Поскольку $\sim_1$ и $\sim_2$ — конгруэнции, имеем $a \sim_2 \mu(a, b, c) \sim_2 \mu(a, c, c)$ и $\mu(a, a, c) \sim_1 \mu(a, b, c) \sim_1 c$. Пусть $A \in \mathcal{V}$, $a, a_2 \in A$ и $f: X \rightarrow A$ определено равенствами $f(a) = f(b) = a_1$, $f(c) = a_2$. Тогда $\sim_1 \subset \ker f$ (так как $a \sim_1 b$) $\Rightarrow \mu(a, a_1, a_2) = a_2 \in A$. $\Rightarrow$ тожд-во $\mu(x, y, x) = x$ выполняется во всех алгебрах $A \in \mathcal{V}$. Аналогично доказывается выполнение тожд-ва $\mu(x, y, y) = x$.

$\Leftarrow$ Пусть $A \in \mathcal{V}$, μ — мальцевский терм и $\sim_1, \sim_2$ — конгруэнции на A . Пусть $a, b, c \in A$, $a \sim_1 b$ и $b \sim_2 c$. Тогда $\mu(a, b, c) \sim_1 \mu(a, a, c) = c$ и $\mu(a, b, c) \sim_2 \mu(a, c, c) = a$. Значит, $a \sim_2 \mu(a, b, c) \sim_1 c$.

Хаусдорфовость T_0 -пространств с непрерывной операцией Маллведа. Пример алгебр с маллведскими термами

2

Топологические свойства

Утв. Пусть A — топологическая алгебра с маллведскими термами (или топологическое пространство с непрерывной операцией Маллведа) и $A \in T_0$ (как топологическое пространство). Тогда $A \in T_2$.

□ Пусть μ — маллведский терм для A , и пусть $a, b \in A$, $a \neq b$. $A \in T_0 \Rightarrow \exists$ открытое мн-во $U \subset A$, для которого $a \in U \neq b$, или $\exists$ открытое мн-во $V \subset A$, для которого $a \notin V \neq b$. Для определенности предположим первое. Имеем $\mu(a, b, b) = a \in U$. Отобр-е $\mu: A^3 \rightarrow A$ непрерывно, U открыто $\Rightarrow \exists$ открытое мн-во $V \ni a$ и $W \ni b$ такие, что $\mu(V, W, W) \subset U$. Если $c \in V \cap W$, то $\mu(c, c, c) = c$, но при этом $\mu(c, c, c) \in \mu(V, W, W) \subset U$. Противоречие.

так из условия
возникает
 $\mu(V \cup W, V \cup W, V \cup W)$

Примеры алгебр с маллведскими термами

① Группа: $\mu(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$. бинарными операциями

② Левая группа, т.е. алгебра L с двумя бинарными операциями $*$ и $\setminus$, константой e и тождеством

$$(1) x * (x \setminus y) = y, (2) x \setminus (x * y) = y, (3) x * e = x.$$

$$\text{Маллв. терм: } \mu(x, y, z) = x * (y \setminus z).$$

$$(1) \Rightarrow \mu(x, x, y) = y, (2) \Rightarrow x \setminus x = x \setminus (x * e) = e \Rightarrow \mu(x, y, y) = x * e = x.$$

③ Квазигруппа, т.е. алгебра Q с тремя бинарными операциями $*$, $/$ и $\setminus$ и тождеством

$$(1) (y/x) * x = y, (2) (y * x)/x = y, (3) x * (x \setminus y) = y, (4) x \setminus (x/y) = y.$$

$$\text{Маллв. терм: } \mu(x, y, z) = (x / (y \setminus y)) * (y \setminus z)$$

$$(1) \Rightarrow \mu(x, y, y) = x$$

$$(2) + (3) \Rightarrow x / (x \setminus x) = (x * (x \setminus x)) / (x \setminus x) = x \Rightarrow \mu(x, x, y) = y.$$

④ Пусть $X^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, причём

$$\{(x, y, z) \in X^3: y = z\} \subset \Pi_1, \quad \Pi_1 \cap \Pi_2 = \{(x, y, z) \in A^3: x = z\}$$

$$\{(x, y, z) \in X^3: x = y\} \subset \Pi_2$$

$$\text{Тогда } \mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_1 \\ z, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_2 \end{cases}$$

— операция Маллведа.

Производные операции и алгебры. Трансляции

2

Производные алгебры

Опр. Пусть Σ — сигнатура, A — Σ -алгебра. На A имеются производные операции $t^A: A^n \rightarrow A$, соответствующие термам $t(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ . Рассмотрим также операции, порожденные из производных фиксацией некоторых переменных, т.е. операции вида $(x_1, \dots, x_k) \mapsto t^A(a_1, \dots, a_{i_1-1}, x_1, a_{i_1+1}, \dots, a_{i_k-1}, x_k, a_{i_k+1}, \dots, a_n)$, где t — терм с n переменными и $a_1, \dots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \dots, a_{i_k-1}, a_{i_k+1}, \dots, a_n \in A$ — фиксированные элементы алгебры A . Такие операции можно будет называть производными операциями.

Опр. Пусть Σ' — новая сигнатура, которая состоит из символов некоторых производных операций и некоторых основных ("некоторых" может означать, в частности, "всех" или "ни одной"). На A определена вся операция из Σ' . Следовательно, на [несущей множестве алгебры] A имеется структура Σ' -алгебры, естественно порожденная структурой Σ -алгебры. Множество A с такой структурой называется производной алгеброй алгебры A .

Опр. Производные операции, которые порождены из термов фиксацией всех, кроме одной, переменных (т.е. унарные производные операции) называются трансляциями. Тождественное отображение $\text{id}: A \rightarrow A$, $\text{id}(x) = x$, является трансляцией (оно порождается термом x). Трансляция t обратима, если существует трансляция t' , для которой $t' \circ t = t \circ t' = \text{id}$. [Все трансляции образуют группу с единицей id , а обратимые — группу T].

Зам. Если на A имеется топология, относительно которой все основные операции непрерывны, то относительно этой топологии и все производные операции непрерывны. Другими словами, если A — топологическая алгебра, то любая производная алгебра тоже является топологической.

Мы видим (когда рассматривали пример), что у любой группы, левой муны или квазигруппы имеется производная алгебра с операцией Мальцева.

Утв. У любой квазигруппы имеется производная алгебра, являющаяся муной.

□ Пусть Q — квазигруппа. Выберем произвольный элемент $e \in Q$ и положим

$$x \circ y = (x * (e \setminus e)) / (y \setminus e)$$

$$x // y = (x * (y \setminus e)) / (e \setminus e)$$

$$x \backslash y = e / (y \setminus (x * (e \setminus e))).$$

Легко проверить, что Q с операциями $e, \circ, //$ и $\backslash$

— мунa.

Утв. Пусть A — алгебра. Среди производных операций на алгебре A имеется операция Мальцева μ , удовлетворяющая дополнительному тождеству $\mu(x, y, \mu(y, x, z)) = z$, тогда и только тогда, когда у A имеется производная алгебра A , являющаяся левой муной.

□ $\Rightarrow$ Возьмем любой элемент $e \in A$ и положим $x * y = \mu(x, e, y)$ и $x \setminus y = \mu(e, x, y)$. Имеем $x * (x \setminus y) = \mu(x, e, \mu(e, x, y)) = y$ (в силу дополнительного тождества), $x \setminus (x * y) = \mu(e, x, \mu(x, e, y)) = y$, $x * e = \mu(x, e, e) = x$.

$\Leftarrow$ Положим $\mu(x, y, z) = x * (y \setminus z)$.

Заметим, что $y \setminus y = y \setminus (y * e) = e$. Значит, $\mu(x, y, y) = x$. Тождество $\mu(x, x, y) = y$ выполняется по определению левой муны. Дополнительное тождество:

□ $\mu(x, y, \mu(y, x, z)) = x * (y \setminus (y * (x \setminus z))) = x * (x \setminus z) = z$.

[Топологическое пространство X называется пр-м с выстраиваемой диагональю или просто выстраиваемым, если существует гомеоморфизм $\psi: X^2 \rightarrow X^2$ и точка $e \in X$ такие, что $\pi_1(\psi(x, y)) = x$ и $\psi(x, x) = (x, e)$ для всех $x \in X$ (здесь π_1 — проектирование на первую координату). При этом гомеоморфизм диагональ переводит в "горизонтал" $\{(x, e): x \in X\}$, отсюда и название. Легко видеть, что если пространство допускает непрерывные операции левой муны, то оно выстраиваемо: достаточно положить $\psi(x, y) = (x, x \setminus y)$. Верно и обратное: операции левой муны на выстраиваемом пространстве можно определить как $x \setminus y = \pi_2(\psi(x, y))$ (π_2 — проектирование на вторую координату) и $x * y = \pi_2(\psi^{-1}(x, y))$.]

Т. Любая топологическая левая мунa удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 .

□ По определению левой муны $e * e = e$ и $e \setminus e = e \setminus (e * e) = e$. Операции непрерывны $\Rightarrow$ для любой окрестности U точки e найдется окрестность V точки e со свойствами $V \setminus V \subset U$ и $V * V \subset U$.

Заметим, что для любой точки $a \in L$ отображение $x \mapsto a * x$ (это трансляция) непрерывно и обратимо. Обратное отображение определено правилами $y \mapsto a \setminus y$. Оно тоже непрерывно. Кроме того, отображение $x \mapsto a * x$ сюръективно, поскольку $\forall b \in L$ имеем $b = a * (a \setminus b)$. Значит, это гомеоморфизм, так что $\forall x \in L$ $x * V$ — окрестность точки x .

Возьмем $x \in \bar{V}$. Поскольку $x * V$ — окрестность этой точки, $\exists y \in x * V \cap V$. Имеем $y \in V$ и $y = x * z$ для некоторого $z \in V$, так что $x = y \setminus z$. Значит, $x \in V \setminus V \subset U$.

Итак, $\bar{V} \subset U$. Мы показали, что в любой окр-ти e содержится другая окр-та с замкнутым замыканием. Поскольку e можно перевести в любую другую точку $a \in L$ гомеоморфизмом $x \mapsto a * x$, этим же свойством обладают и все остальные точки.

Замыкание

Пример пространства с непрерывной операцией Мальцева, не удовлетворяющего аксиоме T_3

2

Пример Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел с топологией, базисом которой составляют все открытые интервалы $(a, b) \cap \mathbb{Q}$, а также множество $\mathbb{Q} \setminus \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$. Эта топология сильнее обычной, поэтому $\mathbb{Q} \in T_2$. Однако $\mathbb{Q}$ не регулярно, так как множество $\mathbb{Q} \setminus \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ является открытой окрестностью 0 в $\mathbb{Q}$, но никакая окрестность нуля V не содержится в нём с замкнутостью. Действительно, V содержит окрестность 0 вида $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$. Пусть $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Базис окрестности точки $\frac{1}{k}$ составляют открытые интервалы $(a, b) \cap \mathbb{Q}$, поэтому любая окрестность этой точки пересекает V (потому что если $\frac{1}{k} \in (a, b)$, то $(a, b) \cap \mathbb{Q} \setminus \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq k \} \neq \emptyset$). Значит, $\frac{1}{k} \notin V$.

Пространство $\mathbb{Q}^3$ можно представить как $\mathbb{Q}^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, причём

$$\Pi_1 \supset \{ (x, y, y) : x, y \in \mathbb{Q} \}, \quad \Pi_2 \supset \{ (x, x, y) : x, y \in \mathbb{Q} \},$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \{ (x, y, x) : x, y \in \mathbb{Q} \}$$

и множества Π_1 и Π_2 замкнуты.

Действительно, положим $\Delta = \{ (x, x, x) : x \in \mathbb{Q} \}$, $X_1 = \{ (x, y, y) : x, y \in \mathbb{Q} \} \subset \mathbb{Q}^3$, $X_2 = \{ (x, x, y) : x, y \in \mathbb{Q} \} \subset \mathbb{Q}^3$.

Множества X_1 и X_2 замкнуты в $\mathbb{Q}^3$ и $X_1 \cap X_2 \subset \Delta$. Значит, $X_1 \setminus \Delta$ и $X_2 \setminus \Delta$ замкнуты в $\mathbb{Q}^3 \setminus \Delta$ и $X_1 \cap X_2 = \Delta$.

Пространство $\mathbb{Q}^3 \setminus \Delta$ нормально (потому что метризуемо) и нульмерно (потому что его база, состоящая из открыто-замкнутых множеств — это $\{ (a, b, c) \times (d, e, f) \setminus \Delta : a < b, c < d, e < f \}$ и симметрично нульмерно (так как есть счётная база)). Значит, $\exists A \subset \mathbb{Q}^3 \setminus \Delta$:

A открыто-замкнуто, $Y_1 \subset A$, $Y_2 \subset (\mathbb{Q}^3 \setminus \Delta) \setminus A$. A и $(\mathbb{Q}^3 \setminus \Delta) \setminus A$ замкнуты в $\mathbb{Q}^3 \setminus \Delta \Rightarrow \forall \mathbb{Q}^3$ есть замкнутые мн-ва F_1 и F_2 т.ч. $F_1 \cap \mathbb{Q}^3 \setminus \Delta = A$, $F_2 \cap \mathbb{Q}^3 \setminus \Delta = (\mathbb{Q}^3 \setminus \Delta) \setminus A$. Ясно, что $F_1 \cap F_2 \subset \Delta$. Положим $\Pi_1 = F_1 \cup \Delta$, $\Pi_2 = F_2 \cup \Delta$.

H -пространства. Коммутативность фундаментальной группы линейно связного H -пространства

2

Поскольку топология пр-ва $\mathbb{Q}$ сильнее топологии пр-ва $\mathbb{Q}$, те же множества Π_1 и Π_2 замкнуты и в $\mathbb{Q}^3$ (и при этом выполняются те же свойства). Операция $\mu: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}$, определённая правилами

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_1, \\ z, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_2, \end{cases}$$

определена корректно (так как $\Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \{ (x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Q} \}$ и непрерывна, так как прообраз любого 3-го мн-ва при μ замкнут: если $F \subset \mathbb{Q}$, то

$$\mu^{-1}(F) = (F \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap \Pi_1 \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times F) \cap \Pi_2.$$

Пример пространства, не допускающего непрерывную операцию Мальцева, можно получить, например из следующего замечания и следующей теоремы.

Зам. Если топологическое пространство X допускает непрерывную операцию Мальцева, то оно является H -пространством, т.е. допускает непрерывную бинарную операцию $h: X^2 \rightarrow X$ с единицей $e \in X$ (т.ч. $h(x, e) = h(e, x) = x \quad \forall x \in X$). Действительно, достаточно положить $h(x, y) = \mu(x, y, e)$ где μ — опер. Мальцева.

Т. Фундаментальная группа любого линейно связного H -пространства коммутативна.

□ Будем использовать обозначение $x+y = h(x, y)$. Пусть e — единица, $a(t)$ и $b(t)$ — (замкнутые) пути из e в e (петли). Тогда $c(t) = a(t) + b(t)$ — тоже путь из e в e . Покажем, что $c \sim a \circ b \sim b \circ a$. Рассмотрим функции $x, y: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, опред. правилами $x(t, \tau) = 2\tau$, если $2\tau - t < 0$; $x(t, \tau) = \frac{t+2\tau-2t\tau}{2-t}$, если $2\tau - t \geq 0$; $y(t, \tau) = 0$, если $2\tau - t < 0$; $y(t, \tau) = \frac{2\tau-t}{2-t}$, если $2\tau - t \geq 0$.

Отображение $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, опред. правилом $(t, \tau) \mapsto a(x(t, \tau)) * b(y(t, \tau))$ непрерывно. При фиксир. τ оно даёт непрерывный путь из e в e (как функция от t). При $\tau = 0$ получаем $c(t)$, при $\tau = 1$ получаем $a \circ b$. Значит, $c \sim a \circ b$.

Рассматривая $(t, \tau) \mapsto a(y(t, \tau)) * b(x(t, \tau))$, видим, что $c \sim b \circ a$.

След. На пр-ве ∞ нельзя ввести непрерывную операцию Мальцева.

Многообразия топологических алгебр.
Свободные топологические алгебры.
Компактно порождённые топологические алгебры

3

Многообразия топологических алгебр

Топ. алгебра
Опр. Напомним, что топологическая Σ -алгебра — это Σ -алгебра с топологией, относительно которой все операции непрерывны.

Произвед.
Опр. Произведения топологических алгебр всегда снабжаются Тихоновской топологией (самой слабой топологией, относительно которой все проектирования на компоненты непрерывны).

Если A — топологическая алгебра и $\sim$ — конгруэнция на A , то на факторалгебре может существовать много топологий, относительно которых естественный гомоморфизм $h: A \rightarrow A/\sim$ непрерывен (в теории топологических алгебр касаются непрерывности только непрерывные гомоморфизмы).

Топ. факторалгебра
Опр. Топологической факторалгеброй $A/\sim$ топологической алгебры A называется факторалгебра $A/\sim$, снабжённая

такой топологией, которая является самой сильной из всех топологий, относительно которых естественный гомоморфизм $h: A \rightarrow A/\sim$ непрерывен. Её можно охарактеризовать так: множество $U \subset A/\sim$ открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда его полный прообраз $h^{-1}(U)$ открыт (замкнут) в A . (Сторонников называют возможными факторными топологиями).

Топ. подалгебра
Опр. Подалгебры топологических алгебр снабжаются индуцированной топологией.

Абстрактные алгебры
В дальнейшем алгебры без топологии и многообразия (или другие классы) таких алгебр мы будем называть абстрактными, чтобы отличать их от топологических. Если A — топологическая алгебра, то соответствующую абстрактную алгебру (т.е. ту же алгебру, но без топологии) мы будем обозначать через $\bar{A}$.

Если мы попытаемся определить многообразие топологических алгебр по аналогии с многообразиями абстрактных, то возникает множество вариантов.

Мы будем рассуждать о топ. алгебрах с точки зрения до топологических изоморфизмов (т.е. непрерывные изоморфизмы с непрерывными обратными).

Многообразия топологических алгебр: определения.
Классы многообразия и алгебры

3

Опр.
многообразие
(широкое, полное)
топ. алгебр

Класс топологических Σ -алгебр называется многообразием топологических Σ -алгебр, если он замкнут относительно

- 1) (топологически) произведений
- 2) перехода к (топологическим) подалгебрам
- 3) перехода к тем образам при факторных гомоморфизмах, которые сами являются топологическими алгебрами (т.е. операции на образе при факторном гомоморфизме остаются непрерывными).

Заменив третье условие на условие замкнутости относительно

- 3') перехода к тем непрерывным гомоморфизмам образам (т.е. образам при непрерывных гомоморфизмах — это те же факторалгебры, но с топологией, которая может оказаться слабее факторной), которые сами являются топологическими алгебрами (операции непрерывны по условию определения широкого многообразия топологических алгебр).

Наконец, если $\bar{V}$ — произвольное многообразие абстрактных алгебр, то класс всех топологических алгебр A , для которых $\bar{A} \in \bar{V}$, называется полным многообразием топологических алгебр.

[Возможные варианты эти не исчерпываются — можно рассуждать о классах топ. алгебр, замкнутого только относительно перехода к замкнутым подалгебрам (и относительно произведений и гомоморфизмов или факторных образов) или требовать, чтобы все алгебры в классе были хаусдорфовыми.]

Зам. Все широкие и полные многообразия топ. алгебр являются многообразиями. Кажется, полное многообразие является широким.

Обозн.
 $\bar{V}$ — множество топ. алгебр
многообразие
алгебр
Если V — многообразие топ. алгебр, то через $\bar{V}$ мы будем обозначать класс всех абстрактных алгебр вида $\bar{A}$ для $A \in V$. Будем называть $\bar{V}$ и $\bar{A}$ несущим многообразием и алгеброй топ. мн-ва V и топ. алгебры A .

