

Введение в топологию

Евгений Резниченко

2 января 2025 г.

Оглавление

Введение	vii
1 Базовые понятия математики, теория множеств	1
1.1 Упорядоченные множества, ординалы, кардиналы, аксиома выбора	1
1.1.1 Упорядоченные множества	1
1.1.2 Ординалы	2
1.1.3 Натуральные числа, индукция и трансфинитная индукция	5
1.1.4 Аксиома выбора	6
1.1.5 Мощность множества и кардиналы	8
1.2 Дополнение	9
1.2.1 Базовые математические конструкции	9
1.2.2 Аксиомы теории множеств	12
1.2.3 Классы и класс-отображения	12
1.2.4 Аксиомы теории множеств	13
1.2.5 Базовые математические конструкции в теории множеств	14
1.2.6 Соглашения об обозначениях	15
1.3 Задачи	16
1.3.1 Классы и аксиомы ZFC	16
1.3.2 Аксиомы ZFC	16
1.3.3 Кардиналы и мощности	16
1.3.4 Аксиома выбора и ее следствия	17
1.3.5 Кофинальность	17
1.3.6 Разное	18
2 Топологические и метрические пространства	19
2.1 Топологические и метрические пространства, топологические свойства	19
2.1.1 Топологические пространства	19
2.1.2 Гомеоморфизмы, топологические свойства	20
2.1.3 Базы, предбазы, первая и вторая аксиома счетности	21
2.1.4 Топологические свойства пространств, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, I	22
2.1.5 Метрические и метризуемые пространства, I	23
2.1.6 Методы введения топологий, I	26
2.1.7 Линейно упорядоченные пространства, I	28
2.2 Дополнение	29

2.2.1	Системы окрестностей	29
2.2.2	Методы введения топологий, II	29
2.2.3	Кардинальные инварианты, I	30
2.2.4	Топологические свойства пространств, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, II	31
2.3	Задачи	31
2.3.1	Метрические и метризуемые пространства	31
2.3.2	Линейно упорядоченные пространства	32
2.3.3	Базы пространств	32
2.3.4	Свойства примеров	32
2.3.5	Разное	33
3	Предельные точки, пределы, непрерывные отображения	34
3.1	Типы точек, замыкание и внутренность, сходящиеся последовательности, непрерывность	34
3.1.1	Типы точек	34
3.1.2	Всюду плотные и нигде не плотные множества	37
3.1.3	Непрерывные отображения, I	38
3.1.4	Сходящиеся последовательности, I	41
3.2	Дополнение	43
3.3	Задачи	43
3.3.1	Типы точек	43
3.3.2	Канонически открытые и канонически замкнутые множества	43
3.3.3	(Всюду) плотное и нигде не плотное подмножество	44
3.3.4	Разное	44
4	Аксиомы отделимости	46
4.1	Аксиомы отделимости, хаусдорфовы, регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства	46
4.1.1	Аксиомы отделимости	46
4.1.2	T_0 , T_1 и T_2 пространства	47
4.1.3	Сходящиеся последовательности, II	49
4.1.4	T_3 . Регулярные пространства	51
4.1.5	Непрерывные отображения, II	52
4.1.6	$T_{3\frac{1}{2}}$. Вполне регулярные пространства	52
4.1.7	T_4 . Нормальные пространства	53
4.1.8	Метрические и метризуемые пространства, II	55
4.2	Дополнение	56
4.3	Задачи	56
4.3.1	Отображения	56
4.3.2	Разное	57
5	Компактность	58
5.1	Топологические свойства типа компактности	58
5.1.1	Компактные пространства	58
5.1.2	Локально компактные пространства, одноточечная компактификация	60
5.1.3	Счетно компактные и секвенциально компактные пространства	62

5.1.4	Финально компактные пространства	66
5.1.5	Метрические и метризуемые пространства, III	68
5.2	Дополнение	68
5.3	Задачи	68
5.3.1	Компактность и отделимость	68
5.3.2	Точки полного накопления	69
5.3.3	Разреженные пространства и пространства без изоли- рованных точек	69
5.3.4	Разное	70
6	Фильтры и направленности	71
6.1	Фильтры и направленности	71
6.1.1	Фильтры и ультрафильтры	71
6.1.2	Фильтры и ультрафильтры в топологических простран- ствах	75
6.2	Дополнение	79
6.2.1	Направленности	79
6.2.2	Фильтры и направленности	81
6.3	Задачи	82
6.3.1	Компактные полугруппы	83
6.3.2	Полугруппа $\beta\omega$	83
6.3.3	Теоремы о компактности и ультрафильтры	84
6.3.4	Теоремы о компактности и теорема Александрера	87
7	Операции над пространствами	88
7.1	Операции над топологическими пространствами	88
7.1.1	Сравнение топологий	88
7.1.2	Инициальные и финальные топологии	89
7.1.3	Сумма пространств	90
7.1.4	Произведение пространств	90
7.1.5	Диагональное произведение отображений	92
7.1.6	Компактность произведения пространств	94
7.1.7	Метрические и метризуемые пространства, IV	94
7.2	Дополнение	95
7.2.1	Сравнение топологий	95
7.2.2	Инициальные и финальные топологии	96
7.2.3	Произведение пространств	98
7.3	Задачи	98
8	Конструкции пространств	99
8.1	Конструкция топологических пространств	99
8.1.1	Фактор топология и факторные отображения	99
8.1.2	Замкнутые и открытые отображения	102
8.1.3	Топологические свойства сумм и произведений про- странств	104
8.1.4	Конструкция пространств	106
8.2	Дополнение	108
8.3	Задачи	108
8.3.1	Произведения пространств	108
8.3.2	Конструкция пространств	109