Примеры многообразий топологических алгебр.
Алгебры с антидискретной топологией

3

Примеры

1. Класс всех хаусдорфовых топ. групп — не многообразие топ. алгебр.
2. Класс всех предкомпактных топ. групп (т.е. тех, которые вкладываются в компактные топ. группы в качестве топ. подгрупп) — многообразие топ. алгебр (широкое, но не полное)
3. Класс всех топ. групп — полное многообразие.
4. Класс $\mathcal{K}$ топ. алгебр с антидискретной топологией — многообразие топ. алгебр $\Leftrightarrow \bar{\mathcal{K}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

Зам. Любая Σ -алгебра A , снабжённая антидискретной топологией (открыты только $\emptyset$ и A), является топологической. Любая Σ -алгебра A , снабжённая дискретной топологией (открыты все подмножества A), является топологической.

Утв. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топ. алгебр и $A \in \mathcal{V}$. Пусть B — топ. алгебра с антидискретной топологией такая, что $\bar{B} \cong \bar{A}$. Тогда $B \in \mathcal{V}$.

- Будем считать без ограничения общности, что $\bar{B} = \bar{A}$. Рассмотрим топологическую подалгебру C произведения $A^{\mathbb{N}}$, состоящую из всех последовательностей $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i \in A$, которые стабилизируются, т.е. принимают постоянное значение начиная с некоторого момента. Определим отображение $h: C \rightarrow B$, которое каждой такой последовательности ставит в соответствие это постоянное значение. Ясно, что h — непрерывный гомоморфизм. Покажем, что этот гомоморфизм также и открыт, т.е. переводит открытое множество в открытое. Открытое множество в C может быть пустым или непустым. Пустое множество переходит в пустое, а любое непустое содержит непустое множество вида $(U_1 \times \dots \times U_k \times A \times A \times \dots) \cap C$, где $k \in \mathbb{N}$ и U_i — открытые подмножества A . Ясно, что постоянные "хвосты" стабилизирующих последовательностей в этом мн-ве могут быть любыми. Значит,

Утверждение: несущее многообразие $\bar{\mathcal{V}}$ — действительно многообразие. Аналог теоремы Биркгофа для топологических алгебр.

3

образом этого множества при h является вся алгебра B . Следовательно, образ при h любого открытого подмножества алгебры C — это либо $\emptyset$, либо B , т.е. он открыт в B .

Из критерия факторности ^{сюръективного} гомоморфизма (множество открыто в образе $\Leftrightarrow$ его полный прообраз открыт в прообразе) немедленно вытекает, что всякий открытый гом-н является факторным. Значит, B является образом при факторном гом-не алгебры C . Из того, что $A \in \mathcal{V}$, следует, что $\square A^{\mathbb{N}} \in \mathcal{V}$, $C \in \mathcal{V}$ и $B \in \mathcal{V}$.

След. Если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\bar{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

- Обозначим через $\mathcal{W}$ класс всех топологических алгебр B с антидискретной топологией, для которых существует $A \in \mathcal{V}$ такая, что $\bar{A} = \bar{B}$. В силу доказанного утверждения $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ и $\bar{\mathcal{W}} = \bar{\mathcal{V}}$. Понятно, что если $\bar{B} \in \mathcal{W}$ и C — любая (абстрактная) подалгебра алгебры $\bar{B}$, то C с антидискретной топологией принадлежит классу $\mathcal{W}$, так как B с антидискр. топ. принадлежит многообразию $\mathcal{V}$, а это замкнуто относительно перехода к подалгебре. Аналогично, класс $\mathcal{W}$ замкнут относительно произведения. Наконец, если $\bar{B} \in \mathcal{W}$ и $h: \bar{B} \xrightarrow{h} C$ — гом-н абстрактных алгебр, то h непрерывен относительно антидискр. топологии на $\bar{B}$ и C . Значит, $C \in \mathcal{W}$.

Для многообразий топологических алгебр есть аналог теоремы Биркгофа. Например, пусть $\mathcal{D}$ — направленное множество, и пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow T(X)$ — отображение, положим $t_d = f(d)$ для $d \in \mathcal{D}$. Скажем, что в топологической алгебре A выполнено предельное тождество $t_d \rightarrow t$ (где $t \in T(X)$), если $\forall \varphi: X \rightarrow A$ направленность $t_d(\varphi(x_d), \dots, \varphi(x_{n_d}))$ сходится к $t(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ (здесь $x_1^d, \dots, x_n^d$ — переменные, от которых зависит терм t_d и $x_1, \dots, x_n$ — переменные терма t).

Класс $\mathcal{K}$ топ. алгебр является широким мн-н $\Leftrightarrow \exists$ набор тождеств Γ и набор пред. тожд-в Γ' такие, что $\mathcal{K}$ состоит в точности из всех алгебр, в кот. выполнены тожд-ва из $\Gamma \cup \Gamma'$. Для произвольных многообразий топ. алгебр верна аналогичная теорема, только предельные тождества надо заменить на пред. квазитожества, т.е. выражения вида

$$\Lambda(x_i \rightarrow x_i') \Rightarrow t_d \rightarrow t.$$

Сигнатура Σ фиксируется только Σ -алгебрами

W. Taylor

Свободные топологические алгебры

Напомним, что абстрактная свободная алгебра над X в данном многообразии абстрактных алгебр содержит множество X (в качестве подмножества) и порождается этим множеством. Естественно попытаться определить свободную топологическую алгебру над топологическим пространством X в данном многообразии топ. алгебр так, чтобы она содержала X в качестве подпространства (и порождалась этим подпространством в алгебраическом смысле). Однако так не получится, потому что, например, если $X \notin T_3$, то X нельзя вложить (как подпространство) ни в какую топологическую левую группу: мы доказали выше, что любая топ. левая группа удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 , а это свойство наследуется подпространствами. Поэтому нужно использовать более общее определение:

Опр.

свободной топ. алгебры

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топ. алгебр и X — топ. пр-во. Свободная топологическая алгебра над X в многообразии $\mathcal{V}$ — это топ. алгебра $A(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $i: X \rightarrow A(X)$ со след. св-ми:

- $A(X)$ порождается множеством $i(X)$;
- для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow B \in \mathcal{V}$ существует непр. гом-м $h: A(X) \rightarrow B$ т.ч. $f = h \circ i$.

Обозначение: $(F_{\mathcal{V}}(X), i)$ или $F_{\mathcal{V}}(X)$

универсальное свойство

Зам.

Любые две свободные алгебры $(A(X), i)$ и $(A'(X), i')$ топологически изоморфны; точнее, существует топологический изом-м $\psi: A(X) \rightarrow A'(X)$ такой, что $i' = \psi \circ i$. Это доказывается довольно так же, как в абстрактном случае.

Док-во существования свод. топ. алгебры тоже аналогично док-ву существования свободной (абстрактной) алгебры. Мы видели только док-во, чтобы обойтись без абсолютно свободной топ. алгебры.

Т.

Считая
сигна-
туру
 Σ
подра-
зубаю-
щейся

Для любого топ. пр-ва X и любого многообразия $\mathcal{V}$ топ. алгебр существует свободная топ. алгебра над X в многообразии $\mathcal{V}$.

□ Нам нужно построить топ. алгебру $A(X)$ и непр. отображение $i: X \rightarrow A(X)$ так, что $\forall$ непр. $f: X \rightarrow A \in \mathcal{V}$ $\exists$ гом-м $\hat{f}: A(X) \rightarrow A$, который непрерывен и удовлетворяет условию $f = \hat{f} \circ i$.

Во-первых, достаточно научиться строить $\hat{f}$ для отображения $f: X \rightarrow A$ с тем свойством, что A порождается образом $f(X)$, потому что если нужный гом-м $\hat{f}$ существует, то $\hat{f}(i(X)) = f(X)$ и $\hat{f}(A(X))$ — подалгебра алгебры A , порожденная множеством $i(X)$, так что дополнено в A до этой подалгебры ни на что не влияя. Таким образом, нас интересуют только непр. отображения пр-ва X в топ. алгебры $A \in \mathcal{V}$ конечно, не превосходящей $\kappa = (|X| + |\Sigma|) \cdot \aleph_0$. Мощность топологии любого топ. пр-ва Y мощности $|Y| \leq \kappa$ не превосходит 2^κ , так как топология — это сев-во подмн-в мн-ва Y . Значит, вес $w(Y)$ (наименьшая мощность базы топологии) тоже не превосходит 2^κ . Известный факт из общей топологии: любое топ. пр-во Y веса $\leq 2^\kappa$ и мощности $\leq 2^{2^\kappa}$ вкладывается в качестве подпространства в тиконовскую степенку E^{2^κ} , где E — мн-во $\{0, 1, 2\}$ с топологией $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2\}\}$. Таким образом, нас интересуют только A , которые вкладываются (как подпр-ва) в E^{2^κ} . На подпр-вах пр-ва E^{2^κ} операций — отображения из конечных степеней этих подпространств в сами подпр-ва, т.е. подмножества (конечных) декартовых произведений $(E^{2^\kappa})^n \times E^{2^\kappa} = (E^{2^\kappa})^{n+1}$. Все такие отображения образуют множество (не собственный класс). Значит, каждая интересующая нас алгебра A топологически изоморфна топ. алгебре из некоторого множества (не класса) $\mathcal{A}$.

Итак, нам нужно научиться обрабатывать все непрерывные отображения $X \rightarrow A \in \mathcal{A}$.

Пр-во E^{2^κ} — аналог мн-ва $\mathbb{Z}$ из док-ва теоремы Биркгофа (для абстрактной алгебры)

Существование свободной топологической алгебры 3

Как ни будь зафиксируем все непрерывные отображения $X \rightarrow A \in \mathcal{A}$; получим мн-во $\{f_i: X \rightarrow A_i: i \in I\}$ (I — индексное мн-во). Одна и та же алгебра $A \in \mathcal{A}$ может породить несколько индексов, но это неважно. Положим $\tilde{f} = \Delta f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ и обозначим через $A(X)$ подалгебру алгебры $\prod_{i \in I} A_i$, порождённую мн-вом $\tilde{f}(X)$. Через i обозначим то же самое отображение $\tilde{f}$, но рассматриваемое не как отображение $X \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$, а как отображение $X \rightarrow A(X)$. Покажем, что алгебра $A(X)$ вместе с отображением i обладает нужными свойствами.

Во-первых, ясно (по определению), что $A(X)$ порождена множеством $i(X)$.

Универсальное свойство тоже выполнено.

Действительно, пусть $f: X \rightarrow B \in \mathcal{B}$ — непрерывное отображение, и пусть B' — подалгебра (топологическая, разумеется) алгебры B , порождённая мн-м $f(X)$. Она топологически изоморфна некоторой алгебре $A \in \mathcal{A}$ (так мы определяем мн-во $\mathcal{A}$).

Пусть $\psi: B' \rightarrow A$ — топологический изоморфизм.

Непрерывное отображение $\psi \circ f: X \rightarrow A$ — это одно из отображений $f_i: X \rightarrow A_i$ (где $A_i = A$). По определению диагонального произведения $\tilde{f}_i = \pi_i \circ \tilde{f}$, где $\pi_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ — проектирование. Поскольку ψ — гомоморфизм, и притом непрерывный. Значит, сужение $\pi_i|_{A(X)}$ — тоже непрерывный гомоморфизм, так же как и композиция $\psi^{-1} \circ \pi_i|_{A(X)}$. Положим $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \pi_i|_{A(X)}$. Поскольку $\tilde{f}_i = \pi_i \circ \tilde{f}$ и $\tilde{f}$ совпадает с i (у этих отображений только области значений разные, но это никак не влияет), и тем $\psi \circ f = \tilde{f}_i = \pi_i \circ \tilde{f} = \pi_i \circ i(X) \circ i = \pi_i|_{A(X)} \circ i$ (так как $i(X) \subset A(X)$). Следовательно, $f = \psi^{-1} \circ \pi_i|_{A(X)} \circ i = \hat{f} \circ i$.

$i(X) \subset A(X)$. Следовательно, $f = \psi^{-1} \circ \pi_i|_{A(X)} \circ i = \hat{f} \circ i$.

Несущая алгебра свободной топологической алгебры является свободной абстрактной алгеброй 3

Отныне будем обозначать свободную топ. алгебру над топ. пр-м X в данном многообразии топ. алгебр через $F_{\text{топ}}(X)$ или $(F_{\text{топ}}(X), i_X)$, где $i_X = i$ — соответствующее отображение $i: X \rightarrow F_{\text{топ}}(X)$ из определения свободной топ. алгебры.

Напомним, что двумя гл-ми сверху мы обозначали несущие алгебры и многообразия данных топ. алгебр и многообразий, т.е. те же алгебры и многообразия, но без топологии.

Лемма. Пусть $\mathcal{B}$ — (нетривиальное) многообразие топ. алгебр, X — топ. пр-во и $(F_{\text{топ}}(X), i_X)$ — свободная топ. алгебра над X в $\mathcal{B}$. Тогда
(i) отображение $i_X: X \rightarrow F_{\text{топ}}(X)$ инъективно
(ii) $F_{\text{топ}}(X)$ — свободная алгебра над мн-вом $i_X(X)$ в многообразии $\mathcal{B}$, так что $F_{\text{топ}}(X)$ изоморфна абстрактной свободной алгебре над мн-м X в $\mathcal{B}$.

□ Как мы знаем, $\mathcal{B}$ — многообразие абстрактных алгебр. Пусть $F_{\text{абс}}(X)$ — свободная алгебра над мн-м X в $\mathcal{B}$. Из нетривиальности многообразия $\mathcal{B}$ следует, что $X \subset F_{\text{абс}}(X)$ (и X порождает алгебру $F_{\text{абс}}(X)$). Из доказанного пять страниц назад утверждения следует, что $F_{\text{топ}}(X)$ с антидискретной топологией принадлежит многообразию $\mathcal{B}$. Обозначим эту антидискретную топ. алгебру через $\tilde{F}_{\text{топ}}(X)$. Тождественное отображение $\tilde{i}: X \rightarrow \tilde{F}_{\text{топ}}(X)$ (покажем, что $\tilde{F}_{\text{топ}}(X)$ содержит X , но как подмн-во, а не подпространство; на этом подмножестве индуцированная топология антидискретна) непрерывна, потому что любое отображение откуда угодно в антидискретное пр-во непрерывно. Значит, существует непрерывный гомоморфизм $h: F_{\text{топ}}(X) \rightarrow \tilde{F}_{\text{топ}}(X)$ такой, что $\tilde{i} = h \circ i$. Из инъективности отображения $\tilde{i}$ немедленно вытекает инъективность отображения i . Поскольку $i(X)$ порождает $F_{\text{топ}}(X)$ и $X = h(i(X))$ порождает $\tilde{F}_{\text{топ}}(X)$, гомоморфизм h сюръективен. Алгебра $F_{\text{топ}}(X)$ свободна (как абстрактная) $\Rightarrow \exists$ гом-м $g: F_{\text{абс}}(X) \rightarrow F_{\text{топ}}(X)$, продолжающий i (не обязат. непрерывный), легко показать, что $g = h^{-1}$.

Соглашение Согласно доказанному утверждению для любого нетривиального (а мы только такие и рассматриваем) многообразия $\mathcal{M}^0$ топологическая алгебра отображает $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{M}^0}(X)$ инъективно для любого непустого топологического пространства X . В дальнейшем мы будем считать, что как множество X содержится в $F_{\mathcal{M}^0}(X)$ (хотя индуцированная из $F_{\mathcal{M}^0}(X)$ на X топология может быть строго слабее, чем топология пространства X) и $i_X: X \rightarrow F_{\mathcal{M}^0}(X)$ — непрерывное (не гомеоморфное!) тождественное вложение.

Утв. Для любого многообразия $\mathcal{M}^0$ топ. алгебр и любого топ. пр-ва X топология свободной топ. алгебры $F_{\mathcal{M}^0}(X)$ — самая сильная из всех топологий на $\overline{F_{\mathcal{M}^0}(X)}$, относительно которых все операции непрерывны и которые индуцируют на множестве X топологию, содержащуюся в заданной топологии пространства X . (т.е. слабее (не строго) заданной топологии)

□ Пусть $\mathcal{T}$ — топология свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{M}^0}(X)$ и $\mathcal{T}'$ — любая другая топология на $\overline{F_{\mathcal{M}^0}(X)}$, относительно которой все операции непрерывны и которая индуцирует на X топологию, содержащуюся в исходной. Обозначим через $\mathcal{T}_X$ топологию пр-ва X , через $\mathcal{T}'_X$ — топологию, которую $\mathcal{T}'$ индуцирует на X , и через $\tilde{\mathcal{T}}_X$ — топологию, которую на X индуцирует $\mathcal{T}$. По определению свободной топ. алгебры для тождественного отображения $\text{id}: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (X, \mathcal{T}'_X)$ (которое непрерывно, так как $\mathcal{T}'_X \subset \mathcal{T}_X$) существует непрерывный гомеоморфизм $h: F_{\mathcal{M}^0}(X) \rightarrow (\overline{F_{\mathcal{M}^0}(X)}, \mathcal{T}')$, для которого $\text{id} = h \circ i_X$. Полагая, что сам-и h тождественный, так как id и i_X — тождественные отображения, мн-ва X в себя. Осталось показать, что $\mathcal{T}'_X \subset \tilde{\mathcal{T}}_X$. Это немедленно следует из того, что $h|_X$ — непрерывное тождественное отображение $(X, \tilde{\mathcal{T}}_X) \rightarrow (X, \mathcal{T}'_X)$.

Абсолютно свободная топологическая алгебра

Пусть X — топ. пр-во и Σ — сигнатура. Обозначим через $\mathcal{W}^0$ многообразие всех топологических Σ -алгебр. Как обычно, в дальнейшем будем считать сигнатуру фиксированной и называть Σ -алгебры просто алгебрами.

Напомним, что через $T(X)$ мы обозначали алгебру всех термов над X , т.е. абсолютно свободную (абстрактную) алгебру над X . Согласно доказанной теореме в многообразии $\mathcal{W}^0$ существует свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{W}^0}(X)$ — абсолютно свободная топ. алгебра над X , причем $\overline{F_{\mathcal{W}^0}(X)} \cong T(X)$. У нее есть простое описание. Для удобства будем обозначать $F_{\mathcal{W}^0}(X)$ через $W(X)$. Напомним, что $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$, где Σ_n — множество символов n -арных операций.

Положим $W_0(X) = \Sigma_0$ с дискретной топологией и $W_1(X) = \Sigma_0 \oplus X$ (здесь $\oplus$ обозначает топологическую сумму — объединение непересекающихся гомеоморфных копий пространств, в которых каждое слагаемое является открыто-замкнутым подпространством).

Определим пространство $W_2(X)$. Его элементы будут соответствовать термам второй степени (элементам мн-ва $T_2(X)$). Каждый такой терм имеет вид $\sigma(x_1, \dots, x_j)$, где $\sigma \in \Sigma_j$ и $x_i \in W_1(X)$. Для каждой фиксированной операции $\sigma \in \Sigma_j$, где $j > 0$, мы отождествим каждый терм $\sigma(x_1, \dots, x_j)$ с j -кой $(x_1, \dots, x_j) \in W_1(X)^j$ и множество всех таких термов — с множеством $W_1(X)^j$. Снабдим это мн-во стандартной топологией произведения. Мы определим топологию на мн-ве всех термов вида $\sigma(x_1, \dots, x_j)$. Чтобы отметить, что это множество соответствует операции σ , мы будем обозначать его $W_1(X)^j_\sigma$ или $W_1(X)^j_{\sigma}$. Положим $W_2(X) = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} W_1(X)^j_\sigma$. Каждое j -е мн-ва $W_2(X)$ — это j -ка из j -элементов $W_1(X)^j_\sigma$ (с канонич. σ), он отождествляется с термом $\sigma(x_1, \dots, x_j)$.

Чтобы указать, что данная j -ка $(x_1, \dots, x_j)$ принадлежит пространству $W_1(X)^j_\sigma$ с конкретным индексом σ , мы должны писать $(x_1, \dots, x_j)_\sigma$.

Продолжаем в том же духе. Пусть $n \geq 1$ и для меньших n пространства $W_n(X)$ определены. Полагая

$$W_n(X) = \bigoplus_{j \geq 0} \bigoplus_{\substack{\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma}$$

В каждом слагаемом $(W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma}$ каждый элемент каждого множителя $W_{k_i}(X)$ отождествлен с некоторым термом $t_i \in T_{k_i}(X)$, и j -ка $(t_1, \dots, t_j) \in (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma}$ отождествляется с $\sigma(t_1, \dots, t_j)$.

$$\text{Окончательно полагая } W(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W_n(X).$$

Операции на $W(X)$ определяются естественным образом: для $\sigma \in \Sigma_j$ и любых $t_1, \dots, t_j \in W(X)$ ищем те $k_1, \dots, k_j \in \mathbb{N}$, для которых $t_i \in W_{k_i}(X)$ (они определены однозначно, так как все слагаемые, участвующие в определении $W_n(X)$, попарно не пересекаются). Полагая $k = \max\{k_1, \dots, k_j\} + 1$ и $\sigma(t_1, \dots, t_j) = (t_1, \dots, t_j)_{\sigma} \in (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \subset W_k(X) \subset W(X)$.

Поскольку $W(X)$ — топологическая сумма подпространств $W_n(X)$, для любого $j \in \mathbb{N}$ степень $W(X)^j$ — топологическая сумма j -х степеней этих подпространств и их произведений (в количестве j штук) вида $W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X)$. Понятно, что сужение операции σ на каждое такое слагаемое — это гомоморфизм между $W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X)$ и $(W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma} \subset W(X)$. Следовательно, все $\sigma \in \Sigma$ непрерывны.

У нас получилась топологическая алгебра $W(X)$, причем X содержится в $W(X)$ в качестве подпространства и порождает $W(X)$. Проверим выполнение универсального свойства.

Пусть $f: X \rightarrow A$ — любое непрерывное отображение из X в топологическую Σ -алгебру A (любую).

Определим продолжение f до гомоморфизма $\hat{f}: W(X) \rightarrow A$. Будем строить его по индукции, определяя по очереди сужения $\hat{f}_n = \hat{f}|_{W_n(X)}: W_n(X) \rightarrow A$ для $n \in \mathbb{N}$.

Каждому $\sigma \in \Sigma$ соответствует какой-то фиксированный эл-т a_{σ} алгебры A . Для $x \in W_1(X) = X \oplus \Sigma_0$ положим $\hat{f}_1(x) = \begin{cases} a_{\sigma}, & \text{если } x = \sigma \in \Sigma_0 \\ f(x), & \text{если } x \in X. \end{cases}$

Это отображение непрерывно на $W_1(X)$, так как оно непрерывно на каждом из отарото-замкнутого слагаемых X и Σ_0 (напомним, что Σ_0 дискретно).

Пусть $n \geq 1$ и для меньших n непрерывные отображения $\hat{f}_n: W_n(X) \rightarrow A$ определены. Пространство $W_n(X)$ является топологической суммой слагаемых $(W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma}$, где $j \geq 0$, $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$ и $\sigma \in \Sigma_j$. Для $(t_1, \dots, t_j)_{\sigma} \in (W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma}$ положим

$\hat{f}_n((t_1, \dots, t_j)_{\sigma}) = \sigma(\hat{f}_{k_1}(t_1), \dots, \hat{f}_{k_j}(t_j)) \in A$. В результате мы получили отображение $\hat{f}_n: W_n(X) \rightarrow A$. Оно непрерывно, так как его сужение на каждое отарото-з-е слагаемое $(W_{k_1}(X) \times \dots \times W_{k_j}(X))_{\sigma}$ непрерывно в силу непрерывности отображений $\hat{f}_{k_i}$ и операции σ (на A).

Объединяя все отображения $\hat{f}_n$ в одно отображение $\hat{f}: W(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W_n(X) \rightarrow A$, мы получили искомого гомоморфизм.

Итак, $W(X)$ — абсолютно свободная топологическая Σ -алгебра над X . Как мы знаем, каждая абстрактная Σ -алгебра является факторалгеброй абсолютно свободной абстрактной Σ -алгебры над некоторым множеством. Естественно ожидать, что аналогичное утверждение верно и для топологических алгебр, однако это не так. Немного дальше мы приведем соответствующий пример, но сначала сформулируем (без доказательства) следующую теорему.

Теорема Свертковского

3

Т
Свертковский

Теорема Свертковского

Псевдометрика — то же, что метрика, но расстояние между двумя точками может быть нулевым

Пусть X — топ. пр-во, d_X — непрерывная псевдометрика на X , $\bar{\tau}$ — многообразие абстрактной алгебры и $F_{\bar{\tau}}(X)$ — абстрактная свободная алгебра над множеством X . Тогда на $F_{\bar{\tau}}(X)$ существует псевдометрика d со свойствами:

- 1) $d|_{X \times X} = d_X$;
- 2) все операции непрерывны относительно топологии, порожденной псевдометрикой d на $F_{\bar{\tau}}(X)$;
- 3) для любого $\alpha \in F_{\bar{\tau}}(X)$ и $\varepsilon > 0$ ε -окрестность (относительно d) элемента α состоит из всех $\beta \in F_{\bar{\tau}}(X)$, для которых существуют терм t , зависящий от n переменных, и точки $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in X$ такие, что $\alpha = t(x_1, \dots, x_n)$, $\beta = t(y_1, \dots, y_n)$ и

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n d_X(x_i, y_i) < \varepsilon.$$

Доказательство сводится к тому, что сначала определяется функция $\tilde{d}$ на $F_{\bar{\tau}}(X) \times F_{\bar{\tau}}(X)$ как инфимум всех выражений $(*)$ по всем термам t для которых $\alpha = t(x_1, \dots, x_n)$ и $\beta = t(y_1, \dots, y_n)$, и тогда $x_i, y_i \in X$, а потом доказывается (с помощью неравенства треугольника), что инфимум достигается и это получившаяся функция действительно является псевдометрикой с нужными свойствами.

След. 1 Если X — тихоновское (т.е. вполне регулярное) пространство и $\bar{\tau}$ — любое многообразие абстрактной алгебры, то на $F_{\bar{\tau}}(X)$ существует тихоновская топология τ такая, что X содержится в $(F_{\bar{\tau}}(X), \tau)$ в качестве подпространства.

□ Топологическое пространство X является тихоновским тогда и только тогда, когда в нем все конечные множества замкнуты (т.е. X является T_1 -пространством).

Вложение тихоновского пр-ва в свободную алгебру

3

и топология X порождается непрерывными псевдометриками в том смысле, что существует семейство Φ псевдометрик на X такое, что все $d \in \Phi$ непрерывны и множество шаров $\{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0, d \in \Phi\}$ образует базу топологии пространства X . Действительно, если X тихоновское (т.е. $X \in T_1$ и $X \in T_{3\frac{1}{2}}$; последнее означает, что $\forall x \in X$ и $\forall U_x$ — окрестности точки x — $\exists$ непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 0$, $f|_{U_x} \equiv 1$), то в качестве Φ можно взять семейство всех псевдометрик, определенных формулами $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ для всех непрерывных $f: X \rightarrow [0, 1]$; обратно, если семейство Φ существует, то функциями, существование которых требуется в определении тихоновости, являются $f(y) = \min\{\frac{d(x, y)}{\varepsilon}, 1\}$, где d — псевдометрика из Φ со свойством $B_d(x, \varepsilon) \subset U_x$. (Она существует, потому что по предположению существует $d \in \Phi$, $x' \in X$ и $\varepsilon' > 0$, где $x \in B_d(x', \varepsilon')$ и имеем $d(x, x') < \varepsilon'$, и в силу неравенства треугольника $B_d(x, \varepsilon' - d(x, x')) \subset B_d(x', \varepsilon') \subset U_x$).

Продолжив все псевдометрики $d \in \Phi$ на $F_{\bar{\tau}}(X)$ в соответствии с теоремой Свертковского, мы получим семейство $\hat{\Phi}$ псевдометрик на $F_{\bar{\tau}}(X)$, каждая из которых порождает на $F_{\bar{\tau}}(X)$ топологию, согласованную со всеми операциями и порождающую на X топологию, содержащуюся в заданной топологии пространства X . Взяв супремум всех этих топологий, мы получим топологию на $F_{\bar{\tau}}(X)$, которая порождается семейством псевдометрик $\hat{\Phi}$ и потому удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$. Истинно, что она индуцирует заданную топологию пространства X на X . Из свойств продолжения псевдометрики по Свертковскому несложно убедиться, что эта топология удовлетворяет также аксиоме T_1 , т.е. является тихоновской.

След. 2 Пусть $\mathcal{V}$ — ^{каждодына, метризуемое} любое многообразие топ. алгебр. Тогда всякое тихоновское пространство X содержится в свободной топологической алгебре $F_p(X)$ в качестве подпространства.

- Как мы знаем, $\tilde{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр и $F_p(X) \cong F_{\tilde{\mathcal{V}}}(X)$. Ещё мы знаем, что топология алгебры $F_p(X)$ — самая сильная из всех топологий, согласованных со всеми операциями и индуцирующая на X топологию, содержащуюся в заданной. В силу предыдущего следствия одна из таких топологий индуцирует на X заданную топологию пространства X . Значит, топология свободной алгебры $F_p(X)$ тоже её индуцирует.
- свободной алгебры $F_p(X)$ тоже её индуцирует.

Лем. Для любого многообразия $\mathcal{V}$ топологической алгебр всякое тихоновское пространство X замкнуто в своей свободной топ. алгебре $F_p(X)$.

- Пусть K — любой хаусдорфов компакт, содержащий X в качестве подпространства (для тихоновского X такой компакт всегда существует: например, диагональное произведение Δ_X всех непрерывных функций $f_\alpha: X \rightarrow [0,1]$ осуществляет вложение X в произведение отрезков, которое компактно по теореме Тихонова о произведении компактов). Обозначим через $\tilde{F}_p(K)$ свободную алгебру $F_{\tilde{\mathcal{V}}}(K)$ с топологией, порождённой продолжением псевдометрики по Сверкивскому. Она тихоновская (см. следствие 1), а значит, хаусдорфова, и $\tilde{F}_p(K)$ содержит компакт K в качестве подпространства. Значит, K замкнут в $\tilde{F}_p(K)$. Подалгебра $\langle X \rangle$ алгебры $\tilde{F}_p(K)$, порождённая множеством X , изоморфна свободной алгебре $F_{\tilde{\mathcal{V}}}(X)$ (как абстрактная алгебра), причём $\langle X \rangle \cap K = X$. Ясно, что все операции на $\langle X \rangle$

непрерывны относительно индуцированной из $\tilde{F}_p(K)$ топологии и X — замкнутое подпространство алгебры $\langle X \rangle$, так как K — замкнутое подпр-во алгебры $\tilde{F}_p(K)$. Свободная топ. алгебра $F_p(X)$ отличается от $\langle X \rangle$ с индуцированной топологией лишь тем, что на $F_p(X)$ группа топология — она сильнее топологии алгебры $\langle X \rangle$, а как абстрактные алгебры эти алгебры совпадают. Значит, всё, что замкнуто в $\langle X \rangle$, остаётся замкнутым и в $F_p(X)$; в частности, подпр-во X замкнуто в $F_p(X)$.

В случае конечной сигнатуры это же рассуждение доказывает замкнутость и некоторых групп подалгебры $F_p(X)$. В качестве примера рассмотрим свободную топологическую группу $F(X)$. Как известно, её можно представлять себе либо как множество несократимых слов вида $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ (случай $n=0$ соответствует пустому слову e), либо как множество произвольных слов такого вида (в этом случае следует объявить слова, которые можно получить друг из друга вставкой и удалением пар соседних букв вида xx^{-1} и $x^{-1}x$, равными). Число n называется длиной слова. Множество $F(X)$ естественно представляется как $F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(X)$, где $F^n(X)$ — множество всех слов длины $\leq n$. Обозначим через X^{-1} изоморфную копию пространства X , не пересекающуюся с X , и положим $\tilde{X} = X \oplus X^{-1} \oplus \{e\}$. Для каждого n подпр-во $F^n(X)$ свободной группы $F(X)$ является образом пространства $\tilde{X}^n$ при естественном отображении умножения $i_n: (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \mapsto \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n$, где $\tilde{x}_i \in \tilde{X}$. Это отображение непрерывно, так как умножение и инверсия в $F(X)$ непрерывны. Если X компактно, то отсюда вытекает, что все $F^n(X)$ компактны и потому замкнуты в $F(X)$, а если нет, то мы можем вложить X в компакт K и

применить тот же трюк, что и выше: заметим, что все $F^n(K)$ компактны и потому замкнуты в $F(K)$, что подгруппа $\langle X \rangle$, порожденная множеством X в $F(K)$, совпадает с $F(X)$ как абстрактная группа, и что $F^n(K) \cap \langle X \rangle = F^n(X)$ (как множества). Следовательно, все $F^n(X)$ замкнуты в $\langle X \rangle$ с индуцированной из $F(K)$ топологией. Значит, $F^n(X)$ замкнуты в $F(X)$ и в более сильной топологии свободной группы.

Опр. Пусть X — топ. н-а, $X_\alpha, \alpha \in I$, — его подр-ва и $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$. Говорят, что топология н-ва X является топологией индуктивного предела относительно разложения $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, если множество $S \subset X$ открыто (замкнуто) в X тогда и только тогда, когда $S \cap X_\alpha$ открыто (замкнуто) в индуцированной топологии н-ва X_α для каждого $\alpha \in I$.

То, что абсолютно свободная топ. алгебра $W(X)$ (в многообразии всех топ. Σ -алгебр для данной фиксир. сигнатуры Σ) является суммой своих подр-пространств $W_n(X)$, означает, в частности, что топология алгебры $W(X)$ является топологией индуктивного предела относит. разложения $W(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n(X)$.

Лемма (Мальцев) Если X — компакт и $\mathcal{U}$ — любое полное многообр. топ. алгебр с конечной сигнатурой, то $F_{\text{top}}(X)$ обладает топологией индуктивного предела относительно разложения $F_{\text{top}}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$.

Доказательство у этой теоремы длинное и техническое (оно сводится к доказательству того, что все операции непрерывны относительно топологии индуктивного предела. В общем случае это неверно (см. ниже).

Мы почти готовы привести пример топ. алгебры, факторалгебры которой не является топ. алгеброй относительно факторной топологии. Для этого нужна лемма.

Лемма Пусть топ. н-во $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ обладает топологией индуктивного предела и $f: X \rightarrow Y$ — факторное отображение. Тогда Y обладает топологией инд. предела относительно разложения $Y = \bigcup_{\alpha \in I} f(X_\alpha)$.

□ Пусть $U \subset Y$ таково, что $U \cap f(X_\alpha)$ открыто в $f(X_\alpha)$ для каждого $\alpha \in I$. Тогда $f^{-1}(U \cap f(X_\alpha)) \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in I$, потому что сужение $f_\alpha = f|_{X_\alpha}$ непрерывно и $f^{-1}(U \cap f(X_\alpha)) \cap X_\alpha = f_\alpha^{-1}(U)$. Поскольку $f^{-1}(U \cap f(X_\alpha)) \cap X_\alpha = f^{-1}(U) \cap X_\alpha$ и X имеет топологию инд. предела, множество $f^{-1}(U)$ открыто в X . Из факторности отображения f вытекает, что U открыто в Y .

Теперь предположим, что нам удалось найти типовое пространство X , для которого топология свободной топологической группы $F(X)$ не является топологией инд. предела относительно разложения $F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$. Пусть Σ — сигнатура групп (т.е. $\Sigma = \{e, -1, \cdot\}$) и $W(X)$ — абсолютно свободная топ. алгебра в многообразии всех топ. Σ -алгебр. Как абстрактная алгебра $F(X)$ является факторалгеброй алгебры $W(X)$. Пусть $Q: W(X) \rightarrow F(X)$ — естественный гомоморфизм. Сужение этого гом-изма на X — тождественный гомеоморфизм. Топология группы $F(X)$ не является топологией инд. предела, значит, Q не факторно (но непрерывно). Значит, топология группы $F(X)$ слабее факторной. С другой стороны, это самая сильная топология из всех, относительно которой операции непрерывны и X гомеоморфно вложено в $F(X)$. Поскольку X гомеоморфно вложено в $F(X)$ с факторной топологией, отсюда вытекает, что операции на $F(X)$ не непрерывны относительно факторной топологии.

Пример факторалгебры с разрывными операциями (продолжение)

6

пример не сохра-
няют непрерыв-
ности операций
при факторизации
гомоморфизме

Пример Свободная топологическая группа $F(\mathbb{Q})$ пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (с обычной топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$) не обладает топологией инд. предела относительно разложения $F(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\mathbb{Q})$. Следовательно, $F(\mathbb{Q})$ не является топологической факторалгеброй абсолютно свободной Σ -алгебры $W(X)$ (где $\Sigma = \{e, -1, \cdot\}$), а значит, образ топ. алгебры $W(X)$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Q}: W(X) \rightarrow F(X)$ с факторной топологией не является топологической Σ -алгеброй (операции не непрерывны).

Набросок доказательства. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ зафиксируем какую-нибудь последовательность $(q_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ рациональных чисел, сходящуюся (в $\mathbb{R}$) к $\sqrt{2}/k$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$Q_k = \{q_{k,n} \cdot \underbrace{0^{-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot 0^{-1} \cdot \frac{1}{n}}_{[k/2]-1 \text{ пар}}, : n \in \mathbb{N}\}$$

(здесь $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$; отметим, что $Q_0 = \emptyset$ и $Q_1 = \{q_{1,n} : n \in \mathbb{N}\} = Q_2$. 0 — элемент множества $\mathbb{Q}$. Через -1 и $\cdot$ здесь обозначены операции в свободной группе $F(\mathbb{Q})$, так что $Q_k \subset F(X)$). Ясно, что $Q_k \subset F^k(\mathbb{Q})$.

Положим $\tilde{Q}_k = \bigcup_{e \in \Sigma^k} Q_e$ и $\tilde{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{Q}_k$. Имеем $\tilde{Q}_k = F^k(\mathbb{Q}) \cap \tilde{Q}$.

Несложные вычисления показывают, что каждое множество Q_k замкнуто в $F(\mathbb{Q})$ (если рассмотреть его как подмножество топ. группы $F(\mathbb{R})$, то нетрудно убедиться, что единственной предельной точкой этого множества является $\sqrt{2}/k$, так как каждая последовательность $(0^{-1} \cdot \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к e ; значит, в топ. группе $F(\mathbb{Q})$, топология которой сильнее той, что индуцирована из $F(\mathbb{R})$, это множество не имеет пред. точек, так как $\sqrt{2}/k \notin F(\mathbb{Q})$).

Следовательно, $\tilde{Q}_k = \tilde{Q} \cap F^k(\mathbb{Q})$ замкнуто в $F^k(\mathbb{Q})$.

Пример факторалгебры с разрывными операциями (окончание) Лемма об открытой гомоморфизме

6

Если бы топология группы $F(\mathbb{Q})$ была топологией индуктивного предела, то множество $\tilde{Q}$ было бы замкнуто в $F(\mathbb{Q})$, но это не так — у него есть предельная точка 0 . Действительно, из того, что $0 = 0 \cdot e$ и умножение непрерывно, следует, что для любой окрестности U точки 0 в $F(\mathbb{Q})$ существуют окрестности V точки 0 и W точки e такие, что $V \cdot W \subset U$. Поскольку $0 \in \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}$ вложено в $F(\mathbb{Q})$ как подпространство, $V \cap \mathbb{Q}$ — окрестность точки 0 в $\mathbb{Q}$. Любая такая окрестность содержит точки $q_{k,n}$ для достаточно больших k (скажем, для $k \geq k_0$) и n . Поскольку $e = e^{k_0}$, существует окрестность W' точки e в $F(\mathbb{Q})$ такая, что $W' \cdot e^{k_0} \subset W$. Каждая такая окрестность содержит все точки $0^{-1} \cdot \frac{1}{n}$ для достаточно больших n .

Итак, множество $\tilde{Q}$ не замкнуто в $F(\mathbb{Q})$, следовательно, $F(\mathbb{Q})$ не является индуктивным пределом своих подпространств $F^k(\mathbb{Q})$.

Итак, вообще говоря, факторные гомоморфизмы не сохраняют непрерывность операций. Однако в многообразиях с производной операцией Ланге (с перестановочными конгруэнциями) образы топологических алгебр при факторных гомоморфизмах являются топологическими алгебрами. Это вытекает из следующих леммы и теоремы.