8.3.3	Совершенные отображения	109
8.3.4	Замкнутые образы метризуемых пространств	110
9	Функции на пространствах, паракомпактность	111
9.1	Функции на пространствах, разбиение единицы, паракомпактность	111
9.1.1	Непрерывные отображения, III	111
9.1.2	Пространство непрерывных функций	112
9.1.3	Продолжение непрерывных функций	114
9.1.4	Паракомпактные пространства	116
9.1.5	Разбиение единицы	119
9.2	Дополнение	120
9.2.1	Метрические и метризуемые пространства, V	120
9.3	Задачи	122
10	Связность и нульмерность	123
10.1	Связные и нульмерные пространства	123
10.1.1	Связные пространства	123
10.1.2	Компоненты и квазикомпоненты связности	125
10.1.3	Линейно связные пространства	127
10.1.4	Вполне не связные и нульмерные пространства	129
10.2	Дополнение	131
10.3	Задачи	131
11	Пространство Бэра и канторово множество	132
11.1	Деревья, пространство Бэра и канторово множество и их непрерывные образы	132
11.1.1	Деревья	132
11.1.2	Пространство Бэра	134
11.1.3	A-системы	136
11.1.4	Канторово множество и его непрерывные образы	138
11.2	Дополнение	140
11.2.1	A-системы	140
11.2.2	Пространство Бэра	140
11.3	Задачи	142
12	Кривые	143
12.1	Кривые	143
12.1.1	Непрерывные образы отрезка	143
12.1.2	Фракталы	147
12.2	Дополнение	150
12.2.1	Непрерывные образы отрезка	150
12.2.2	Локально связные полные метрические пространства	150
12.3	Задачи	152
13	Гомотопия	153
13.1	Гомотопия. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства.	153
13.1.1	Гомотопия	153
13.1.2	Гомотопическая эквивалентность отображений	154

13.1.3	Гомотопическая эквивалентность пространств	155
13.1.4	Стягиваемые пространства	156
13.2	Дополнение	157
13.2.1	Отображение гомотопических классов при непрерывных отображениях	157
13.3	Задачи	157
14	Фундаментальная группа. Накрытия.	158
14.1	Фундаментальная группа. Накрытия.	158
14.1.1	Фундаментальная группа.	158
14.1.2	Накрытия.	164
14.2	Дополнение	168
14.2.1	Фундаментальная группа.	168
14.3	Задачи	168
15	Вычисление фундаментальной группы	169
15.1	Универсальное накрытие. Вычисление фундаментальной группы. Фундаментальная группа окружности и проективного пространства.	169
15.1.1	Универсальное накрытие. Вычисление фундаментальной группы.	169
15.1.2	Фундаментальная группа окружности и проективного пространства.	171
15.2	Дополнение	172
15.2.1	Действие фундаментальной группы на прообраз точки при накрытии	172
15.2.2	Универсальное накрытие.	174
15.3	Задачи	175
	Литература	176

Введение

Вводный курс в топологию, механико-математический факультет, 2-ой курс.

Глава 1

Базовые понятия математики, теория множеств

Темы в этой главе

Тема 1. Вполне упорядоченные множества, мощность множества. Ординалы, кардиналы.

Тема 2. Аксиома выбора. Эквивалентные формулировки аксиомы выбора. Теорема Цермело и лемма Цорна.

1.1 Упорядоченные множества, ординалы, кардиналы, аксиома выбора

1.1.1 Упорядоченные множества

Пусть X множество и $<$ отношение на X . Множество с отношением также обозначается как $(X, <)$. Если выполняются условия

(O_1) (транзитивность) если $x < y$ и $y < z$, то $z < x$;

(O_2) (строгая антисимметричность) если $x < y$, то $y \not< x$.

то множество называется *частично упорядоченным* (ч.у.м). С отношением $<$ связана отношение $\leq$, $x \leq y$ если $x < y$ или $x = y$. Обозначим интервалы в X :

$$\begin{aligned} (-\infty, b)_X &= \{x \in X : x < b\}, & (-\infty, b]_X &= \{x \in X : x \leq b\}, \\ (a, +\infty)_X &= \{x \in X : a < x\}, & [a, +\infty)_X &= \{x \in X : a \leq x\}, \\ (a, b)_X &= \{x \in X : a < x < b\}, & [a, b]_X &= \{x \in X : a \leq x \leq b\}, \\ (a, b]_X &= \{x \in X : a < x \leq b\}, & [a, b)_X &= \{x \in X : a \leq x < b\} \end{aligned}$$

для $a, b \in X$. Индекс X будем опускать, когда из контекста понятно какое линейно упорядоченное множество имеется в виду.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ частично упорядоченных называется (*строго*) *возрастающим*, если из $x < y$ вытекает $f(x) \leq y$ ($f(x) < y$). Отображение f называется *порядковым изоморфизмом*, если f биекция и $x < y$ если и только если $f(x) < f(y)$ для $x, y \in X$. Биекция f является порядковым изоморфизмом если и только если отображения f и f^{-1} возрастающее.

Пусть $M \subset X$. На множестве M есть порядок $<_M$, наследуемый из X : для $x, y \in M$, $x <_M y$ если $x < y$. На множестве M будем предполагать этот порядок.

Элемент $a \in M$ называется *минимумом* множества M , записывается $a = \min M$, если $x \not< a$ для $x \in M$. Элемент $b \in M$ называется *максимумом* множества M , записывается $b = \max M$, если $b \not< x$ для $x \in M$.