Лемма

Пусть A — топ. Σ -алгебра, B — Σ -алгебра с топологией и $h: A \xrightarrow{h} B$ — открытое непр. отображение, являющееся гомоморфизмом. Тогда B тоже является топологической Σ -алгеброй (т.е. все операции $\sigma \in \Sigma$ непрерывны на B).

□ Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$, $b_1, \dots, b_n \in B$ и $b = \sigma(b_1, \dots, b_n)$. Надо показать, что для любой окрестности V точки b в B существуют окрестности V_i точек b_i такие, что $\sigma(V_1 \times \dots \times V_n) \subset V$. Пусть $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_i = h(a_i)$, и пусть $a = \sigma(a_1, \dots, a_n)$.

Обратим внимание, что образ каждого откр. множ-ва открыт.

Тогда $h(a) = b$. Положим $U = h^{-1}(V)$. Это окрестность a , так как h непрерывно. Из непрерывности операции $\circ$ на A вытекает существование окрестностей $U_1, \dots, U_n$ точек $a_1, \dots, a_n$, для которых $\circ(U_1 \times \dots \times U_n) \subset V$. Положим $V_i = h(U_i)$. Из открытости отображения h вытекает, что V_i — окрестности точек $b_i = h(a_i)$, а из того, что это гомоморфизм, следует, что $\circ(V_1 \times \dots \times V_n) \subset V$.

Лемма Пусть A и B — алгебры с топологией и отображение $f: A \xrightarrow{\text{н.о.}} B$ является факторным отображением относительно этих топологий. Предположим, что для некоторого открытого множества $U \subset A$ множество $f^{-1}(f(U))$ тоже открыто. Тогда отображение f является открытым отображением.

- Поскольку для любого открытого множества $U \subset A$ $f^{-1}(f(U))$ открыто, из факторности отображения f вытекает, что $f(U)$ открыто.

[T.] Пусть $\mathcal{V}$ — любое полное многообразие топ. алгебр. Для любой топ. алгебры $A \in \mathcal{V}$ и любой конгруэнции $\sim$ на A $\sim$ -накрытие любого открытого множества $U \subset A$ (т.е. множество $U^\sim = \{x \in A: \exists y \in U \text{ т.ч. } x \sim y\}$) открыто тогда и только тогда, когда в $\mathcal{V}$ существует производная операция Малышева.

- $\Leftarrow$ (Малышев): Пусть $A \in \mathcal{V}$, μ — непрерывная операция Малышева на A и $U \subset A$ открыто в A . Предположим, что $U^\sim$ не открыто в A . Тогда существует $\tilde{a} \in U^\sim$ т.ч. ни одна окрестность точки $\tilde{a}$ не содержится целиком в $U^\sim$. По определению мн-ва $U^\sim$ существует точка $a \in U$, для которой $a \sim \tilde{a}$. Имеем $a = \mu(\tilde{a}, \tilde{a}, a)$. Из непрерывности операции μ следует, что существует окрестность V точки $\tilde{a}$, для

которой $\mu(V \times \{\tilde{a}\} \times \{a\}) \subset U$. По предположению существует $v \in V$, $v \notin U^\sim$. Имеем $\mu(v, \tilde{a}, a) \in U$. С другой стороны, поскольку $\tilde{a} \sim a$, $a \sim$ — конгруэнция, имеем также $\mu(v, \tilde{a}, a) \sim \mu(v, a, a) = v$. Следовательно, элемент v эквивалентен некоторому элементу множества U , а значит, обязан принадлежать множеству $U^\sim$. Мы получили противоречие, которое показывает, что $U^\sim$ открыто.

$\Leftarrow$ (W. Taylor): Пусть $\tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])$ — абстрактная свободная алгебра $\tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])$, наделённая топологией, порождённой продолжением обычной метрики d_0 на отрезке $[0, 1]$ по Сверчковскому. Она принадлежит мн-ву $\mathcal{V}$. Пусть $\sim$ — конгруэнция на $\tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])$, порождённая отношением эквивалентности на $[0, 1]$, которое "склеивает" точки 0 и 1 (т.е. классами эквивалентности являются $\{0, 1\}$ и $\{x\}$, $x \in (0, 1)$). Пусть d — продолжение метрики d_0 по Сверчковскому. Возьмём $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ достаточно маленькое для того, чтобы была применима теорема Сверчковского, и рассмотрим ε -окрестность U точки $0 \in \tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])$ в $\tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])$ с метрикой d . Обозначим через h естественный гомоморфизм $\tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1]) \rightarrow \tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])/\sim$. Он отождествляет 0 и 1 во всех выражениях вида $t(x_1, \dots, x_n)$, где t — терм и $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, который образует алгебру $\tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])$. По предположению множество $h^{-1}(h(U))$ открыто в $\tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])$. Это множество является открытой окрестностью точки 1, т.е. $1 \in h^{-1}(h(\{0, 1\})) \subset h^{-1}(h(U))$. Пересечение открытой окрестности точки 1 в $\tilde{F}_{\mu, \rho}([0, 1])$ с $[0, 1]$ является открытой окрестностью точки 1 в $[0, 1]$ с обычной топологией, т.е. сужение метрики Сверчковского d на $[0, 1]$ совпадает с d_0 . Значит, на отрезке сколь угодно близко к 1 (но строго левее 1) существует точка x из $h^{-1}(h(U))$, причём эта точка эквивалентна некоторой точке $a \in U$ (по определению гомоморфизма h).

Из этого наблюдения и теоремы Швертмана мы можем сделать такой вывод:

- Существуют точка $x_0 \in [0, 1]$, элемент $\alpha \in F_{top}([0, 1])$, терм t от n переменных и $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in [0, 1]$ со следующими свойствами:

- (a) $1 - \varepsilon < x_0 < 1$
- (b) $\alpha \sim x_0$ (т.е. $h(\alpha) = h(x_0)$)
- (c) $\alpha \in U$
- (d) $0 = t(x_1, \dots, x_n)$
- (e) $\alpha = t(y_1, \dots, y_n)$
- (f) $\sum d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$

С помощью (a) и (f) нетрудно показать, что найдётся $c \in [0, 1]$, $0 < c < x_0$, с теми свойствами, что для всякого $i \leq n$ имеем либо $x_i < c$ и $y_i < c$, либо $x_i > c$ и $y_i > c$.

В выражение $t(y_1, \dots, y_n)$ подставим символ переменной x вместо всех $y_i < c$, символ y вместо всех $y_i = 1$ и символ z вместо всех остальных y_i . У нас получится терм $r(x, y, z)$. Заметим, что $r(x, z, z)$ получается подстановкой символа x вместо всех $y_i < c$ и символа z вместо всех $y_i > c$. В силу выбора числа c то же самое получается при подстановке в $t(x_1, \dots, x_n)$ символа x вместо всех $x_i < c$ и символа z вместо всех $x_i > c$. Из (d) вытекает, что $r(x, z, z) = x$ (потому что мы заменили всё, что меньше c , на x). Из (e) и (b), а также из того, что h — гомоморфизм, следует, что

$$t(h(y_1), \dots, h(y_n)) = h(t(y_1, \dots, y_n)) = h(\alpha) = h(x_0) = x_0,$$

причём $x_0 > c$ (по выбору c). Рассматривая отрезок $[0, 1]$ со следующим разбиением $0, 1$ как полуинтервал $[0, 1)$ (топология сейчас неважна) и считая, что h переводит 1 в 0 и оставляет все остальные точки на месте, мы видим, что $r(x, x, z)$ полу-

чается из $t(h(y_1), \dots, h(y_n))$ заменой всех $h(y_i) < c$ на x и всех $h(y_i) > c$ на z , и при этом $r(x, x, z) = z$, так как $t(h(y_1), \dots, h(y_n)) = x_0 > c$.

Итак, мы определим терм $r(x, y, z)$ так, что в свободной алгебре $F_{top}([0, 1])$ выполняются тождества $r(x, y, y) = r(y, y, x) = x$. Эти тождества будут выполняться и в любой другой алгебре из $\mathcal{V}^D \Rightarrow \mathcal{V}^D$: если $A \in \mathcal{V}^D$ и $a, b, c \in A$, то, рассматривая отображение $f: [0, 1] \rightarrow A$, определённое кривыми $f([0, c]) = \{a\}$, $f((c, 1)) = \{c\}$ и $f(\{1\}) = \{b\}$, и продолжив его до гомоморфизма $\hat{f}: F_{top}([0, 1]) \rightarrow A$, мы увидим, что $r(a, c, c) = a$ и $r(a, a, c) = c$.

След. Если $\mathcal{V}^D$ — полное многообразие топ. алгебр с перестановочными конгруэнциями, $A \in \mathcal{V}^D$, $B \in \mathcal{V}^D$ и $h: A \rightarrow B$ — любой гомоморфизм (абстрактных алгебр A и B), то B с фактортопологией является топологической алгеброй (и принадлежит многообразию $\mathcal{V}^D$).

□ Следует из доказанной теоремы и двух предшествующих лемм.

Проблема Найти другие условия на многообразие топ. алгебр, при которых все гомоморфные образы алгебр из этого многообразия с фактортопологией являются топологическими алгебрами.

Топологические группы, их основные свойства.
 Проблема существования неметризуемой группы $\mathbb{Z}$
 топологии на бесконечной группе

Топологические группы

Важнейший класс (изоморфизма) топологических алгебр составляют топологические группы.

Группа G — это множество вместе с заданной на нём ассоциативной бинарной операцией

$\circ: G \times G \rightarrow G$, унарной операцией $-1: G \rightarrow G$ и 0-арной операцией $1: \{\emptyset\} \rightarrow G$ (т.е. $1 \in G$), удовлетворяющие тождествам:

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1 \text{ и } g \cdot 1 = 1 \cdot g = g \quad \forall g \in G.$$

Стандартные обозначения для операций над множествами в группах:

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}, a \cdot B = \{a\} \cdot B, A \cdot b = A \cdot \{b\},$$

$$A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}.$$

Опр. Группа G с топологией $\mathcal{T}$ называется топологической группой, если групповые операции (умножение) $\circ: G \times G \rightarrow G$ и операции взятия обратного элемента $-1: G \rightarrow G$ непрерывны относительно топологии $\mathcal{T}$ на G и топологии декартова произведения на $G \times G$. При этом $\mathcal{T}$ называется групповой топологией, или топологией, согласованной с групповыми операциями.

Примеры топ. групп

- Любая группа превращается в топологическую, будучи наделённой дискретной топологией
- Прямая $\mathbb{R}$ с операцией сложения и обычной топологией является топ. группой
- Любая тихоновская степень $\mathbb{R}^I$ прямой $\mathbb{R}$ с координатными операциями является топ. группой, так что всякое тихоновское пространство является подпространством топ. группы.

Свойства топологических групп

7

- На пространстве $\mathbb{P}$ иррациональных чисел можно ввести групповую операцию, относит. которой $\mathbb{P}$ является топ. группой. Действительно, пространство всех иррациональных чисел гомеоморфно пространству неотрицательных иррациональных чисел (обозначим его $\mathbb{P}_+$), а $\mathbb{P}_+$ гомеоморфно пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ последовательностей натуральных чисел (с топологией тихоновского произведения): гомеоморфизм проще всего определить, поставив в соответствие каждому ирр. числу последовательность ненулевых слагаемых в его разложении в цепную дробь. В свою очередь, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, а $\mathbb{Z}$ — топологическая группа (дискретная).
- Каждый дисконтинуум C гомеоморфен счётной степени дублированного дискретного пространства (гомеоморфизм сопоставляет каждой точке $x \in C$ последовательность цифр в её троичном разложении, не содержащем единицы). Любое дублированное дискретное пространство гомеоморфно топологической группе $\mathbb{Z}_2$. Значит, C гомеоморфно топ. группе.

Свойства топ. групп

Специальные свойства топологических групп

Уже из самого существования непрерывных операций на топ. пространстве вытекают многие топ. свойства топ. групп, которые, вообще говоря, не присущи общим топ. пр-м, например:

- Любая топ. группа G является однородным топ. пр-м, т.е. для любых точек $g, h \in G$ существует гомеоморфизм $f: G \rightarrow G$ такой, что $f(g) = h$.
- Действительно, f можно определить правилом $x \mapsto h \cdot g^{-1} \cdot x$. Оно непр-о в силу непр-ти умножения и обладает непрерыв. обратным $xe \mapsto g \cdot h^{-1} \cdot x$.

(Неоднородные топ. пр-ва: сходимость последовательности и вообще любое неметризуемое пр-во, имеющее хотя бы одну изолированную точку; отрезок, замкнутый шар)

Таким образом, топология любой топ. группы порождается окрестностями единицы в этой группе. Для любой окр-ти U любого эл-та g топ. группы G множество $g^{-1} \cdot U$ (так же как и $U \cdot g$) является окрестностью 1, так что все окрестности любого $g \in G$ являются окрестностями единицы, помноженными на g (или, как говорят, сдвигами окрестностей 1 на g), и значит, например, базу окрестностей единицы, мы тем самым знаем и базу окрестностей всех точек $g \in G$, т.е. всю топологию.

Поскольку $1 \cdot 1 = 1$ и $1 = 1^{-1}$, из непрерывности умножения и взятия обратного следует, что для любой окрестности единицы U в топ. группе существуют окрестности единицы V_1, V_2 и V_3 такие, что $V_1 \cdot V_2 \subset U$ и $V_3^{-1} \subset U$. Положив $W = (V_1 \cap V_2 \cap V_3) \cap (V_1 \cap V_2 \cap V_3)^{-1}$, получаем окрестность единицы со свойствами $W \cdot W \subset U$ и $W^{-1} = W$.

② Если топ. группа удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 , то она удовлетворяет также аксиомам T_1 и T_2 . Кроме того, всякая топ. группа удовлетворяет аксиомам T_3 и $T_{3\frac{1}{2}}$.

□ Предположим, что топ. группа G угодит аксиоме T_0 . Покажем, что тогда $G \in T_2$ (а значит, $G \in T_1$).

Просто $g, h \in G$, $g \neq h$, и пусть U — окрестность одной из этих точек, не содержащая другой; допустим для определенности, что $g \in U$ и $h \notin U$.

Пусть V — окр-ть единицы, для которой $V \cdot V \subset g^{-1} \cdot U$ (она существует, потому что $g^{-1} \cdot U$ — окрестность единицы). Тогда V^{-1} — тоже окр-ть единицы, а $g \cdot V$ и $h \cdot V^{-1}$ — окрестности точек g и h соответственно. Покажем, что $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \emptyset$.

Предположим, что это не так; тогда для некоторых $v_1, v_2 \in V$ имеем $g \cdot v_1 = h \cdot v_2^{-1}$, откуда $h = g \cdot v_1 \cdot v_2$, а значит, $h \in g \cdot V \cdot V_2 \subset g \cdot g^{-1} \cdot U = U$ в противоречие с определением множества U . Следовательно, $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \emptyset$. Это доказывает, что $G \in T_2$.

Ввиду доказанного утверждения в дальнейшем мы не будем уточнять, какой именно из аксиом $T_0 - T_2$ удовлетворяет данная топ. группа, и станем называть группу, удовлетворяющую любой из этих аксиом, просто отделимой.

То, что всякая топ. группа удовлетворяет аксиоме T_3 , следует из того, что любая топ. группа является топологической левой группой (относительно операций $x * y = x \cdot y$ и $x \setminus y = x^{-1} \cdot y$ и константа $e = 1$), а для левых групп мы уже доказали выполнение T_3 .

Доказательство того, что всегда $G \in T_{3\frac{1}{2}}$, несомненно сложнее. Оно основано на некоторых порывах и на следующем исключительном важном утверждении.

Опр. полунормы на группе G наз. функции $\| \cdot \| : G \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами

- ① $\| 1 \| = 0$
 - ② $\| g \| = \| g^{-1} \| \quad \forall g \in G$
 - ③ $\| g \cdot h \| \leq \| g \| + \| h \| \quad \forall g, h \in G$.
- Из этих свойств вытекают и
- ④ $\| g \| \geq 0 \quad \forall g \in G$.

Лемма (исключительной важности)

Пусть G — произвольная группа и $U_n, n \in \mathbb{N}$, — ее подгруппа со свойствами

- ① $1 \in U_n$, ② $U_n = U_n^{-1}$ и ③ $U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset U_n$.

Тогда на группе G существует полунорма $\| \cdot \|$ такая, что

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \{ x \in G : \| x \| < \frac{1}{2^n} \} \subset U_n \subset \{ x \in G : \| x \| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \}.$$

Аксиома $T_{3\frac{1}{2}}$ в топологических группах

7

Доказательство этой леммы сводится к построению метрической системы множеств $U(\frac{m}{2^n})$ со свойствами $U(\frac{1}{2^n}) = U_n$ и $U(\frac{m}{2^n}) \cdot U(\frac{1}{2^n}) \subset U(\frac{m+1}{2^n})$;

после чего норма определяется как

$$\|x\| = \sup_{y \in G} |f(y \cdot x) - f(y)|, \text{ где } f(x) = \inf \left\{ \frac{m}{2^n} : x \in U(\frac{m}{2^n}) \right\}.$$

Одно из следствий важной леммы — то, что всякая топ. группа удовлетворяет аксиоме $T_{3\frac{1}{2}}$; более того, в топ. группе точки отделяются от не содержащих замкнутого множества не просто какими-то непрерывными функциями, а непрерывными полунормами, т.е. функциями, хорошо согласованными с групповой структурой. Иными словами, пары относительно непрерывных полунорм образуют базу окрестностей единицы. Действительно, для любой окрестности единицы U в топ. группе G легко построить (используя непрерывность операции) послед-ть окрестностей единицы $U_1 \subset U, U_2, U_3, \dots$ со свойствами ①-③ из формулировки леммы.

Нетрудно видеть, что полунорма, существование которой утверждается в лемме, непрерывна (это вытекает из формулы (*) и неравенства $\|g \cdot h\| \leq \|g\| + \|h\|$). Ясно, что она отделяет 1 от $G \setminus U$.

Пересечение H всех окрестностей единицы в любой топ. группе G является замкнутой нормальной подгруппой, потому что в силу непрерывности операции и того, что $G \in T_{3\frac{1}{2}}$, для любой окрестности единицы U и любого $g \in G$ существуют окрестности единицы V_1, V_2, V_3 и V_4 такие, что $V_1 \cdot V_1 \subset V_2^{-1}$, $g^{-1} \cdot V_3 \cdot g \subset V_4 \subset U$. Ясно, что факторгруппа G/H с топологией факторпространства является отдельной топологической группой, и между топологическими свойствами групп G и G/H имеется прямая связь. Так что по существу изучение топ. групп сводится к изучению отдельных топ. групп.

Метризуемые топологические группы, группы Ли

7

③ Всякая отдельная топологическая группа с первой аксиомой счётности (= в которой каждая точка имеет счётную базу окрестностей) метризуема.

□ Если у единицы топ. группы G имеется счётная база окрестностей $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, то у неё имеется и счётная база окрестностей $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ со свойствами ①-③ из важной леммы. Её легко построить по индукции: надо положить $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$, а затем, считая, что окрестность U_n уже построена, найти окрестность единицы W со свойствами $W \cdot W \subset U_n \cap V_{n+1}$ и положить $U_{n+1} = W \cap W^{-1}$. Очевидно, множества $B_n = \{x : \|x\| < \frac{1}{2^n}\}$, где $\|\cdot\|$ — полунорма, существование которой утверждается важной леммой, могут образовать базу окрестностей единицы, причём эта полунорма является нормой (т.е. $\|g\| \neq 0$ для $g \neq 1$), а соответствующая этой норме метрика $d(g, h) = \|g^{-1} \cdot h\|$ порождает топологию группы G .

④ Группы Ли

Опр. группы Ли

Группа Ли — это группа вместе с заданной на ней структурой вещественно-аналитического многообразия, в которой групповые операции выражаются вещественно-аналитическими функциями от локальных координат.

Другими словами, это топ. группа G , в которой окр-ти единицы которой (а значит, и в нек. окрестности любой другой точки) все эл-ты можно представить в виде $g(t)$, где $t = (t_1, \dots, t_n)$ — набор вещественных параметров, причём операции умножения и взятия обратного выражаются вещественно-аналитическими вектор-функциями от совокупности параметров: $g(t) \cdot g^{-1}(s) = g(f(t, s))$, где f — вещественно-аналит. вектор-функция.

Известно, что на нек. важной топ. многообразии можно ввести структуру гладкого многообр-я: $\exists$ компактное метризуемое пространство T (т.е. компакт, каждая точка которого обладает окр-той, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$), и некоторая функция μ (многообразию), которое не содержит никаких локальных многообразий. Однако всякая топологическая группа, локально гомеоморфная евклидову пр-ву, допускает структуру группы Ли. Более того, вместо локальной евклидовости достаточно требовать, чтобы группа была локально компактной и не имела малых подгрупп (т.е. чтоб у 1 была окр-та, не содержащая нетривиальных подгрупп), так что группа Ли = лок. комп. группа без малых подгрупп.

Существование групповой топологии. Пример Ольманского

7

Существование групповых топологий

Опр.
топологизир.
группы

Недискретные групповые топологии (отделимые) существуют не на всех бесконечных группах. Группы, на которых такие топологии существуют, называются топологизирруемыми. Вопрос о существовании нетопологизирзуемых бесконечных групп был поставлен в 1941 г. А.А. Марковым, который сформулировал гипотезу, что всякая бесконечная группа топологизирзуема. Проблема Маркова оставалась нерешённой почти сорок лет — до 1980-х, когда были построены сразу два принципиально разных примера нетопологизирзуемых групп, счётной и несчётной.

Пример
Ольманского

Счётную нетопологизирзуемую группу построил А.Ю. Ольманский. Эта группа G содержит конечное множество $Z = \{1, z_1, \dots, z_k\}$ с тем свойством, что для всякого $g \in G \setminus \{1\}$ существуют $n_g \in \mathbb{N}$, для которого $g^{n_g} \in Z \setminus \{1\}$, причём все числа n_g ограничены в совокупности одним числом $N \in \mathbb{N}$. Таким образом, каждый отличный от единицы элемент $g \in G$ является решением одного из уравнений $x^i = z_j$, где $i \leq N$ и $j \leq k$. Множество решений любого такого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G , потому что оно является прообразом одноточечного (и, следовательно, замкнутого в любой T_0 -топологии) множества $\{z_j\}$ при отображении $f: x \rightarrow x^i$, которое обязано быть непрерывным в силу непрерывности умножения. Стало быть, дополнение до единицы в группе G является конечным объединением замкнутых (в любой групповой T_0 -топологии) множеств и потому замкнуто в любой групповой топологии. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ (а значит, и все остальные одноточечные множества, так как топ. группа однородна) открыто в любой отделимой групповой топологии, т.е. любая отделимая групповая топология на G дискретна.

Уравнение
в группах

Уравнения в группах. Алгебраические и безусловно замкнутые множества в группах

7

Уравнением в группе G называется любое выражение вида $w(x) = g_1 x^{k_1} g_2 \dots g_n x^{k_n} g_{n+1} = 1$, где $g_i \in G$ — любые элементы группы и $k_i \in \mathbb{Z}$. Из непрерывности умножения и взятия обратного следует, что отображение $w: G \rightarrow G$ непрерывно относительно любой групповой топологии (т.е. это композиция непр. отн. умножения и взятия обратного). Множество решений уравнения — это $\{x \in G: w(x) = 1\} = w^{-1}(\{1\})$. Оно замкнуто в любой отделимой групповой топологии (в которой мн-во $\{1\}$ замкнуто). Значит, любое множество, которое можно представить как пересечение конечных объединений множеств решений уравнений замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G .

Алгебра-
ическое
и безусловно
замкнутое
мн-во

Пересечения, конечных объединений множеств решений уравнений Марков назвал алгебраическими. Множество, замкнутое в любой отделимой групповой топологии, он назвал безусловно замкнутым. Мы покажем, что всякое алгебраическое множество безусловно замкнуто. Показано, что бесконечная группа нетопологизирзуема $\Leftrightarrow$ дополнение до единицы в ней безусловно замкнуто. В группе Ольманского так и есть: $G \setminus \{1\}$ безусловно замкнуто, потому что оно алгебраическое.

Вместе с проблемой топологизирзуемости Марков поставил вопрос: Всякое ли безусловно замкнутое множество в произвольной бесконечной группе является алгебраическим? Он доказал, что в счётных группах это так. Пример несчётной нетопологизирзуемой группы, построенный Шелахан, показывает, что ответ в общем случае отрицательный: в его группе дополнение до единицы безусловно го (потому что группа нетопологизирзуема), но не является алгебраическим (это неочевидно, но верно).

Пример
Шелаха

Несчётная нетопологизированная группа, построенная С. Шелахом, такова (Шелак построил её в предположении справедливости континуум-гипотезы, но от этого предположения можно избавиться за счёт ухудшения некоторых свойств группы; это показал Г. Бессе). Эта группа G , обладающая тем замечательным свойством, что она порождается любой своей несчётной подгруппой, пришёл в обиход в очень сильном смысле:

$\aleph_1^{10000}$ для любого несчётного $S \subset G$.

ω_1 — наименьший
несчётный
ординал

Кроме того, $G = \bigcup_{\alpha < \omega_1} M_\alpha$, где все M_α — счётные подгруппы группы G со свойствами

$M_\alpha \subset M_\beta$ для $\alpha < \beta$ и $g^{-1} M_\alpha g \cap M_\alpha = \{1\} \quad \forall g \in G \setminus M_\alpha$.

Предположим, что $\mathcal{T}$ — групповая топология на G и в этой топологии у 1 существует счётная окрестность U . Тогда $\exists \alpha < \omega_1$, для которого $U \subset M_\alpha$ (действительно, $U = \{u_1, u_2, \dots\}$, и для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдётся $\alpha_i < \omega_1$, такое, что $u_i \in M_{\alpha_i}$, так как $G = \bigcup M_\alpha$ достаточно положить $\alpha = \sup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i$). Для любого $g \in G \setminus M_\alpha$ имеем $g^{-1} \cdot U \cdot g \cap U = \{1\}$, так что единица является пересечением двух своих окрестностей, откуда следует, что $\{1\}$ — открытое множество и топология $\mathcal{T}$ дискретна.

Теперь предположим, что все окрестности единицы в $\mathcal{T}$ несчётны. Пусть U — любая окрестность единицы. Из того, что $1^{10000} = 1$ и умножение непрерывно, следует, что существует окрестность единицы V , для которой $V^{10000} \subset U$. Поскольку счётных окрестностей единицы в $\mathcal{T}$ нет, мн-во V несчётно, а значит, $V^{10000} = G$ и $U = G$. Таким образом, топология $\mathcal{T}$ антидискретна (единственное открытое множество — G и $\emptyset$) и не может быть отделимой.

Связь топологических групп и малышевских пространств

Опр.
малыш.-н-о

Малышевское пространство — это топологическое гр-во X , для которого существует непрерывное отображение (операция Малышева) $\mu: X^3 \rightarrow X$ со свойствами

$$\mu(x, y, y) = \mu(y, y, x) = x \quad \forall x, y \in X.$$

Таким образом, всякая топологическая алгебра с малышевской операцией является малышевским пространством. В частности, всякая топологическая группа является малышевским пространством. Разумеется, далеко не всякое малышевское гр-во канонично топологической группе (см. примеры на разворотах 6 и 8), однако всякое компактное малышевское гр-во является ретрактом топ. группы.

Опр.
Ретракты
и ретракция

Подпространство Y топологического гр-ва X называется ретрактом пространства X , если существует непрерывное отображение $r: X \rightarrow Y$ т.ч. $r(y) = y \quad \forall y \in Y$. Отображение r называется ретракцией.

Зам.

Подпространство Y является ретрактом гр-ва $X \Leftrightarrow$ любое непрерывное отображение $f: Y \rightarrow Z$ в любое топ. н-о Z продолжается до конт. отображ. $\tilde{f}: X \rightarrow Z$. Действительно, если $r: X \rightarrow Y$ — ретракция, то таким продолжением является $\tilde{f} \circ r$, а если существуют продолжения, то ретракцией является продолжение тождественного отображения $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$.

Зам.

Непрерывное отображение $f: X \xrightarrow{\text{мн}} Y$, где $Y \subset X$, являющееся ретракцией $\Leftrightarrow f \circ f = f$. Действительно, если f — ретракция, то равенство $f \circ f = f$ вытекает из определения, а если $f = f \circ f$, то для всякого $y \in Y$ имеем $f(f(y)) = f(y)$, и т.ч. что $f|_Y = \text{id}_Y$, следует из того, что $\forall z \in Y \exists y \in Y$ т.ч. $z = f(y)$.

Таким образом, ретракция — топологический аналог проектирования векторных пространств.

Теорема: компактные метризуемые пространства
= ретракты топологических групп (назад) 8

[Т.] Хаусдорфово компактное пространство X метризуемо $\Leftrightarrow$ оно является ретрактом топологической группы (а именно, свободной топологической группы $F(X)$).

$\square \Rightarrow$ Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $F_n(X)$ множество всех слов (элементов $F(X)$), имеющих длину $\leq n$:
 $F_n(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} : k \leq n, \varepsilon_i = \pm 1, x_i \in X\}$,
а через $F_n^{\text{неч}}(X)$ — подмножество из $F_n(X)$, состоящее только из слов нечётной длины. Тогда $F(X) = \bigcup F_n(X)$
и $F^{\text{неч}}(X) = \bigcup F_n^{\text{неч}}(X)$. Если X — компакт, то топология его свободной группы $F(X)$ является топологией индуктивного предела (см. разворот (7)), т.е. мн-во $M \subset F(X)$ з-о $\Leftrightarrow M \cap F_n(X)$ з-о в $F_n(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

все слова нечётной длины

Отсюда легко получить, что для непрерывности отображения $f: F(X) \rightarrow Y$, где X — компакт, а Y — произвольное пр-во, необходимо и достаточно, чтобы сужение $f|_{F_n(X)}$ было непрерывно для каждого n .

Пусть $\mu: X^2 \rightarrow X$ — кепр. операция Миттисеба. Ретракцию $\gamma: F(X) \rightarrow X$ будем строить посылно: сначала для всех нечётных n построим отображение $\gamma_n: F_n^{\text{неч}}(X) \rightarrow X$ так, чтобы γ_n продолжалось γ_m при $m < n$. Объединением (общим продолжением) этих отображений будет отображение $\gamma^{\text{неч}}: F^{\text{неч}}(X) \rightarrow X$, которое легко продолжится на всю свободную группу, в результате чего и получим искомого ретракцию.

Чтобы построить γ_n для каждого нечётного n определим по индукции вспомогательное кепр. отображение $f_n: X^n \rightarrow X$ так, что

(*) если $1 \leq i \leq n$, $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ и $x_i = x_{i+1}$, то $f_n(x_1, \dots, x_n) = f_{n-2}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Пусть $f_1: X \rightarrow X$ — тождественное отображение и $f_3 = \mu$. Пусть n нечётно, $n > 3$ и для всех нечётных $m < n$ отображения f_m уже определены. Для $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ положим

Теорема: компактные метризуемые пространства
= ретракты топологических групп (конец) 8

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = f_{n-2}(\mu[f_1(x_1), x_2, f_{n-2}(x_3, x_4, x_5, \dots, x_n)], \mu[f_3(x_1, x_2, x_3), x_4, f_{n-4}(x_5, x_6, x_7, \dots, x_n)], \mu[f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_6, f_{n-6}(x_7, x_8, x_9, \dots, x_n)], \dots, \mu[f_{n-4}(x_{n-4}, \dots, x_{n-1}), x_n, f_5(x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)], \mu[f_{n-4}(x_1, \dots, x_{n-4}), x_{n-3}, f_3(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)], \mu[f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}), x_{n-1}, f_3(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)], \mu[f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}), x_{n-1}, f_1(x_n)]).$$

Если $x_i = x_{i+1}$, то выражения, стоящие в $(i-1)$ -й и i -й строках в фигурных скобках, оказываются равными в силу индуктивного предположения; исключения составляют случаи $i=1$ (тогда равны выражения, стоящие в первой и второй строках) и $i=n-1$ (равны выражения, стоящие в $(n-3)$ -й и $(n-2)$ -й строках). Этот факт и индуктивное предположение в применении к f_{n-2} обуславливают выполнение условия (*) для f_n . Непрерывность отображения f_n следует из непрерывности от f_m для $m < n$ (f_n — их композиция).

X^{-1} — гооморфизм
копца пр-ва
 $X, x^{-1}x = e$

Определим от-я $j_k: (X \oplus X^{-1})^k \rightarrow F_k(X)$ правилами $j_k(x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_k^{\varepsilon_k}) = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k}$ для $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$, а отображения $i_k: (X \oplus X^{-1})^k \rightarrow X^k$ — правилами $i_k(x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_k^{\varepsilon_k}) = (x_1, \dots, x_k)$. Отобр-я j_k и i_k , очевидно, непрерывны; будучи отобр-ми компакта $(X \oplus X^{-1})^k$, они факторны. Для каждого нечётного n возникает диаграмма $(X \oplus X^{-1})^n \xrightarrow{j_n} F_n^{\text{неч}}(X) \xrightarrow{\gamma_n} X$. Условие (*) позволяет её замкнуть отображением γ_n . От-я j_n факторно $\Rightarrow \gamma_n$ непрерывно.

Выберем $x_0 \in X$ и положим $\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_n(x), & \text{если } k \text{ нечётно} \\ x_0, & \text{если } k \text{ чётно} \end{cases}$. Множество слов чётной длины открыто-замкнуто в $F(X)$ — это прообраз 0 при непрерывном отображении $F(X) \rightarrow \{0, 1\}$, продолжая от-я $f: X \rightarrow \{0, 1\}$, $f(x) = 1 \forall x \in X$. $\Rightarrow F^{\text{неч}}(X)$ открыто-замкнуто. $\Rightarrow \gamma|_{F_k(X)}$ непрерывно $\forall k \in \mathbb{N}$. На $F(X)$ топология инд. предела $\Rightarrow \gamma$ непрерывно. Ясно, что γ — ретракция.

$\Leftarrow$ Если G — топ. группа и $\gamma: G \rightarrow X$ — ретракция, то $\mu(x, y, z) = \gamma(x \cdot y^{-1} \cdot z)$ — операция Миттисеба на X .

Свойство Суслина в метрических пространствах

9

Свойство Суслина

Свойство Суслина

со свойствами Кантора

Хорошо известно, что вещественная прямая $\mathbb{R}$ с её естественным порядком $\leq$ определяется (с точностью до порядкового изоморфизма) как линейно упорядоченное множество, в котором нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента, любое непустое ограниченное множество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани, всякий открытый интервал (a, b) , где $a < b$, непуст и существует счётное плотное подмножество, т.е. счётное подмножество, пересекающееся с каждым непустым открытым интервалом (таким подмножеством прямой является, например, м.в. $\mathbb{Q}$ рациональных чисел). Из последнего св-ва, очевидно следует, что любое семейство попарно непересекающихся открытых интервалов в $\mathbb{R}$ не более чем счётно. В связи с этим возникает гипотеза, которую впервые сформулировал Михаил Яковлевич Суслин ок. 1919г.

Гипотеза Суслина

Гипотеза Суслина. Всякое линейно упорядоченное м.в. $(R, \leq)$ со свойствами

- м.в. $(R, \leq)$ неограничено, т.е. в нём нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента,
 - м.в. R плотно в себе, т.е. каковы бы ни были различные $x, y \in R$, $x < y$, существует эл-т $z \in R$, удовлетворяющий нер-н $x < z < y$ (другими словами, интервал (x, y) непуст),
 - $(R, \leq)$ полн, т.е. любое непустое ограниченное сверху (снизу) м.в. имеет точную верхнюю (нижнюю) грань, и
 - любое семейство попарно непересекающихся открытых интервалов в R не более чем счётно
- содержит счётное плотное множество и потому порядково изоморфно вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Прямая Суслина. Свойство Суслина

9

Опр. прямой Суслина

Линейно упоряд. м.в.о, обладающее всеми св-ми в гипотезе Суслина, но не имеющее счётного плотного подм-ва, называется прямой Суслина.

Опр. св-ва Суслина

Топологическое пространство, в котором любое семейство попарно непересекающихся открытых множеств не более чем счётно, наз. пр-н со свойством Суслина.

Любой линейный порядок на любом м.в. порождает порядковую топологию на этом м.в.: её база — все открытые интервалы. Таким образом, прямая Суслина — это топ. пр-ва, топология которого порождается линейным порядком без наименьшего и наибольшего элементов, которое obviously (это объясняет выполнение второго и третьего св-в в гипотезе), обладает свойствами Суслина, но не сепарабельно (нет счётного всюду плотного м.в.о).

Гипотеза Суслина неразрешима (как континуум-гипотеза) — является моделью теории множеств, в которых прямая Суслина существует, и есть модели, в которых она не существует.

Свойство Суслина играет важную роль в топологии. Например, если произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ обладает св-н Суслина, то замыкание любого открытого м.в. $U \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ зависит лишь от счётного числа координат, т.е. существует счётное $S \subset A$ т.ч. если $x \in \bar{U}$, $y \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и проециции x и y на S совпадают, то $y \in \bar{U}$. Поскольку любая степень $\mathbb{R}^X$ обладает св-н Суслина, отсюда вытекают важные факты о пространствах непрерывных функций $C(X) \subset \mathbb{R}^X$ (с топологией поточечной сходимости).

Отметим, что в нек. моделях теории множеств св-во Суслина мультипликативно, однако квадрат $L \times L$ прямой Суслина L (если она $\exists$) св-н Суслина не обладает: по трансфинитной индукции легко выбрать точки $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$ в L для $\alpha < \omega_1$, так, что $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$ (на каждом шаге α м.в. $\{b_\beta : \beta < \alpha\}$ счётно $\Rightarrow$ не плотно $\Rightarrow$ нужны a_α и c_α $\exists$, а b_α — любая точка в (a_α, c_α)). В $L \times L$ м.в. $(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$ попарно не пересекаются.

Теорема: Всякое σ -компактное метрическое пространство обладает свойством Суссина (назад)

9

Т. Всякое метрическое пр-во, являющееся объединением счётного числа компактов, обладает свойством Суссина.

Г.Ткаченко +
В.В.Успенский

[При этом существуют самые разные компакты без свойства Суссина. Например, можно взять дискретное пр-во D любой несчётной мощности, добавить к нему одну точку P (т.е. положить $X = D \cup \{P\}$) и объявить окрестностями точки P дополнения до конечных множеств. Тогда X — компакт, и все (изолированные) точки из D образуют семейство попарно непересекающихся открытых мн-в.]

□ Пусть X — пр-во с непрерывной операцией Метрикева $\mu: X^3 \rightarrow X$, и пусть $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, где все K_n — компактные подпр-ва пр-ва X . Рассмотрим любое семейство $\{U_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ непустых открытых мн-в. Ясно, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $U_\alpha \cap K_n \neq \emptyset$ для несчётно многих $\alpha < \omega_1$. Будем считать, что $U_\alpha \cap K_n \neq \emptyset$ для всех $\alpha < \omega_1$. Выберем $x_\alpha \in U_\alpha$ для $\alpha < \omega_1$.

Пусть $\alpha < \omega_1$. Для каждого $y \in K_n$ имеем $\mu(x_\alpha, y, y) = \mu(y, y, x_\alpha) = x_\alpha$, и из непрерывности от-а μ вытекает существование открытой окрестности V_y точки $y \in X$ т.ч. $\mu(\{x_\alpha\} \times V_y \times V_y) \subset U_\alpha$ и $\mu(V_y \times V_y \times \{x_\alpha\}) \subset U_\alpha$. Положим $W_y = V_y \cap K_n$. Тогда $\{W_y: y \in K_n\}$ — открытое покрытие компакта K_n . Выберем из него конечное подпокрытие, а в это подпокрытие впишем конечное разбиение γ_α множества K_n (разбивается, его элементы не обязательно открыты).

Предположим, что A — элемент разбиения γ_β , содержащий точку x_α , и B — э-т разбиения γ_α , содержащий точку x_β ; пусть $z \in A \cap B$. Мн-во A содержится в нек. мн-ве вида V_y для x_β .