Если дополнительно выполняется условие

(O_3) либо $x < y$, либо $y < x$, для различных x и y ,

то множество называется *линейно упорядоченным* (л.у.м).

Отображение $f : X \rightarrow Y$ линейно упорядоченных множеств является порядковым изоморфизмом, если и только если f сюръекция и отображение f строго возрастающее. Цепь в частично упорядоченном множестве это линейно упорядоченное подмножество. Подмножество линейно упорядоченного множества линейно упорядоченно.

Пусть $M \subset X$. Элемент $a \in X$ называется *инфимумом* множества M , записывается $a = \inf M$, если $M \subset [a, +\infty)$ и $M \cap [a, x) \neq \emptyset$ для каждого $x > a$. Элемент $b \in X$ называется *супремумом* множества M , записывается $b = \sup M$, если $M \subset (-\infty, b]$ и $M \cap (x, b] \neq \emptyset$ для каждого $x < b$. Множество M *ограниченно сверху*, если существует $b \in X$, такое что $M \subset (-\infty, b]$. Множество M *ограниченно снизу*, если существует $a \in X$, такое что $M \subset [a, +\infty)$. Множество M *ограниченно*, если оно ограничено сверху и снизу. Множество M называется *начальным интервалом* X , если из того что $x \in M$ и $y < x$ вытекает $y \in M$. Начальным интервал M назовем *собственным*, если $M \neq X$.

Если дополнительно выполняется условие

(O_4) существует минимум $\min M$ множества M для каждого непустого $M \subset X$

то множество называется *вполне упорядоченным* (в.у.м).

Пусть $M \subset X$. Тогда M вполне линейно упорядоченно и ограничено снизу. Множество M ограничено тогда и только тогда, когда M ограничено сверху.

1.1.2 Ординалы

Множество λ назовем *ординалом*, если выполняются условия

(Ord_0) каждый элемент λ является множеством (λ — семейство множеств);

(Ord_1) если $\gamma \in \lambda$, то $\gamma \subset \lambda$;

(Ord_2) $(\lambda, <)$ вполне упорядоченное множество, где порядок $<$ на λ определен следующим образом: для $\alpha, \beta \in \lambda$, $\alpha < \beta$ если $\alpha \in \beta$.

Класс всех ординалов обозначим через Ord .

Утверждение 1.1. Пусть $\lambda \in \text{Ord}$ и $\alpha \in \lambda$. Тогда $\alpha \in \text{Ord}$ и $(-\infty, \alpha) = \alpha$, α как множество является собственным начальным интервалом в λ .

Доказательство. По определению $(-\infty, \alpha) = \{\beta \in \gamma : \beta < \alpha\} = \{\beta \in \gamma : \beta \in \alpha\} = \alpha \cap \gamma$. Так как $\alpha \subset \lambda$, то $(-\infty, \alpha) = \alpha$. Условие (Ord_0) для $\alpha \subset \gamma$ выполняется. Пусть $\beta \in \alpha$. Тогда $\beta \in \gamma$ и $\beta = (-\infty, \beta) \subset (-\infty, \alpha) = \alpha$. Следовательно $\beta \subset \alpha$ и выполняется (Ord_1) . Так как α является подмножеством в.у.м λ , то α является в.у.м. Следовательно, выполняется (Ord_2) . $\square$

Определим порядок $<$ на классе Ord : для ординалов $\alpha, \beta \in \text{Ord}$, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta \Leftrightarrow$ множество α собственный начальный интервал множества β . Тогда каждый ординал является собственным начальным интервалом класса Ord .

Утверждение 1.2. Любые два ординала $\lambda, \gamma \in \text{Ord}$ сравнимы, выполняется одна из трех возможностей: либо $\lambda = \gamma$, либо $\lambda < \gamma$, либо $\gamma < \lambda$.

Доказательство. Пусть $\mu = \lambda \cap \gamma$. Тогда $\mu \in \text{Ord}$. Если $\mu = \lambda$ и $\mu = \gamma$, то $\lambda = \gamma$. Если $\mu = \lambda$ и $\mu \subsetneq \gamma$, то $\lambda < \gamma$. Если $\mu \subsetneq \lambda$ и $\mu = \gamma$, то $\gamma < \lambda$. Покажем, что вариант $\mu \subsetneq \lambda$ и $\mu \subsetneq \gamma$ невозможен. Предположим противное. Тогда $\mu < \lambda$ и $\mu < \gamma$. Следовательно $\mu \in \lambda \cap \gamma = \mu$. Противоречие, так как $\mu \notin (-\infty, \mu) = \mu$. $\square$

Следовательно, Ord линейно упорядоченный класс. Также класс Ord вполне упорядочен: если $M \subset \text{Ord}$ непустое множество ординалов и $\alpha \in M$, то либо $\alpha = \min M$, либо $\min M = \min M \cap \alpha$.

Для $\lambda \in \text{Ord}$ обозначим

$$\lambda + 1 = \lambda \cup \{\lambda\}.$$

Утверждение 1.3. $\lambda + 1 \in \text{Ord}$ и λ является максимальным элементом в $\lambda + 1$.