Теорема: Всякое σ -компактное метрическое пространство обладает свойством Суссина (концы)

9

α и β — в подобном мн-ве для x_α . Значит, $\mu(x_\alpha, z, x_\beta) \in U_\alpha$ и $\mu(x_\alpha, z, x_\beta) \in U_\beta$, т.е. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Итак, у нас есть мн-во точек $\{x_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ и сем-во соответствующих им конечных разбиений мн-ва K_n $\{\gamma_\alpha: \alpha < \omega_1\}$. Покажем, что несчётно много разбиений γ_α содержит одно и то же число k элементов. Будем считать, что $|x_\alpha| = k$ для всех $\alpha < \omega_1$.

Пусть $\gamma_\alpha = \{A_\alpha^1, \dots, A_\alpha^k\}$. Раскрасим множество $[\omega_1]^2$ двухэлементных пар мн-в (неупорядоченных пар элементов) мн-ва ω_1 в k^2 цветов: для $\alpha, \beta < \omega_1, \alpha < \beta$, положим $c(\{\alpha, \beta\}) = (l, m)$, если $x_\alpha \in A_\alpha^l$ и $x_\beta \in A_\beta^m$.

Имеет место теорема Рамсея:

если Y — любое бесконечное множество и $c: [Y]^2 \rightarrow \{1, \dots, N\}$ — любая раскраска множества $[Y]^2$ неупорядоченных пар э-в мн-ва Y в конечное число N цветов, то существует бесконечное $Z \subset Y$, для которого $c|_{[Z]^2} = \text{const}$. Такое Z называется однородным.

Из этой теоремы вытекает, что существуют $\alpha < \beta < \gamma < \omega_1$ и $l, m \leq k$ такие, что $c(\{\alpha, \beta\}) = c(\{\alpha, \gamma\}) = c(\{\beta, \gamma\}) = (l, m)$. Это означает, что

$x_\alpha \in A_\alpha^l, x_\beta \in A_\beta^l, x_\gamma \in A_\gamma^l,$
 $x_\beta \in A_\beta^m, x_\gamma \in A_\gamma^m, x_\alpha \in A_\alpha^m.$

Видно, что элемент разбиения γ_β , содержащий точку x_α , пересекается с элементом разбиения γ_α , содержащим точку x_β : $x_\beta \in A_\beta^l \cap A_\alpha^m$, причём

из рассуждений в конце предыдущей стр-цы следует, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Таким образом, в любом несчётном семействе $\{U_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ непустых открытых мн-в в X обязательно существуют пересекающиеся мн-ва, т.е. X обладает свойством Суссина.

Квазитопологические алгебры

Квазитопологические алгебры

Опр.
раздельно
непрерывности

Напомним, что отображение $f: X^n \rightarrow X$ (где X — топологическое пространство) называется раздельно непрерывной по i -й переменной (где $i \leq n$), если для любых $x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0 \in X$ отображение $f_i: X \rightarrow X$, определенное правилом $f_i(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ непрерывно. Отображение, раздельно непрерывное по всем переменным, называется просто раздельно непрерывным.

Опр.
квазитопологич.
алгебры

Мы будем называть универсальную Σ -алгебру A с топологией квазитопологической, если все операции $\sigma: A^n \rightarrow A$, $\sigma \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, раздельно непрерывны относительно этой топологии.

Многообразие (полное многообразие, широкое многообразие) квазитопологических алгебр определяется дословно так же, как и в случае топологических алгебр. Определение свободной квазитопологической алгебры данного топ. пр-ва в данном многообразии и доказательство её существования тоже дословно повторяют соответствующее определение и доказательство для топ. алгебр, поскольку от свойства непрерывности операции там требуется только, чтобы оно сохранялось при переходе к топологическим произведениям алгебр и подалгебрам, а раздельная непрерывность, очевидно, сохраняемая при этих переходах.

Опр. Свободная квазитопологическая алгебра топ. пр-ва X в многообразии $\mathcal{V}$ квазитоп. алгебр — это алгебра $F_{\mathcal{V}}^X(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непр. отображ. $i_X^*: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^X(X)$ т.е. то

- $F_{\mathcal{V}}^X(X)$ порождается множеством $i_X^*(X)$;
- $\forall$ непр. $f: X \rightarrow A \in \mathcal{V} \exists$ непр. гом. $f: F_{\mathcal{V}}^X(X) \rightarrow A$ такой, что $f = f \circ i_X^*$.

Дословно так же, как в топологическом случае, доказывалось, что непр. отображ. $i_X^*: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^X(X)$ инъективно (если многообразие $\mathcal{V}$ не тривиально), так это можно считать, что множество X содержится в $F_{\mathcal{V}}^X(X)$ как подмногообразие, только топология, которая индуцируется на ней из алгебры $F_{\mathcal{V}}^X(X)$, а не исходной заданной топологии пр-ва X . При этом сама алгебра $F_{\mathcal{V}}^X(X)$ гомеоморфна абстрактной свободной алгебре и её топология — самая сильная из всех топологий, относительно которых все операции раздельно непрерывны и которые индуцируют на X топологию, содержащуюся в заданной топологии пр-ва X .

Прежде чем переходить к свойствам квазитопологических алгебр, рассмотрим св-ва раздельно непрерывных отображений топологических пространств.

Раздельно непрерывные отображения

Кросс-топология на $X \times Y$.

Опр.
Кросс-топология

Пусть X и Y — топ. пр-ва. Через $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ будем обозначать естественные отображения крестовины. Кросс-топология на декартовом произведении $X \times Y$ состоит из всех м-в $U \subset X \times Y$ с тем свойством, что $\pi_1(U \cap (X \times \{y\}))$ открыто в X для всех $y \in Y$ и $\pi_2(U \cap (\{x\} \times Y))$ открыто в Y для всех $x \in X$. Множество $X \times Y$ с кросс-топологией называется кросс-произведением топ. пр-в X и Y и обозначается $X \otimes Y$.

Легко понять, что $U \subset X \otimes Y$ открыто $\Leftrightarrow$ каждая точка $(x, y) \in U$ содержится в U вместе с "крестиком" $\{x\} \times V \cup W \times \{y\}$, где V и W открыты в Y и X соответственно. Пример подмногообразия плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, открытого в кросс-топологии, но не открытого в обычной топологии:



Декартово произведение $X \times Y$ можно представить как $\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$ или как $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y$. Рассмотрим топологическую сумму всех этих слагаемых и её естественное отображение на $X \times Y$:

$$f^*: \bigoplus_{y \in Y} X \times \{y\} \oplus \bigoplus_{x \in X} \{x\} \times Y \rightarrow X \times Y;$$

каждой точке (x, y) , рассматриваемой как элемент одного из слагаемых $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times Y$, это отображение ставит в соответствие эту же точку (x, y) , но рассматриваемую как элемент мн-ва $X \times Y$. Из определения кросс-топологии ясно, что кросс-топология — это фактортопология на $X \times Y$, соответствующая отображению f^* , т.е. самая слабая топология, относительно которой f^* непрерывно ($U \subset X \times Y$ открыто $\Leftrightarrow f^{*-1}(U)$ открыто в $\bigoplus X \times \{y\} \oplus \bigoplus \{x\} \times Y$, т.е. пересечения мн-ва $f^{*-1}(U)$ со всеми слагаемыми открыты).

Лемма Пусть $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ и $h: X \rightarrow Z$ — отображения, топ. пр-ва, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

коммутативна. Если отображение h непрерывно, а f факторно, то g непрерывно.

□ Для $U \subset Z$ имеем $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Поскольку h непрерывно, из открытости U вытекает открытость множества $f^{-1}(g^{-1}(U))$, а поскольку f факторно, из открытости этого множества вытекает открытость прообраза $g^{-1}(U)$.

Предг. Отображение $\varphi: X \times Y \rightarrow Z$ раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно как отображение $X \oplus Y \rightarrow Z$.

□ Из определения раздельной непрерывности видно, что φ раздельно непрерывно $\Leftrightarrow \varphi \circ f^*: \bigoplus_{y \in Y} X \times \{y\} \oplus \bigoplus_{x \in X} \{x\} \times Y \rightarrow Z$ непрерывно. Значит, по доказанной лемме из факторности отображения f^* вытекает непрерывность отображения $\varphi: X \oplus Y \rightarrow Z$. Обратно, из непрерывности отображения $f^*: \bigoplus_{y \in Y} X \times \{y\} \oplus \bigoplus_{x \in X} \{x\} \times Y \rightarrow X \oplus Y$ и $\varphi: X \oplus Y \rightarrow Z$ вытекает непрерывность их композиции $\varphi \circ f^*$, а она равносильна раздельной непрерывности отображ. φ .

Предг. Если отображения $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ и $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ непрерывны, то непрерывно и их кросс-произведение $f_1 \otimes f_2: X_1 \otimes X_2 \rightarrow Y_1 \otimes Y_2$ (определённое тем же правилом $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$, что и обычное декартово произведение отображений). Если отображения f_1 и f_2 факторны, то факторно и их кросс-произведение.

□ Рассмотрим отображение $F^*: \bigoplus_{x_2 \in X_2} X_1 \times \{x_2\} \oplus \bigoplus_{x_1 \in X_1} \{x_1\} \times X_2 \rightarrow \bigoplus_{y_2 \in Y_2} Y_1 \times \{y_2\} \oplus \bigoplus_{y_1 \in Y_1} \{y_1\} \times Y_2$, определённое своим сужением на слагаемые самым естественным образом:

$$F^*|_{X_1 \times \{x_2\}} = f_1 \otimes f_2|_{X_1 \times \{x_2\}}, \quad F^*|_{\{x_1\} \times X_2} = f_1 \otimes f_2|_{\{x_1\} \times X_2}.$$

По существу сужение $f_1 \otimes f_2$ на $X_1 \times \{x_2\}$ — не что иное, как отображение f_1 ; действительно, каждой точке $(x, x_2) \in X_1 \times \{x_2\}$ оно ставит в соответствие $(f_1(x), f_2(x_2))$, при чём $f_2(x_2)$ фиксировано. То же верно для $f_1 \otimes f_2|_{\{x_1\} \times X_2}$ (по существу это отображение f_2). Следовательно, сужение от-я F^* на каждое слагаемое непрерывно (при условии непрерывности от-я f_1 и f_2), поэтому F^* непрерывно (так как все слагаемые открыто-замкнуты).

Предположим, что f_1 и f_2 факторны. Покажем, что тогда и F^* факторно. Пусть $U \subset \bigoplus_{y_2 \in Y_2} Y_1 \times \{y_2\} \oplus \bigoplus_{y_1 \in Y_1} \{y_1\} \times Y_2$ и $F^{*-1}(U)$ открыто. Это означает, что $\forall x_2 \in X_2$ $F^{*-1}(U) \cap X_1 \times \{x_2\}$ открыто и $\forall x_1 \in X_1$ $F^{*-1}(U) \cap \{x_1\} \times X_2$ открыто.

Заметим, что
 $F^{*-1}(U) \cap X_1 \times \{x_2\} =$
 $= f_1^{-1}(\pi_1(U \cap Y_1 \times \{x_2\})) \times \{x_2\}.$

Из факторности отображения f_1 следует, что $\pi_1(U \cap Y_1 \times \{x_2\})$ открыто для любого $x_2 \in X_2$.

т.е. $\pi_1(U \cap Y_1 \times \{y_2\})$ открыто для любого $y_2 \in Y_2$. Из аналогичных соображений $\pi_2(U \cap \{y_1\} \times Y_2)$ открыто для любого $y_1 \in Y_1$. Значит $U \cap \{y_1\} \times Y_2$ открыто в $\{y_1\} \times Y_2$ для всех $y_1 \in Y_1$. Это означает, что U открыто в $\bigoplus_{y_1 \in Y_1} Y_1 \times \{y_2\} \oplus \bigoplus_{y_2 \in Y_2} \{y_1\} \times Y_2$. Следовательно, F^* факторно.

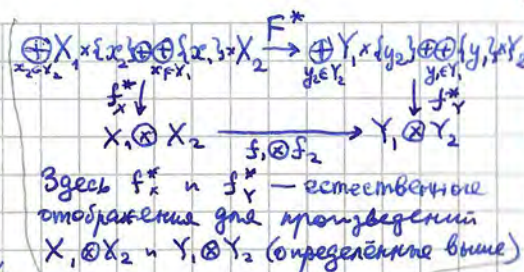
Из факторности естественного отображения f_x^* вытекает, что композиция $f_y^* \circ F^* = f_y \circ f_2 \circ f_x^*$ факторна, а из непрерывности отображения f_x^* — что $f_y \circ f_2$ факторно: если $(f_y \circ f_2)^{-1}(U)$ открыто, то $f_x^{*-1}((f_y \circ f_2)^{-1}(U))$ открыто, и из факторности отображения $f_y^* \circ F^*$ следует, что U открыто, потому что $f_x^{*-1}((f_y \circ f_2)^{-1}(U)) = (f_y^* \circ F^*)^{-1}(U)$. Отсюда вытекает, что $f_y \circ f_2$

факторно.

Из факторности декартова произведения факторных отображений проистекают многочисленные преимущества и вычислительных алгебр перед топологическими. Например, верна следующая теорема.

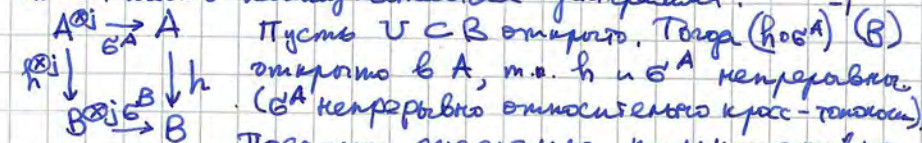
[Т.] Пусть A — квазитопологическая алгебра, $\sim$ — конгруэнция на A и B — факторалгебра $A/\sim$ с фактортопологией относительно естественного гомоморфизма $h: A \rightarrow B$. Тогда B является квазитопологической алгеброй, т.е. операции на B раздельно непрерывны.

Зам. В случае топ. алгебр это не так — см. пример на с. 35.



Здесь f_x^* и f_y^* — естественные отображения для произведений $X_1 \otimes X_2$ и $Y_1 \otimes Y_2$ (определённые выше).

□ Пусть $\sigma \in \Sigma_j$, $\sigma^A: A^j \rightarrow A$ и $\sigma^B: B^j \rightarrow B$ — соответствующие операции на A и B и $h: A \rightarrow B$ — факторный гомоморфизм. Нужно показать, что отображение σ^B раздельно непрерывно, т.е. $\sigma^B: B^{\otimes j} \rightarrow B$ непрерывно. Имеет место коммутативная диаграмма:



Поскольку диаграмма коммутативна, $(h \circ \sigma^A)^{-1}(B) = (h^{\otimes j})^{-1}(\sigma^B^{-1}(U))$, поэтому из того, что $h^{\otimes j}$ факторно (по доказанному предположению), следует, что $\sigma^B^{-1}(U)$ открыто в $B^{\otimes j}$, а это и требуется.

Здесь и ниже
верхний индекс
обозначает
степень,
а указывается,
что речь идет
о квазитоп-
алгебрах.

Абсолютно свободная квазитопологическая алгебра

Пусть X — топ. н-о. Тогда существует абсолютно свободная квазитоп. алгебра $W^q(X)$, и она изоморфна алгебре термов $T(X)$ (как абстрактная алгебра).

Напомним, что $\Sigma = \bigcup_{j \in \omega} \Sigma_j$. Будем строить $W^q(X)$ в соответствии с определением терма точно так же, как в случае топологических алгебр, но с заменой произведения крос-произведением. На нулевой и первом шагах берем соответственно, мн-во Σ_0 , стандартное дискретной топологии, и пр-во X , т.е. полагаем

$$W_0^q(X) = \Sigma_0 \text{ и } W_1^q(X) = X.$$

Эти пр-ва являются символами констант и 0-арными операциями (т.е. термами нулевой степени). Обозначим через Φ^0 тождественное отображение $W_0^q(X) \rightarrow T_0(X) = \Sigma_0$, а через Φ^1 — тождественное отображение $W_1^q(X) \rightarrow T_1(X) = X$.

На втором шаге для каждого $j \in \omega$, каждого $\sigma \in \Sigma_j$ и каждого набора $(k_1, \dots, k_j)$, где $k_i \in \{0, 1\}$ для $i \leq j$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = 1$, обозначим через $(W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$ топологическую копию пр-ва $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$. Набор $(t_1, \dots, t_j) \in W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ рассматриваем как элемент именно этой копии, будем обозначать $(t_1, \dots, t_j)_\sigma$. Положим

$$W_2^q(X) = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq 1 \\ \max\{k_1, \dots, k_j\} = 1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma.$$

Каждый элемент каждого слагаемого $(W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$, где $\sigma \in \Sigma_j$, отождествим с термом второй степени с помощью отображения

$$\Phi_{\sigma, k_1, \dots, k_j}^2 : (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma \rightarrow T_2(X),$$

$$\Phi_{\sigma, k_1, \dots, k_j}^2((t_1, \dots, t_j)_\sigma) = \sigma(t_1, \dots, t_j) \in T_2(X).$$

(Здесь $0 \leq k_1, \dots, k_j \leq 1$, $\max\{k_1, \dots, k_j\} = 1$.)

Заметим, что сумма $\Phi^2 = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq 1 \\ \max\{k_1, \dots, k_j\} = 1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$

представляет собой взаимно однозначное соответствие между $W_2^q(X)$ и множеством $T_2(X)$ всех термов второй степени.

Пространства $W_n^q(X)$ для $n > 2$ строятся точно так же. Предположим, что $n > 2$ и мы уже определили пр-ва $W_k^q(X)$ и отождествили их с соответствующими множествами $T_k(X)$ посредством отображения Φ^k для всех $k < n$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$, каждого набора $(k_1, \dots, k_j)$, где $0 \leq k_i \leq n-1$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$, и каждого $\sigma \in \Sigma_j$ обозначим через $(W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$ топологическую копию пр-ва $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ и положим

$$W_n^q(X) = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq n-1 \\ \max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma.$$

Для тех же $j, k_1, \dots, k_j$ и любого набора $(t_1, \dots, t_j) \in W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ положим $\Phi_{\sigma, k_1, \dots, k_j}^n((t_1, \dots, t_j)_\sigma) = \sigma(\Phi^{k_1}(t_1), \dots, \Phi^{k_j}(t_j)) \in T_n(X)$

(здесь $\sigma \in \Sigma_j$ и $(t_1, \dots, t_j)_\sigma$ обозначает набор $(t_1, \dots, t_j)$, рассматриваемый как элемент той копии пр-ва $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$, которая имеет индекс σ). Сумма $\Phi^n = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq n-1 \\ \max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} \Phi_{\sigma, k_1, \dots, k_j}^n$ представляет собой взаимно однозначное соответствие между $W_n^q(X)$ и $T_n(X)$.

Заметим, что $W_n^q(X) \cap W_m^q(X) = \Phi$, если $n \neq m$. В конце концов положим $W^q(X) = \bigoplus_{n \geq 0} W_n^q(X)$, $\Phi = \bigoplus_{n \geq 0} \Phi^n$.

Отображение Φ осуществляет взаимно однозначное соответствие между мн-м $W^q(X)$ и абсолютно свободной (абстрактной) алгеброй $T(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(X)$.

Операции $\sigma \in \Sigma$ на алгебре $T(X)$ естественным образом порождают операции на $W^q(X)$ (точно так же, как в топологическом случае). А именно, пусть $j > 0$ и $t_1, \dots, t_j \in W^q(X)$. Для каждого $m \leq j$ элемент t_m содержится в ровно одном мн-ве $W_{k_m}^q(X)$. Положим $n = \max\{k_1, \dots, k_j\} + 1$ и $\sigma(t_1, \dots, t_j) = (t_1, \dots, t_j)_\sigma \in W_n^q(X)$.

Лемма. Алгебра $W^q(X)$ является квазитопологической Σ -алгеброй.

- Мы должны проверить, что операции $\sigma \in \Sigma$, определённые на $W^q(X)$, непрерывны относительно кросс-топологии, т.е. раздельно непрерывны относительно обильной топологии произведения. Из определения операций $\sigma \in \Sigma_j$ на $W^q(X)$ видно, что их сужения на каждое слагаемое $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ кросс-степеней $W^q(X)^{\otimes j}$ представляют собой гомоморфизмы между $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ и $(W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))^\sigma$. Значит, операции σ непрерывны как сумма непрерывных от-и:

$$\sigma = \bigoplus_{k_1, \dots, k_j \geq 0} \sigma|_{W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)}.$$

- Отсюда следует утверждение леммы.

это продолжение всех квазитопологических Σ -алгебр

Лемма. Для любой квазитопол. алгебры $A \in \mathcal{W}$ и любого непрерывного от-я $f: X \rightarrow A$ существует непрерывный гомоморфизм $\hat{f}: W^q(X) \rightarrow A$, для которого $\hat{f} = f|_X$.

- Для $j \geq 0$ обозначим операцию на A , соответствующую операции $\sigma \in \Sigma_j$ на $W^q(X)$, тем же символом. То определение операции σ на $W^q(X)$ всякий раз-т мп-ва $W_n^q(X)$ при $n > 0$ имеет вид $(x_1, \dots, x_j)^\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_j)$, где $j > 0$, $\sigma \in \Sigma_n$, $x_i \in W_{k_i}^q(X)$ для $i \leq j$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$. Определим от-я $f_n: W_n^q(X) \rightarrow A$ для $n \in \omega$ следующим образом. Положим

$$f_1|_X = f, \quad f_0|_{\mathbb{Z}_0} = \text{id}.$$

гомоморфизм отображение

Отобра f_n непрерывно, поскольку f непрерывно на X , а слагаемые Σ_0 дискретны. Для $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$, положим

$$f_2^\sigma((x_1, \dots, x_j)^\sigma) = \sigma(f_{k_1}(x_1), \dots, f_{k_j}(x_j))$$

для $x_i \in W_{k_i}^q(X)$, $k_1, \dots, k_j \in \{0, 1\}$, $\max k_i = 1$. Каждое от-я $f_2^\sigma: W_2^q(X) \rightarrow A$ непрерывно, поскольку оно является композицией непрерывных от-и f_0, f_1 и σ , и оно согласовано с операцией σ в естественном смысле. Поэтому

$$f_2 = \bigoplus_{j \geq 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_i \leq 1 \\ \max k_i = 1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} f_2^\sigma. \quad \text{Это непрерывное от-я из } W_2^q(X) \text{ в } A,$$

согласованное со всеми операциями σ . Отобра $f_n: W_n^q(X) \rightarrow A$ для $n > 2$ определяются точно так же: предположив, что от-я $f_k: W_k^q(X) \rightarrow A$ определены и непрерывны для всех $k < n$, приведем согласованность со всеми операциями отобра, мы покажем $f_n^\sigma((x_1, \dots, x_j)^\sigma) = \sigma(f_{k_1}(x_1), \dots, f_{k_j}(x_j))$ для $x_i \in W_{k_i}^q(X)$, $k_1, \dots, k_j \leq n-1$, $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$ и $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$.

Одноточечный гомоморфизм $\hat{f}: W^q(X) \rightarrow A$ определяется так:

$$\hat{f} = \bigoplus_{n \in \omega} f_n.$$

- Он непрерывен, будучи суммой непрерывных отображений.

Т. Для топ. пр-ва X квазитопол. алгебра $W^q(X)$ вместе с тождественным вложением $i_X^W = \text{id}_X^W: X \rightarrow W^q(X)$ является абсолютно свободной квазитопологической Σ -алгеброй. Как абстрактная алгебра $W^q(X)$ изоморфна абсолютно свободной Σ -алгебре $T(X)$ над множеством X .

- Первое утверждение теоремы вытекает из доказанных лемм. Второе утверждение следует из того, что отображение Φ является изоморфизмом между алгеброй $W^q(X)$, рассматриваемой как абстрактная алгебра, и абстрактно абсолютно свободной алгеброй $T(X)$.

Свободные квазитопологические алгебры

Пусть $\mathcal{V}$ — любое многообразие квазитоп. алгебр, и пусть X — любое топ. пр-во. Пусть $\mathcal{W}$ — многообразие всех квазитоп. алгебр той же сигнатуры. Поскольку своб. квазитоп. алгебра $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ принадлежит многообразию $\mathcal{W}$, существует единственный непр. гомоморфизм $Q: W^1(X) \rightarrow F_{\mathcal{V}}^1(X)$, для которого $i_X^1 = Q \circ id_X = Q|_X$ (здесь id_X — тождеств. вложение $X \hookrightarrow W^1(X)$). Мы будем писать Q вместо Q^1 , когда многообразие $\mathcal{V}$ ясно из контекста.

[Т.] Для любого топ. пр-ва X и любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитоп. алгебр топология свободной квазитоп.-я алгебры $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ является фактортопологией относительно естественного гомом-изм. Q алгебры $W^1(X)$ на $F_{\mathcal{V}}^1(X)$.

□ Обозначим через $F_{\mathcal{V}}^Q(X)$ алгебру $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ (без топологии), снабжённую фактортопологией относительно Q . В силу единственности свободной квазитопологической алгебры достаточно проверить, что алгебра $F_{\mathcal{V}}^Q(X)$ вместе с отображением $i_X^1 = Q|_X$ является свободной квазитоп. алгеброй пр-ва X . Ясно, что первое условие в определении свободной квазитоп.-я алгебры выполнено. Проверим второе. Пусть $A \in \mathcal{V}$, $f: X \rightarrow A$ — непр. от-е и $\tilde{f}: W^1(X) \rightarrow A$ — непр. гомоморфизм, продолжающий f . Поскольку $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ является абстрактной своб. алгеброй над множеством $Q(X)$, согласно определению свободной алгебры существует гомом-изм $h: F_{\mathcal{V}}^1(X) \rightarrow A$, продолжающий $f \circ i_X^{-1}$. Композиция $h \circ Q$ является гомом-изм. из $W^1(X)$ в A , и при этом она продолжается от-е f .

Отобр-е мн-ва в алгебру продолжается до гомом-изм. своб. алгебры над этим мн-м в ту же алгебру.

единственным образом. Значит, $\tilde{f} = h \circ Q$. Из непрерывности от-е $\tilde{f}$ и факторности отображения Q вытекает непрерывность гомоморфизма h (по лемме на с. 52). Ясно, что $\tilde{f} = h \circ i_X^1$. Таким образом, для $F_{\mathcal{V}}^Q(X)$ и $i_X^1 = Q|_X$ выполнено второе условие в определении свободной квазитоп. алгебры.

Здесь верхний индекс n — все случаи

По аналогии со случаями свободных топ. алгебр обозначим через $F_{\mathcal{V}}^{Q,n}(X)$ мн-во полиномов n -й степени на X -х порождающего мн-ва $Q(X)$ в $F_{\mathcal{V}}^1(X)$. Заметим, что $F_{\mathcal{V}}^{Q,n}(X) = Q(W_n^1(X))$ и $F_{\mathcal{V}}^1(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_{\mathcal{V}}^{Q,n}(X)$.

[Т.] Опреде топ. инд. предела диагона с. 33

[Т.] Для любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр и любого топ. пр-ва X свободная квазитоп. алгебра $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^1(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_{\mathcal{V}}^{Q,n}(X)$.

□ Пространство $W^1(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $W^1(X) = \bigcup_{n \geq 0} W_n^1(X)$, поскольку оно является топ. суммой своих подпространств $W_n^1(X)$ (и при этом все $W_n^1(X)$ замкнуты в $W^1(X)$). Из факторности отображения Q вытекает, что $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ имеет топ. инд. предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^1(X) = \bigcup_{n \geq 0} Q(W_n^1(X)) = \bigcup_{n \geq 0} F_{\mathcal{V}}^{Q,n}(X)$ (см. лемму на с. 34).

В случае топологических алгебр эта теорема неверна — см. пример на с. 35-36.

Полугруппа ультрафильтров

Мы видели, что существование непрерывных операций (с определёнными свойствами) на топологическом пространстве накладывает довольно существенные ограничения на топологические свойства этого пространства. Следующая теорема показывает, что существование раздельно непрерывных операций (и даже операций с более слабыми свойствами непрерывности) иногда может иметь сильное следствие.

Т. Элиаса — Нунакурт

Пусть S — полугруппа с топологией $\mathcal{T}$, причём пространство $(S, \mathcal{T})$ хаусдорфово и компактно и непрерывная операция $\cdot: S \times S \rightarrow S$ непрерывна по первому аргументу. Тогда в S имеется идемпотент, т.е. элемент e со свойством $e \cdot e = e$.

□ Сначала мы докажем существование минимального (по включению) замкнутого подполугруппы H в S , а потом покажем, что любой элемент такой полугруппы H является идемпотентом.

Лемма Цорна

Напомним лемму Цорна: Если $(X, \leq)$ частично упорядоченное мн-во с тем свойством, что для любого $C \subset X$ такого, что $\forall x, y \in C$ либо $x \leq y$, либо $y \leq x$, существует верхняя грань, т.е. элемент $\bar{c} \in X$ со свойством $\forall x \in C \ x \leq \bar{c}$, то в X имеется максимальный элемент, т.е. $\exists \bar{x} \in X$ со свойством $y \geq \bar{x} \Rightarrow y = \bar{x}$.

В качестве $(X, \leq)$ возьмём семейство $\mathcal{H}$ всех замкнутых подполугрупп полугруппы S ,

упорядоченное отношением $\subseteq$, обратное включению. $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow H_1 \supset H_2$. Пусть $E \subset \mathcal{H}$ обладает тем свойством, что $\forall H_1, H_2 \in E$ либо $H_1 \subseteq H_2$, либо $H_2 \subseteq H_1$ (т.е. либо $H_1 \supset H_2$, либо $H_2 \supset H_1$). Ясно, что $\bigcap \{H: H \in E\}$ — замкнутая подполугруппа, если только это пересечение не пусто. Покажем, что оно не пусто. Заметим, что семейство E центрировано (любое конечное пересечение его эл-ов не пусто). Действительно, если $H_1, \dots, H_n \in E$, то из того, что все эл-ты сн-ва E попарно сравнимы, следует, что одна из полугрупп $H_1, \dots, H_n$ содержится в остальных. Поскольку она не пуста, имеем $H_1 \cap \dots \cap H_n \neq \emptyset$. Итак, E — центрированное сн-во замкнутых подполугрупп компакта S . Значит, пересечение всех его эл-ов не пусто (иначе дополнив до эл-ов E образующих бы открытое покрытие компакта S , не содержащее конечного подпокрытия — это противоречит лемме Цорна). Следовательно, $\bigcap \{H: H \in E\} \neq \emptyset$ — замкнутая подполугруппа полугруппы S (т.е. элемент сн-ва $\mathcal{H}$), и эта подполугруппа содержится во всех подполугруппах $H \in E$, т.е. является верхней гранью мн-ва E (относительно нашего порядка $\leq = \supset$). Значит, применив лемму Цорна, согласно которой существует максимальная (т.е. минимальная по включению) замкнутая подполугруппа H в S .

Пусть $e \in H$. По условию отображение $f: S \rightarrow S$, определённое правилом $f(x) = x \cdot e$, непрерывно. Значит, $H \cdot e$ — непрерывный образ замкнутого ($\Rightarrow$ компактного) подпр-ва H компакта S . Компакт S хаусдорфов, непрерывный образ компакта компактен, любое компактное подпр-во хаусдорфова пр-ва замкнуто $\Rightarrow H \cdot e$ замкнуто в S . Ясно, что это подполугруппа. Ясно также, что $H \cdot e \subset H$.

Из минимальности подполугруппы H следует, что $H \cdot e \subset H$. Следовательно, $\exists x \in H$, для которого $x \cdot e = e$ (так как $e \in H$). Значит, множество $X = \{x \in H: x \cdot e = e\}$ не пусто. Это множество замкнуто, т.к. $X = \{e\}^{-1} \cap H$. Легко видеть, что X — подполугруппа. Поскольку $X \subset H$ и H минимальна, имеем $X = H$. Значит, $e \cdot e = e$.

Теорема Элиса-Кулишвили показывает довольно неожиданные приложения. В качестве иллюстрации рассмотрим пространство ультрафильтров на полугруппе.

Опр. Фильтр на мн-ве X называется непустое семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

- ① $\emptyset \notin \mathcal{F}$
 - ② если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов мн-ва $\mathcal{F}$ принадлежит мн-ву $\mathcal{F}$);
 - ③ если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$. В частности, $X \in \mathcal{F}$.
- Фильтр $\mathcal{F}$ называется свободным, если $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ является базой фильтра $\mathcal{F}$, если любое множество $F \in \mathcal{F}$ содержит мн-во $B \in \mathcal{B}$.

Максимальный (по включению) фильтр называется ультрафильтром. Другими словами, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ — ультрафильтр, если $\mathcal{F}$ является фильтром и

- ④ для любого фильтра $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ имеем $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.
- Ультрафильтр $\mathcal{U}$ называется главным, если $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.
Такой образ, главный ультрафильтр = несвободный фильтр
главный ультрафильтр = свободный фильтр

Зам. Всякий главный уф на X имеет вид
 $\mathcal{U}_x = \{A \subset X: x \in A\}$

для некоторой (любой) точки x .
[Действительно: ясно, что $\mathcal{U}_x$ — фильтр и $\{x\} \in \mathcal{U}_x$, поэтому при добавлении к $\mathcal{U}_x$ любого мн-ва $A \notin \mathcal{U}_x$ нарушится ④. Очевидно, что $\mathcal{U}_x$ — уф. и $x \in \bigcap \mathcal{U}_x$, то $\mathcal{U}_x \supset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}_x = \mathcal{U}$.]

пересечение любого конечного числа любых элементов этого семейства пусто.

Т Любое центрированное семейство $\mathcal{E}$ порождает произвольного мн-ва X содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{U}$ на X .

□ Упорядочим семейство $\mathcal{E}$ всех центрированных семейств порождённых мн-ва X отношением включения $\subset$. Если $\Sigma \subset \mathcal{E}$ и $\forall E_1, E_2 \in \Sigma$ либо $E_1 \subset E_2$, либо $E_2 \subset E_1$, то $\mathcal{U}_\Sigma = \{F \subset X: \exists E \in \Sigma (F \in E)\}$ центрировано: если $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{U}_\Sigma$, то $\exists E_1, \dots, E_n \in \Sigma$, для которых $F_i \in E_i$. Все E_i попарно сравнимы. Пусть среди E_i самое большое. Тогда $F_1, \dots, F_n \in E_k$, а значит, $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$.

Итак, у каждого мн-ва $\Sigma \subset \mathcal{E}$, состоящего из попарно сравнимых э-в, есть верхняя грань $\mathcal{U}_\Sigma$. Применяя лемму Зорна. Из неё вытекает существование максимального (по включению) центрированного сн-ва $\mathcal{U}$ порождённого $\mathcal{E}$. Это ультрафильтр. Выполнение условия ① следует из центрированности семейства $\mathcal{U}$; если $A, B \in \mathcal{U}$, то сн-во $\mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ содержит $\mathcal{U}$ и центрировано, значит, $\mathcal{U} \cup \{A \cap B\} = \mathcal{U}$, т.е. $A \cap B \in \mathcal{U}$, так что условие ② тоже выполнено; из тех же соображений выполнено условие ③; условие ④ выполнено потому, что $\mathcal{U}$ максимален не только среди фильтров, но даже и среди центрированных семейств (содержащих $\mathcal{E}$).

□ Валидных семейств (содержащих $\mathcal{E}$).

След. На любом бесконечном множестве существует главный ультрафильтр.

□ Если X бесконечна, то семейство $\mathcal{F} = \{X \setminus F: F \text{ конечно}\}$ центрировано, и $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. По теореме $\mathcal{F}$ содержится в ультрафильтре $\mathcal{U}$ на X . Ясно, что $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

Т Фильтр $\mathcal{F}$ на мн-ве X является ультрафильтром $\Leftrightarrow \forall A \subset X$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

□ $\Rightarrow$ Пусть $\mathcal{F}$ — у.ф. и $A \subset X$. Если $F \setminus A = \emptyset$ для некоторого $F \in \mathcal{F}$, то $F \subset A$ и $A \in \mathcal{F}$ по св-ву ③. Предположим, что $F \setminus A \neq \emptyset$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Если $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, то

$(F_1 \setminus A) \cap (F_2 \setminus A) \cap \dots \cap (F_n \setminus A) = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \setminus A \neq \emptyset$, т.е. семейство $\{F \setminus A : F \in \mathcal{F}\}$ центрировано. Оно содержится в нек. ультрафильтре $\mathcal{U}$. Для каждого $F \in \mathcal{F}$ имеем $F \setminus A \in \mathcal{U}$ и, следовательно, $F \in \mathcal{U}$ (так как $F \setminus A \subset F$). Значит, $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, и из минимальности $\mathcal{F}$ вытекает, что $\mathcal{F} = \mathcal{U}$. Следовательно, $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

□ $\Leftarrow$ Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр с тем свойством, что для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $X \setminus A \in \mathcal{F}$, и пусть $\mathcal{U}$ — у.ф., содержащий $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F} \neq \mathcal{U}$, то $\exists A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$. По предположению $X \setminus A \in \mathcal{F}$, а поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, имеем $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Таким образом, $\mathcal{U}$ содержит непересекающиеся мн-ва A и $X \setminus A$ в противоречие со свойством ① и ② фильтра. Значит, $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

След. Основное свойство ультрафильтров. Если $\mathcal{U}$ — у.ф. на множестве X , $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_m \subset X$ и $X = A_1 \cup \dots \cup A_m$, то $A_i \in \mathcal{U}$ для некоторого $i \leq m$.

□ Пусть $A_i \notin \mathcal{U}$ для всех $i \leq m$. По доказанной теореме $X \setminus A_i \in \mathcal{U}$ для $i \leq m$. Значит, $(X \setminus A_1) \cap \dots \cap (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m) \in \mathcal{U}$, но

■ $X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m) = \emptyset$. Противоречие.

Топологическое пространство ультрафильтров

Пусть X — мн-во. Обозначим мн-во всех у.ф. на X через βX . Для каждого $A \subset X$ положим

$$\bar{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}.$$

Семейство $\mathcal{B} = \{\bar{A} : A \subset X\}$ является базой некоторой топологии на βX . В дальнейшем мы будем рассматривать

βX только с этой топологией. Тогда ультрафильтры пространства βX мы будем обозначать строчными латинскими буквами из второй половины латинского алфавита: p, q, r и т.д. Для $A \subset X$

$\bar{A}$ — окрестность у.ф. $p \in \beta X \Leftrightarrow A \in p$.

Множество X мы будем отождествлять с подпространством пр-ва βX , состоящим из главных ультрафильтров: $X \ni x \equiv p_x = \{A \subset X : x \in A\}$.

Свойства пространства βX

1. Мн-во всех главных ультрафильтров, которое отождествляется с X ,
 - густо: $\forall x \in X$ имеем $\{x\} \in p_x$ и $\overline{\{x\}} = \{p_x\}$; ↓ окрестность
 - открыто: $X = \bigcup_{x \in X} \{p_x\} = \bigcup_{x \in X} \overline{\{x\}}$; ↑ ультрафильтр
 - всюду плотно: любая непустая открытая мн-ва $U \subset \beta X$ содержит $\bar{A}$ для нек. непустого $A \subset X$ (так как все $\bar{A}$ составляют базу топологии на βX). Для $x \in A$ имеем $A \in p_x$. Значит, $p_x \in U$.
2. Для любого $A \subset X$ мн-во $\bar{A}$ открыто-замкнуто, т.е. $\beta X \setminus \bar{A} = X \setminus \bar{A}$ (это вытекает из основного св-ва ультрафильтров).
3. Для всякого $A \subset X$ $\bar{A}$ является замыканием мн-ва $A \equiv \{p_x : x \in A\}$ в βX , причем $\bar{A} \cap X = A$. Действительно, из того, что $A \subset \bar{A}$ и $\bar{A}$ замкнуто, следует, что $\bar{A}$ содержит замыкание множества A . Обратно, пусть $p \in \bar{A}$ (т.е. $A \in p$). Тогда окр-ть U точки p в βX содержит окр-ть вида $\bar{B}$, где $B \in p$. Для любой точки $x \in A \cap B$ имеем $p_x \in A$ и $A \cap B \in p_x$, т.е. $p_x \in \bar{A} \cap B \subset \bar{B} \subset U$. Таким образом, любая точка p из $\bar{A}$ является предельной для A . Значит, $\bar{A}$ содержится в замыкании мн-ва A .
Наконец, $p_x \in \bar{A} \Leftrightarrow A \in p_x$, т.е. $x \in A$; значит, $\bar{A} \cap X = A$.