Доказательство. Очевидно, для $\lambda + 1$ выполняется (Ord_0) . Пусть $\alpha \in \lambda + 1$. Если $\alpha \in \lambda$, то $\alpha \subset \lambda \subset \lambda + 1$. Если $\alpha = \lambda$, то $\alpha = \lambda \subset \lambda + 1$. Следовательно, $\alpha \subset \lambda + 1$ и выполняется (Ord_1) . Пусть $M \subset \lambda + 1$ непустое множество. Если $M = \{\lambda\}$, то $\lambda = \min M$, в противном случае, $\min M = \min M \cap \lambda$. Следовательно, выполняется (Ord_2) . Пусть $\alpha \in \lambda + 1$. Если $\alpha = \lambda$, то $\alpha \leq \lambda$, в противном случае $\alpha \in \lambda$ и $\alpha < \lambda$. Следовательно, λ является максимальным элементом в $\lambda + 1$. $\square$

Утверждение 1.4. Пусть $M \subset \text{Ord}$ есть множество ординалов и $\mu = \bigcup M$. Тогда $\mu \in \text{Ord}$, $M \subset \mu + 1$ и $\mu = \sup M$ в $\mu + 1$.

Доказательство. Очевидно, для μ выполняется (Ord_0) . Пусть $\alpha \in \mu$. Тогда $\alpha \in \lambda$ для некоторого $\lambda \in M$. Получаем $\alpha \subset \lambda \subset \mu$. Следовательно, выполняется (Ord_1) . Пусть $A \subset \mu$ непусто множество. Тогда $A \cap \lambda \neq \emptyset$ для некоторого $\lambda \in \mu$ и $\min A = \min A \cap \lambda$. Следовательно, выполняется (Ord_2) . Мы доказали $\mu \in \text{Ord}$.

Докажем $\mu = \sup M$. Если в M есть максимальный элемент, то μ является этим максимумом, $M \subset \mu + 1$ и $\sup M = \max M = \mu$. Предположим, в M нет максимума. Тогда $M \subset \mu \subset \mu + 1$ и $\alpha < \mu$ для $\alpha \in M$. Пусть $\beta < \mu$. Тогда $\beta \in \mu$ и $\beta \in \lambda$ для некоторого $\lambda \in M$. Следовательно $\beta < \lambda$ и $\lambda \in (\beta, \mu] \cap M \neq \emptyset$. $\square$

Для отображения $f : \lambda \rightarrow X$, определенного на ординале, обозначим

$$f[\gamma] = \{f(\alpha) : \alpha \in \gamma\}$$

для $\gamma \in \lambda + 1$ — образ множества $\gamma \subset \lambda$ при отображении f .

Предложение 1.5 (Главный технический результат). Пусть X множество, $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \neq X\}$ и $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow X$ есть отображение, для которого выполняется условие: $\Phi(M) \notin M$ для $M \in \mathcal{M}$. Тогда существуют единственный ординал λ и биекция $\varphi : \lambda \rightarrow X$, такие что $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$.

Отметим, как можно интерпретировать заключение предложения. Биекция φ означает нумерацию множества X : $X = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$, где $x_\alpha = \varphi(\alpha)$. Тогда $\varphi[\alpha] = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Формула $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ означает

$$x_\alpha = \Phi(\{x_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Доказательство предложения 1.5. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = \{(\gamma, \psi, A) : \gamma \in \text{Ord}, A \subset X, \\ \psi : \gamma \rightarrow A \text{ биекция,} \\ \psi(\alpha) = \Phi(\psi[\alpha]) \text{ для } \alpha \in \gamma\}. \end{aligned}$$

Факт 1. Пусть $(\gamma, \psi, A) \in \mathcal{Q}$, $(\theta, \nu, B) \in \mathcal{Q}$ и $\gamma \leq \theta$. Тогда $\psi = \nu|_\gamma$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $Q = \min\{\alpha \in \gamma : \psi(\alpha) \neq \nu(\alpha)\} \neq \emptyset$. Пусть $\alpha = \min Q$. Тогда $\psi|_\alpha = \nu|_\alpha$ и $\psi(\alpha) \neq \nu(\alpha)$. Так как $\psi|_\alpha = \nu|_\alpha$, то $\psi[\alpha] = \nu[\alpha]$. Тогда из определения семейства $\mathcal{Q}$ вытекает $\psi(\alpha) = \Phi(\psi[\alpha]) = \Phi(\nu[\alpha]) = \nu(\alpha)$. Противоречие с $\psi(\alpha) \neq \nu(\alpha)$. $\square$

Положим

$$\lambda = \bigcup \{\gamma : (\gamma, \psi, A) \in \mathcal{Q}\} \in \text{Ord}, \quad Y = \bigcup \{A : (\gamma, \psi, A) \in \mathcal{Q}\} \subset X.$$

Из факта 1 вытекает, что существует отображение $\varphi : \lambda \rightarrow Y$, такое что $\varphi|_\gamma = \psi$ для $(\gamma, \psi, A) \in \mathcal{Q}$. Отображение φ является биекцией и $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$. То есть $(\lambda, \varphi, Y) \in \mathcal{Q}$.

Докажем, что $Y = X$. Предположим противное: $Y \neq X$. Положим $y^+ = \Phi(Y)$ и $Y^+ = Y \cup \{y^+\}$. Определим отображение $\varphi^+ : \lambda + 1 \rightarrow Y^+$. Положим $\varphi^+(\alpha) = \varphi(\alpha)$ для $\alpha < \lambda$ и $\varphi^+(\lambda) = y^+$. Тогда φ^+ биекция и $\varphi^+(\alpha) = \Phi(\varphi^+[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda + 1$. То есть $(\lambda + 1, \varphi^+, Y^+) \in \mathcal{Q}$. Противоречие, так как $Y^+ \not\subset Y$.