4. Пр-во βX хаусдорфово. Действительно, если $p, q \in \beta X$ и $p \neq q$, то $\exists A \in \mathcal{P}: A \notin q$. Имен $X \setminus A \in p$. Множества A и $X \setminus A$ — непересекающиеся окрестности точек p и q .

5. Пространство βX компактно.

□ Пусть $\mathcal{U} = \{U_i: i \in I\}$ — открытое покрытие пр-ва βX . Для каждого $p \in \beta X$ найдём $A_p \in \mathcal{P}$ и $i_p \in I$, для которых $A_p \subset U_{i_p}$ (и $p \in A_p$). Сем-во $\{A_p: p \in \beta X\}$ является открытым покрытием пр-ва βX .

Предположим, что сем-во $\mathcal{F} = \{X \setminus A_p: p \in \beta X\}$ центрировано. Тогда $\exists p \in \beta X: \mathcal{F} \subset p$. Поскольку $X \setminus A_p \in \mathcal{F}$, имен $X \setminus A_p \in p$, но по построению $A_p \in p$. Это противоречие показывает, что $\mathcal{F}$ не центрировано. Пусть $X \setminus A_{p_1} \cap \dots \cap X \setminus A_{p_n} = \emptyset$. Тогда $A_{p_1} \cup \dots \cup A_{p_n} = X$. По основному св-ву ультрафильтров любой у.ф. $q \in \beta X$ содержит A_{p_i} для некоторого $i \leq n$, т.е. $q \in A_{p_i}$. Значит, $\{A_{p_1}, \dots, A_{p_n}\}$ — покрытие пр-ва βX . Следовательно, $\{U_{i_{p_1}}, \dots, U_{i_{p_n}}\}$ — тоже покрытие (т.к. $A_{p_i} \subset U_{i_{p_i}}$).

Предг. Любое отображение $f: X \rightarrow \beta X$ продолжается до непрерывного от-я $\hat{f}: \beta X \rightarrow \beta X$.

□ Для каждого $p \in \beta X$ положим $\hat{f}(p) = \{A \subset X: f^{-1}(A) \in p\}$ (очевидно, это ультрафильтр). Если $p_x \equiv x \in X$, то $\hat{f}(p_x) = \{A \subset X: f^{-1}(A) \ni x\} = \{A \subset X: f(x) \in A\}$ — это главный у.ф. $p_{f(x)} \equiv f(x)$. Значит, от-я $\hat{f}: \beta X \rightarrow \beta X$ является продолжением от-я f . Надо проверить непрерывность. Пусть V — любая окр-сть точки $\hat{f}(p)$. Она содержит открыто-замкнутую окр-сть вида $\bar{B}$, где $B \in f(p)$, т.е. $f^{-1}(B) \in p$. Ясно, что если $f^{-1}(B) \in q$, то $B \in f(q)$, т.е. если

$q \in f^{-1}(B)$, то $\hat{f}(q) \in \bar{B}$. Значит, $f^{-1}(B)$ — окр-сть точки p , которая содержится в прообразе $\hat{f}^{-1}(V) \supset f^{-1}(B)$. Таким образом, прообраз любой окр-сти точки $\hat{f}(p)$ содержит окр-сть точки p для любого $p \in \beta X$. Значит, $\hat{f}$ непрерывно.

Полугруппы ультрафильтров

Пусть S — полугруппа. Для каждого $s \in S$ определим отображение

$$L_s: S \rightarrow S \subset \beta S$$

правилам

$$L_s(x) = s \cdot x \text{ для всех } x \in S.$$

Рассмотрим непр. продолжение

$$\hat{L}_s: \beta S \rightarrow \beta S.$$

Для $\hat{L}_s(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $S \cdot p$.

Теперь для каждого $q \in \beta S$ рассмотрим отображение

$$R_q: S \rightarrow \beta S,$$

определённое правилами

$$R_q(x) = x \cdot q \text{ для всех } x \in S.$$

Существует непрерывное продолжение

$$\hat{R}_q: \beta S \rightarrow \beta S.$$

Для $\hat{R}_q(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $p \cdot q$. Этот ультрафильтр называется

произведением ультрафильтров p и q . Мы определим бинарную операцию (умножение) на βS . Она непрерывна по первому аргументу, а если первый элемент — элемент полугруппы S (т.е. главный у.ф.), то и по второму. Покажем, что из этих непрерывностей вытекает ассоциативность.

Пусть $p, q, r \in \beta S$. Мы покажем, что любая окр-ть точки $(p \cdot q) \cdot r$ пересекается с любой окр-ью точки $p \cdot (q \cdot r)$. Отсюда и из хаусдорфовости пр-ва βS будет вытекать, что $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

Пусть O_1 — любая окр-ть точки $(p \cdot q) \cdot r$.
Непр-ть по 1-му арг. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists$ окр-ть $V_1 \ni p \cdot q$, где
которой $V_1 \cdot r \subset O_1$,
и $\exists$ окр-ть $U_1 \ni p$, для кот.
 $U_1 \cdot q \subset V_1$.

Пусть O_2 — любая окр-ть точки $p \cdot (q \cdot r)$.
Непр-ть по 1-му аргументу
 $\Rightarrow \exists$ окр-ть $V_2 \ni q \cdot r$,
для которой $U_2 \cdot (q \cdot r) \subset O_2$.

Возьмем $x \in S \cap U_1 \cap U_2$.

$x \cdot q \in V_1$, непр-ть по 2-му
аргументу (где первого из S)
 $\Rightarrow \exists$ окр-ть $W_1 \ni q$,
для которой $x \cdot W_1 \subset V_1$.

$x \cdot (q \cdot r) \in O_2$, непр-ть по
2-му аргументу $\Rightarrow$
 $\exists$ окр-ть $V_2 \ni q \cdot r$, для которой
 $x \cdot V_2 \subset O_2$. Непр-ть по 1-му
арг. $\Rightarrow \exists$ окр-ть $W_2 \ni q$,
для кот. $W_2 \cdot r \subset V_2$.

Возьмем $y \in S \cap W_1 \cap W_2$.

$x \cdot y \in V_1$, $V_1 \cdot r \subset O_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x \cdot y) \cdot r \in O_1$. Непр-ть
по 2-му аргументу $\Rightarrow$
 $\exists$ окр-ть $Q_1 \ni r$, для которой
 $(x \cdot y) \cdot Q_1 \subset O_1$.

$y \cdot r \in V_2$, непр-ть по 2-му арг.
 $\Rightarrow \exists$ окр-ть $Q_2 \ni r$, для
которой $y \cdot Q_2 \subset V_2$.
 $x \cdot V_2 \subset O_2 \Rightarrow x \cdot (y \cdot Q_2) \subset O_2$

Возьмем $z \in S \cap Q_1 \cap Q_2$.

Имеем $(x \cdot y) \cdot z \in O_1$ и $x \cdot (y \cdot z) \in O_2$. Из ассоциа-
тивности умножения в полугруппе следует, что

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \in O_1 \cap O_2.$$

Таким образом, любые окрестности точек $(p \cdot q) \cdot r$
и $p \cdot (q \cdot r)$ пересекаются. Значит, эти точки совпа-
дают. Следовательно, умножение в βS ассоциатив-
но, т.е. βS — полугруппа относительно этого
умножения.

Итак, мы продолжили полугрупповую операцию на S
на βS , превратив тем самым βS в компактную
хаусдорфову полугруппу с умножением, непрерывным
по 1-му аргументу, которая содержит S в качестве
(дискретной) подполугруппы. По теореме Элиаса-
Нумакуры в βS есть идемпотент.

Рассмотрим в качестве S полугруппу $\mathbb{N}$
натуральных чисел с обычной операцией сложения.
Она не содержит идемпотентов, поэтому в $\beta \mathbb{N}$
есть идемпотент, являющийся неглавным ультра-
фильтром. Будем обозначать умножение в $\beta \mathbb{N}$ знаком $+$ и

Непросто видеть, что все эти элементы
неглавного ультрафильтра бесконечны. Действительно,
пусть $p \in \beta X$, и пусть $\{x_1, \dots, x_n\} \in p$. Из основ-
ного свойства ультрафильтра следует, что либо $\{x_i\} \in p$,
либо $X \setminus \{x_i\} \in p$. В первом случае p главный, во
втором $X \setminus \{x_i\} \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \{x_2, \dots, x_n\} \in p$. Продолжая
в том же духе, мы будем рассматривать точки
 $x_2, \dots, x_n$ одна за другой. На шаге i мы либо уви-
дим, что $\{x_i\} \in p$, т.е. $p = p_{x_i}$, либо сократим
кол-во точек, т.е. подумаем, что $\{x_{i+1}, \dots, x_n\} \in p$. Если
нам удастся дойти до n -го шага (т.е. окажется,
что $\{x_i\} \notin p$ для $i \leq n$), то с необходимостью окажется,
что $\{x_n\} \in p$, т.е. $p = p_{x_n}$.

Итак, пусть $e \in \beta \mathbb{N}$ — идемпотент (он неглавный),
и пусть $A \in e$ (это мн-во бесконечно). Тогда A —
окр-ть точки e в $\beta \mathbb{N}$. Поскольку $e + e = e$ и сложение
в $\beta \mathbb{N}$ непрерывно по 1-му аргументу, $\exists$ окр-ть U точки e ,
для которой $U + e \subset A$. Окр-ть U содержит окр-ть вида
 B где $B \in e$, причем можно считать, что $B \subset A$
(иначе перейдем к пересечению). Возьмем $x \in B$. Имеем
 $x + e \in A$. Сложение непр- по 2-му аргументу, когда первый
принадлежит мн-ву $\mathbb{N}$ (является главным ультрафильтром)
 $\Rightarrow \exists c \in e: x + c \in A$. Можно считать, что $c \in A$
и $x \notin c$ (иначе пересечем c с A и $c \in \mathbb{N} \setminus \{x\}$).

$e, m.k. e$ неглавный
 $\Rightarrow \{x\} \in e$

Возьмем $y \in C$. Имеем $x+y \in \bar{A}$. Поскольку $x+y \in N$ и $\bar{A} \cap N = A$ (сл. св-во 3 пр-ва βX), имеем $x+y \in A$. Отсюда немедленно вытекает следующая теорема:

Теорема Шура

Какова бы ни была раскраска натуральных чисел в конечное число цветов, найдутся одноцветные точки x, y, z , являющиеся решением уравнения $x+y=z$.

Действительно, пусть $N = A_1 \cup \dots \cup A_m$ — раскраска мн-ва N в m цветов. Идемпотент $e \in \beta N$ содержит одно y мн-ва $A_1, \dots, A_m$ (по основ. лемме св-ва ультрафильтров). Пусть $A: e \in e$. Тогда мы видим, что любой д-т ультрафильтра e содержит x, y, z , для которых $x+y=z$.

Продолжение операций и тождеств на компактификации

Мы научились продолжать операцию с дискретной полуруппой S на компактификацию βS этой полуруппы, причем продолжение обладает свойствами непрерывности, достаточными для существования изоморфизма.

На самом деле для βX верно утверждение, более сильное, чем предложение на с. 75:

Утв. Для любого отображения $f: X \rightarrow K$ мн-ва X в компактное хаусдорфово пр-во K существует непрерывное продолжение $\bar{f}: \beta X \rightarrow K$.

Хаусдорфов компакт, содержащий данное топологическое пространство в качестве вложенного подпространства, называется компактификацией этого пространства. Хорошо известно, что у всякого тихоновского (т.е. регулярного T_1) пространства X существует максимальная компактификация (она называется также стоун-кеховской), т.е. компактификация βX с тем свойством, что любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow K$ в хаусдорфов компакт продолжается до непрерывного отображения $\bar{f}: \beta X \rightarrow K$. Более того построили такую компактификацию для дискретного пр-ва X (как пр-во ультрафильтров). Максимальная компактификация произвольного тихоновского пр-ва является обобщением этой конструкции (поэтому для нее используется то же обозначение). Ее можно построить тем же способом с помощью максимальных фильтров функционально замкнутых множеств, т.е. множеств $F \subset Z(X)$, где $Z(X)$ — все функц. замкнутые подмн-ва пр-ва X ,

$F \subset X$ функционально замкнуто, если $F = f^{-1}(0)$ для нек. непрерыв. функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

- и свойствами
- ① $\emptyset \notin \mathcal{F}$
 - ② $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
 - ③ $A \in \mathcal{F}, A \subset B \in \mathcal{Z}(X) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
 - ④ $\mathcal{F}$ максимально по включению среди см-в функц. z -х см-в сов-ий ①-③.

Если S — тихоновская квазитопологическая подгруппа, то её операцию можно продолжить на βS точно так же, как и в S (с записью сохранения непрерывности).

Интересен вопрос, когда операция продолжается до непрерывной или раздельно непрерывной операции. Ниже перечислены некоторые результаты на эту тему.

[T] Для группы G с ^{тихоновской} топологией следующие условия равносильны:

- 1) G — топ. группа и её операция продолжается до непрерывной групповой операции на βG , т.е. βG — топ. группа, содержащая G в качестве топологической подгруппы;
- 2) G — псевдокомпактная топ. группа;
- 3) G — топологическая группа и G^k псевдокомпактно для любого кардинала k ;
- 4) G — псевдокомпактное гр-во и умножение в G непрерывно;
- 5) G — псевдокомпактное гр-во, умножение в G раздельно непрерывно и умножение $\circ: G \times G \rightarrow G$ продолжается до раздельно непер. отображения $\beta G \times \beta G \rightarrow \beta G$.

В связи с этой теоремой возникает проблема (нерешённая):

Проблема Пусть G — топ. группа и умножение $\circ: G \times G \rightarrow G$ продолжается до раздельно непрерывного от-з $\circ: \beta G \times \beta G \rightarrow \beta G$. Верно ли, что G псевдокомпактна?

Для гр-в с операцией Мальцева верна аналогичная теорема:

[T] Для тихоновского гр-ва X с непрерывной операцией Мальцева следующие условия равносильны:

- 1) операция Мальцева на X продолжается до непрерывной операции Мальцева на βX , т.е. βX является мальцевской топ. алгеброй, содержащей X в качестве мальц. подалгебры;
- 2) операция Мальцева на X продолжается до непрерывной тернарной операции на βX ;
- 3) гр-во X псевдокомпактно;
- 4) гр-во X^k псевдокомпактно для любого кардинала k .

Проблема Пусть X — топологическая мальцевская алгебра и операция Мальцева продолжается до раздельно непрерывной тернарной операции на βX . Верно ли, что X псевдокомпактно?

[T] Для тихоновской квазитопол.-й мальцевской алгебры M следующие условия равносильны:

- 1) операция Мальцева продолжается до раздельно непер. операции Мальцева на βM , т.е. βM — квазитопологическая мальц. алгебра, содержащая M в качестве подалгебры;
- 2) гр-во M псевдокомпактно и операция Мальцева на M продолжается до разд. непрерывной тернарной операции на βM ;
- 3) гр-во M псевдокомпактно и операция Мальцева продолжается на βM до тернарной операции, совместно непрерывной по любым двум переменным при фиксации третьей.

[I.] Пусть X — топологическая Σ -алгебра и для всякого $n \in \mathbb{N}$ тако, что $\Sigma_n \neq \emptyset$, пр-во X^n псевдокомпактно. Тогда операции на X продолжаются до непрерывных операций на βX , относительно которых βX является топологической Σ -алгеброй.

[I.] Если X — псевдокомпактная топологическая алгебра, то все операции на X продолжаются до раздельно непр. операций на βX , относительно которых βX является квазитопологической алгеброй.

Продолжение тождеств

Пусть A — хаус. топологическая алгебра, $B \subset A$ — её всюду плотная подалгебра, p и q — любые термы (т.е. полиномы). Если $p \equiv q$ на B , то $p \equiv q$ на A , поскольку p и q являются непрерывными отображениями $A^n \rightarrow A$ (будучи композициями операций, кот. непрерывны по определению топ. алгебры), а если непр. от-я совпадают на всюду плотной подмн-ве, то они совпадают везде.

Для квазитопологических алгебр это не так.

Пример. Пусть $\mathbb{Z}$ — дискретная топ. группа (по сложению) и S — её одноточечная компактификация, т.е. $S = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, окрестности всех точек $x \in \mathbb{Z}$ имеют вид $\{x\}$, а окрестности точки ∞ — дополнения до конечных множеств. Продолжим операцию $+$ на S , положив $\infty + x = x + \infty = \infty$ для $x \in S$. Операцию инверсии тоже продолжим: $-\infty = \infty$.
 S является компактом с тремя операциями.

0-арная: $x \mapsto -x$
унарная: $x \mapsto -x$
двухарная: $x \mapsto -x$
Операции раздельно непр., но тождество $x + (-x) = 0$ на S не выполняется, хотя оно выполнено на всюду плотной подгруппе $\mathbb{Z}$.

Всё дело в том, что композиция раздельно непрерывных операций не обязана быть раздельно непрерывной. Например, в приведенном выше примере композиция $x + (-y)$ не раздельно непрерывна.

Легко проверяется следующее утверждение:

Предп. Пусть X и Z — топ. пр-ва, отображения $f, g: X^n \rightarrow Z$ раздельно непрерывны, $Y \subset X = \overline{Y}$ и $f|_Y = g|_Y$. Тогда $f = g$.

Напомним, что терм (полином) строится шаг за шагом. Полином каждой следующей ступени получается применением операции $\sigma \in \Sigma$ к термам предыдущих ступеней: $t = \sigma(t_1, \dots, t_n)$. При этом для каждого терма определено его переменные. Одна и та же переменная может встречаться в разных термах. Если этого не происходит при построении терма p , то мы будем говорить, что каждая переменная встречается в p не более одного раза. Если на некотором шаге переменная x встречается в двух термах и на всех других шагах этого не происходит, то мы будем говорить, что x встречается в p два раза. Аналогично определяется ситуация, когда x встречается три и т.д. раз.

Легко убедиться в том, что композиция раздельно непр. от-ий $X^n \rightarrow X$, в которых каждая переменная встречается ≤ 1 раз, раздельно непрерывна.

Предл.

Следовательно, верно следующее утверждение.

Пусть X — квазитоп., Y — её всюду плотная подалгебра и p и q — терм. Если каждая переменная встречается в p и $q \leq 1$ раз и $p \equiv q$ на Y , то $p \equiv q$ на X .

След.

Если X — квазитоп. Σ -алгебра, Y — её всюду плотная подалгебра и операция $\sigma \in \Sigma$ ассоциативна (коммутативна) на Y , то σ ассоциативна (коммутативна) и на X .

Пример. Если S — квазитоп. полугруппа, S является всюду плотным подпространством топологического гр-ва X и полугрупповая операция на S продолжается до разд. непрерывной бинарной операции на X . Тогда это продолжение ассоциативно, т.е. X — квазитоп. полугруппа, содержащая S как подполугруппу. Если S коммутативна, то X тоже коммутативна.

Проблема

Существует ли бесконечная дискретная полугруппа S , та же полугрупповая операция продолжается до разд. непрерывной операции на βS ?
[Известно, что если S коммутативна, то продолжение операции на βS разд. непрерывно тогда и только тогда, когда оно коммутативно.]

Т

Пусть X — квазитоп. алгебра, Y — её всюду плотная подалгебра и Y псевдокоммутативна. Тогда для любых многочленов p и q , в одном из которых каждая переменная встречается ≤ 2 раз, а в другом — ≤ 1 раз, из выполнения тождества $p \equiv q$ на Y вытекает его выполнение на X .

След.

Если M — псевдокоммутативная квазитопологическая мальцевская алгебра, X — топ. гр-во, $M \subseteq X = \overline{M}$ и операция Мальцева на M продолжается до разд. непрерывной тернарной операции на X . Тогда это продолжение является операцией Мальцева на X .

Проблема

- 1) Найти другие достаточные условия продолжения тождеств на расширение квазитопологических алгебр.
- 2) Найти условия, при которых каноничная разд. непрерывная отображений разд. непрерывна.