Ординал λ и отображение φ , удовлетворяющее условиям предложения, найдены. Докажем единственность λ и φ . Пусть $\gamma \in \text{Ord}$ и $\psi : \gamma \rightarrow X$ биекция, для которой выполняется условие: $\psi(\alpha) = \Phi(\psi[\alpha])$ для $\alpha \in \gamma$. Тогда $(\gamma, \psi, X) \in \mathcal{Q}$. Предположим, для определенности, $\gamma \leq \lambda$. Из факта 1 вытекает, что $\varphi = \psi|_\gamma$. Так как ψ биекция и $\psi[\gamma] = \varphi[\gamma] = X = \psi[\lambda]$, то $\gamma = \lambda$. Из $\varphi = \psi|_\gamma$ вытекает $\varphi = \psi$. $\square$

Теорема 1.6. Для любого в.у.м X существует единственный ординал λ , порядково изоморфный X .

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \neq X\}$ и

$$\Phi : \mathcal{M} \rightarrow X, M \mapsto \min X \setminus M.$$

Для ординала λ , биекция $\varphi : \lambda \rightarrow X$ является порядковым изоморфизмом если и только если выполняется условие: $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$. Из предложения 1.5 вытекает, что существуют единственные λ и φ , для которых выполняется это условие. $\square$

Для в.у.м X обозначим через $\text{Ord}(X)$ тот единственный ординал, который порядково изоморфен X .

Утверждение 1.7. Пусть $\lambda, \gamma \in \text{Ord}$. Если λ порядково изоморфно γ , то $\lambda = \gamma$.

Доказательство. Так как λ порядково изоморфно γ , то $\text{Ord}(\gamma) = \lambda$. Так как γ порядково изоморфно γ , то $\text{Ord}(\gamma) = \gamma$. Следовательно, $\lambda = \gamma$. $\square$

1.1.3 Натуральные числа, индукция и трансфинитная индукция

В теории множеств натуральные числа определяются как конечные ординалы:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= 0 + 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, \\ 2 &= 1 + 1 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ 3 &= 2 + 1 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\ &\dots \\ n + 1 &= \{0, 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Множество всех неотрицательных целых чисел обозначается как ω , это первый бесконечный ординал:

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Пусть λ ординал (или даже $\lambda = \text{Ord}$). Пусть $\mathcal{P}(\alpha)$ есть некоторое математическое высказывание (логическая формула) с параметром α .

Трансфинитная индукция, это рассуждения по следующей схеме¹

Докажем по (трансфинитной) индукции, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.

1) **База индукции.** Доказываем $\mathcal{P}(0)$.

2) **Шаг индукции.** Пусть $0 < \alpha < \lambda$. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно для всех $\beta < \alpha$. Доказываем тогда, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.

Мы доказали (по индукции), что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.

Этот метод вытекает из следующего утверждения.

¹Этот метод можно было бы назвать полной трансфинитной индукцией, по аналогии с классической ($\lambda = \omega$) полной математической индукции

Утверждение 1.8. *Верны следующие два утверждения.*

- 1) **База индукции.** *Верно $\mathcal{P}(0)$.*
- 2) **Шаг индукции.** *Пусть $0 < \alpha < \lambda$. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно для всех $\beta < \alpha$. Тогда $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.*

Тогда $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для всех $\alpha < \lambda$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\alpha = \min\{\gamma < \lambda : \mathcal{P}(\gamma) \text{ не верно}\}$. Если $\alpha = 0$, то противоречие базе индукции. Если $\alpha > 0$, то противоречие шагу индукции. $\square$

Ординал α называется *последовательным*, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta \in \text{Ord}$. Не нулевой ординал α называется *предельным*, если α не последовательный ординал.

То что не нулевой ординал α является предельным эквивалентно условиям: (1) $\beta + 1 < \alpha$ для $\beta < \alpha$; (2) $\alpha = \sup \alpha$.

Часто доказательство по трансфинитной индукции разбивается на три случая.

Докажем по (трансфинитной) индукции, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.

- 1) **База индукции.** Доказываем $\mathcal{P}(0)$.
- 2) **Шаг индукции, α последовательный ординал.** Пусть $\alpha = \beta + 1 < \lambda$ последовательный ординал. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно. Доказываем тогда, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.
- 3) **Шаг индукции, α предельный ординал.** Пусть $\alpha < \lambda$ предельный ординал. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно для $\beta < \alpha$. Доказываем тогда, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.

Мы доказали (по индукции), что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.

Для обычной индукции ($\lambda = \omega$), случай 3) не бывает, так как конечные ординалы не предельные. Тогда получается стандартная математическая индукция.

1.1.4 Аксиома выбора

В этом разделе содержатся наиболее важные и полезные следствия аксиомы выбора.

Теорема 1.9 (Цермело). *Любое множество может быть вполне упорядочено.*

Доказательство. Пусть X множество и $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \neq X\}$. Из аксиомы выбора вытекает, что существует отображение $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow X$, такое что $\Phi(M) \in X \setminus M$ для $M \in \mathcal{M}$. Из предложения 1.5 вытекает, что существуют $\lambda \in \text{Ord}$ и биекция $\varphi : \lambda \rightarrow X$. Определим полный порядок на X : для $x, y \in X$, $x < y$ если $\varphi^{-1}(x) < \varphi^{-1}(y)$. $\square$

Пусть P есть ч.у.м и $M \subset P$. Множество M называется *цепью*, если M есть линейно упорядоченное подмножество P . Элемент $u \in P$ называется *верхней гранью* M , если $x \leq u$ для любого $x \in M$.

На множестве всех подмножеств

$$\text{Exp}(X) = \{M : M \subset X\}$$

множества X есть естественная структура ч.у.м, $A \leq B$ если $A \subset B$. Соответственно, для $\mathcal{R} \subset \text{Exp}(X)$ определены понятия цепи и верхней грани.

Предложение 1.10. Пусть X есть множество, $\mathcal{L} \subset \text{Exp}(X)$, $\mathcal{L} \neq \emptyset$ и выполняются условия

- (1) если $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ цепь, то $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$;
- (2) если $M \in \mathcal{L}$ и $M \neq X$, то $M \cup \{x\} \in \mathcal{L}$ для некоторого $x \in X \setminus M$.

Тогда $X \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\emptyset \in \mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \neq X\}$. Определим $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow X$. Для $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ выберем $\Phi(M) \in X \setminus M$ таким образом, что $M \cup \{\Phi(M)\} \in \mathcal{L}$. Для $M \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$ выберем $\Phi(M) \in X \setminus M$ произвольно. Тогда $\Phi(M) \notin M$ для $M \in \mathcal{M}$.

Из предложения 1.5 вытекает, что существуют $\lambda \in \text{Ord}$ и $\varphi : \lambda \rightarrow X$, для которых выполняется условие: $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$.

Иными словами, $x_\alpha = \Phi(R_\alpha)$ для $\alpha < \lambda$, где $x_\alpha = \varphi(\alpha)$ для $\alpha < \lambda$ и $R_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ для $\alpha \leq \lambda$.

Тогда $R_0 = \emptyset$, $R_\lambda = X$, $R_\beta \subset R_{\beta+1} = R_\beta \cup \{\Phi(R_\beta)\} \in \mathcal{L}$ для $\beta < \lambda$ и $R_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} R_\beta$ если $\alpha \leq \lambda$ предельный ординал. Последовательность множеств $(R_\alpha)_{\alpha \leq \lambda}$ возрастающая: если $\alpha \leq \beta \leq \lambda$, то $R_\alpha \subset R_\beta$.

Трансфинитной индукцией по $\alpha < \lambda + 1$ докажем $R_\alpha \in \mathcal{L}$.

База индукции. По условию $R_0 = \emptyset \in \mathcal{L}$.

Шаг индукции. Пусть $0 < \alpha < \lambda + 1$ и $R_\beta \in \mathcal{L}$ для $\beta < \alpha$.

Рассмотрим случай: $\alpha = \gamma + 1$ последовательный ординал. Тогда $R_\alpha = R_\gamma \cup \{\Phi(R_\gamma)\}$. Так как $R_\gamma \in \mathcal{L}$, то, по определению Φ , $R_\alpha \in \mathcal{L}$.

Рассмотрим случай: α предельный ординал. Тогда $R_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} R_\beta$. Так как семейство $\mathcal{R} = \{R_\beta : \beta < \alpha\}$ является цепью и $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, то из условия (1) вытекает, что $R_\alpha = \bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$.

Итак, мы доказали R_α для всех $\alpha \leq \lambda$. Так как $R_\lambda = X$, то $X \in \mathcal{L}$.

Рассмотрим общий случай, не обязательно $\emptyset \in \mathcal{L}$. Пусть $L \in \mathcal{L}$. Положим $\tilde{X} = X \setminus L$, $\tilde{\mathcal{L}} = \{M \setminus L : L \subset M \in \mathcal{L}\}$. Тогда $\emptyset \in \tilde{\mathcal{L}}$ и для $\tilde{X}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ выполняются условия (1) и (2) предложения. Тогда из доказанного случая предложения вытекает $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{L}}$. Следовательно, $X \in \mathcal{L}$. $\square$

Теорема 1.11 (Лемма Цорна). Если в частично упорядоченном множестве X для всякой цепи существует верхняя грань, то для каждого элемента $a \in X$ существует максимальный элемент множества X , больший или равный элементу a .

Доказательство. Предположим противное. Положим

$$\mathcal{L} = \{L \subset X : a \in L, L \text{ является цепью в } X\}.$$

Проверим условия предложения 1.10.

Проверим условие (1). Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ цепь множеств и $R = \bigcup \mathcal{R}$. Ясно, $a \in R$. Так как каждый элемент $\mathcal{R}$ является цепью и $\mathcal{R}$ цепь множеств, то R цепь в X .

Проверим условие (2). Пусть $L \in \mathcal{L}$. Пусть t есть верхняя грань L . Так как $a \leq t$, то t не максимальный элемент X . Пусть $b > t$. Тогда b верхняя грань L и $b \notin L$. Так как L цепь и b верхняя грань L , то $L \cup \{b\}$ тоже цепь. Так как $b \notin L$, $L \cup \{b\}$ цепь и $a \in L \subset L \cup \{b\}$, то $L \cup \{b\} \in \mathcal{L}$.

Из предложения 1.10 вытекает $X \in \mathcal{L}$. Следовательно X цепь, X л.у.м. Пусть t есть верхняя грань X . Так как X л.у.м, то t является максимумом X и $a \leq t$. Противоречие. $\square$

Цепь в ч.у.м X называется *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой цепи.

Теорема 1.12 (принцип максимума Хаусдорфа). *Любая цепь ч.у.м содержится в максимальной цепи.*

Доказательство. Множество $\mathcal{C}$ цепей в ч.у.м X образуют ч.у.м относительно порядка включения множеств. Тогда максимальная цепь это максимальный элемент в $\mathcal{C}$. Так как объединение цепи цепей является цепью, то любая цепь $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}$ имеет верхнюю грань $\bigcup \mathcal{Q}$. Тогда из леммы Цорна вытекает, что любая цепь X содержится в максимальной цепи. $\square$

Лемма Цорна и принцип максимума Хаусдорфа несложно выводятся одно из другого. Лемма Цорна, принцип максимума Хаусдорфа, теорема Цермела эквивалентны аксиоме выбора. Сформулируем еще одно полезное эквивалентное аксиоме выбора утверждение.

Следствие 1.13 (следствие леммы Цорна). *Пусть X есть множество, $\mathcal{L} \subset \text{Exp}(X)$ и если $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ цепь, то $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$. Тогда любое множество $L \in \mathcal{L}$ содержится в некотором максимальном множестве $M \in \mathcal{L}$.*

Доказательство. Для любой цепи $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ объединение $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$ является верхней гранью. Теперь следствие вытекает из леммы Цорна. $\square$

1.1.5 Мощность множества и кардиналы

Пусть X и Y множества. Множества X и Y называется равномошными, если существует биекция между X и Y . В этом случае пишем $|X| = |Y|$. Отношение равномошности является отношением эквивалентности.

Определение 1.14 (1-ый вариант, Кантор). *Мощностью $|X|$ называется класс эквивалентности относительно отношения равномошности, который содержит X : $|X| = \{Y : |X| = |Y|\}$.*

Введем отношение $\leq$ на мощностях множеств: $|X| \leq |Y|$ если существует инъективное отображение из X в Y .

Очевидно это отношение транзитивно: если $|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |Z|$, то $|X| \leq |Z|$.

Ординал τ назовем *кардиналом*, если для любого $\gamma \in \tau$ не существует биекции между γ и τ . Класс всех кардиналов обозначим Card . Для множества X обозначим

$$\text{Card}(X) = \min\{\lambda \in \text{Ord} : \lambda \text{ равномощно } X\}.$$

Очевидно, $\text{Card}(X) \in \text{Card}$.

Определение 1.15 (2-ой вариант, современный). Определим *мощность* $|X| = \text{Card}(X)$ для множества X .

По сути, это эквивалентные определения.

Из определения и свойств ординалов вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.16 (Кантора – Бернштейна). Пусть X и Y множества. Если $|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |X|$, то $|X| = |Y|$.

Обозначим

$$\text{Exp}(X) = \{M : M \subset X\}$$

множество всех подмножеств множества X . Множество

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

называется *симметрической разностью* множеств A и B . Очевидно, $A = B$ если и только если $A \triangle B = \emptyset$.

Теорема 1.17 (Кантора). Пусть X множество. Тогда $|X| < |\text{Exp}(X)|$.

Доказательство. Множество X инъективно вкладывается в $\text{Exp}(X)$, $x \mapsto \{x\}$. Следовательно $|X| \leq |\text{Exp}(X)|$. Докажем, что $|X| \neq |\text{Exp}(X)|$. Предположим противное. Тогда существует биекция $f : X \rightarrow \text{Exp}(X)$. Положим $M = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Тогда $M \notin f(X)$ так как $x \in M \triangle f(x) \neq \emptyset$ для $x \in X$. $\square$

Отметим, что $\omega \subset \text{Card}$ и $\omega \in \text{Card}$. Теорема Кантора обеспечивает, что Card неограниченно в Ord . Обозначим через Card_* все бесконечные кардиналы, $\text{Card}_* = \text{Card} \setminus \omega$. Тогда Card_* порядково изоморфно Ord , класс Card_* можно занумеровать ординалами

$$\text{Card}_* = \{\omega_\alpha : \alpha \in \text{Ord}\}.$$

Тогда $\omega = \omega_0$. Также часто обозначают $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$.

1.2 Дополнение

1.2.1 Базовые математические конструкции

Неформально опишем некоторые базовые математические конструкции, которые используют математики в своих исследованиях.

Бинарное отношение. Отношение, которое связывает два объекта. Пусть R некоторое отношение. Объекты x и y либо находятся в отношении R , либо не находятся в отношении R . Часто для отношений используются специальные символы, такие как $<, >, \sim, \in$ и тому подобные. Отношение может записываться как $R(x, y)$, но часто записываются как xRy — x и y находятся в отношении R .

Отношение может задаваться с помощью логической формулы $\mathcal{R}$ с двумя переменными: xRy если выполняется $\mathcal{R}(x, y)$.

Множество (совокупность, класс). Множество (совокупность, класс и т.п.) это объект, который состоит из элементов и однозначно ими определяется. Если M множество и x некоторый объект, то либо $x \in M$ (x принадлежит M , x элемент M), либо неверно что $x \in M$ ($x \notin M$, x не принадлежит M). Отношение $x \in M$ “ x принадлежит M ” является бинарным отношением. На всех множествах есть отношение равенства, совпадения множеств: $=$. Для множеств A и B , $A = B$ если для любого x условие $x \in A$ эквивалентно $x \in B$.

Часто множество задается с помощью логических формул с одной переменной: $M = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, $x \in M$ если и только если верно $\mathcal{P}(x)$.

Мощность множества. Два множества X и Y называются *равномощными*, если существует биекция между X и Y , записывается $|X| = |Y|$. На всех множествах отношение $|X| = |Y|$ является отношением эквивалентности. Назовем классы эквивалентности относительно этого отношения *мощностями*: $|X| = \{Y : |X| = |Y|\}$.

Упорядоченная пара, кортеж. Упорядоченная пара (a, b) это пара элементов a и b , в которой a является первым элементом, а b вторым. Две упорядоченные пары (a, b) и (c, d) совпадают, если $a = c$ и $b = d$. Кортеж длины n или n -ка $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, это упорядоченный набор $x_1, x_2, \dots, x_n$ из n элементов. Для n -ки $\vec{x}$ определен i -ый элемент x_i для $i = 1, 2, \dots, n$. Две n -ки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ совпадают, если $x_i = y_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Отображение (функция). Отображение f это соответствие, которое некоторым элементам x ставит в соответствие некоторый элемент $f(x)$. Для отображения определена область определения $\text{Dom } f = \{x : \text{определено } f(x)\}$, образ $\text{Im } f = \{f(x) : x \in \text{Dom } f\}$ и график $\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in \text{Dom } f\}$.

Некоторые функции задаются с помощью логической формулы $\mathcal{F}$ от двух переменных, для которой выполняется условие: если верно $\mathcal{F}(x, y)$ и верно $\mathcal{F}(x, z)$, то $y = z$. Функция f определяется тем, что $y = f(x)$ если $\mathcal{F}(x, y)$. Тогда $\text{Dom } f = \{x : \exists y \mathcal{F}(x, y)\}$, $\text{Im } f = \{y : \exists x \mathcal{F}(x, y)\}$, $\text{Gr } f = \{(x, y) : \mathcal{F}(x, y)\}$.

Конечные произведения множеств. Пусть X и Y множества. Определим произведение множеств $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Отметим, что $\text{Gr } f \subset \text{Dom } f \times \text{Im } f$ для функции f .

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества. Определим произведение множеств

$$\begin{aligned} X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n &= \prod_{i=1}^n X_i \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}. \end{aligned}$$

Индексируемые множества, последовательности. Индексируемое множество это тоже самое, что и отображение. Отличия семантические, упор делается на образ отображения. Пусть f есть отображение, $A = \text{Dom } f$. Отображение f можно записать как индексируемое множество $(x_\alpha : \alpha \in A)$ или $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где $x_\alpha = f(\alpha)$ для $\alpha \in A$. Образ отображения $\text{Im } f$ записывается как $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$. Множество A называется *индексным множеством*. Если понятно из контекста, какое индексное множество используется, то пишут (x_α) или $(x_\alpha)_\alpha$ вместо $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Индексируемые множества с индексным множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ называются *последовательностью*. Можно писать (x_n) вместо $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Индексируемые семейства множеств, последовательности множеств.

Индексируемое семейство, это индексируемое множество $(M_\alpha : \alpha \in A)$, такое что M_α является множеством для каждого $\alpha \in A$. Последовательность множеств (M_n) это последовательность из множеств.

Логическая формула $\mathcal{P}$ с двумя переменными определяет индексируемое семейство $(M_\alpha : \alpha \in A)$, где $M_\alpha = \{x : \mathcal{P}(\alpha, x)\}$.

Семейства множеств. Семейство множеств это множество $\mathcal{M}$, элементы которого являются множествами. Из индексируемого семейства множеств $(M_\alpha : \alpha \in A)$ можно получить семейство множеств $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$. Любое семейство можно представить таким образом: $\mathcal{M} = \{S_M : M \in \mathcal{M}\}$, где $S_M = M$.

Произведение индексируемого семейства множеств. Определим произведение индексируемого семейства множеств $(X_\alpha : \alpha \in A)$ —

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha \in A} X_\alpha &= \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\} \\ &= \{f : f \text{ есть функция, } \text{Dom } f = A, f(\alpha) \in X_\alpha \text{ для } \alpha \in A\} \\ &= \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha \text{ для } \alpha \in A\}. \end{aligned}$$

Если все X_α одинаковы, $X_\alpha = X$ для всех $\alpha \in A$, то произведение обозначается как

$$\begin{aligned} X^A &= \{f : f \text{ есть функция, } \text{Dom } f = A, \text{Im } f \subset X\} \\ &= \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X \text{ для } \alpha \in A\} \end{aligned}$$

и называется *степенью* множества X .

Объединение и пересечение (индексируемых) семейства множеств.

Пусть $(X_\alpha : \alpha \in A)$ индексируемое семейство множеств и $\mathcal{M}$ семейство множеств. Определим объединение семейств:

$$\bigcup \mathcal{M} = \{x : x \in M \text{ для некоторого } M \in \mathcal{M}\},$$

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in A\} = \{x : x \in X_\alpha \text{ для некоторого } \alpha \in A\}.$$

Определим пересечение семейств:

$$\bigcap \mathcal{M} = \{x : x \in M \text{ для всех } M \in \mathcal{M}\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap \{X_\alpha : \alpha \in A\} = \{x : x \in X_\alpha \text{ для всех } \alpha \in A\}.$$

1.2.2 Аксиомы теории множеств

Изложим аксиоматику Цермела-Френкеля теории множеств.

Изначально в аксиоматике теории множеств есть только множества, все объекты являются множествами. Потом определяются конструкции и понятия математики как множества специального вида.

Для множеств изначально есть два бинарных отношения: $=$ — равенство множеств, запись $a = b$ означает равенство, совпадение множеств a и b ; $\in$ — принадлежность, запись $a \in b$ означает что a является элементом множества b .

Отношение $=$ является отношением эквивалентности, то есть: всегда верно $x = x$; из $x = y$ следует $y = x$; из $x = y$ и $y = z$ следует $x = z$.

1.2.3 Классы и класс-отображения

Пусть $\mathcal{P}$ есть логическая формула о множествах с одной переменной. Совокупность $A = \{x : \mathcal{P}(x)\}$ называется *классом*. Выражение $x \in A$ означает, что верно $\mathcal{P}(x)$. Для классов A и B , $A = B$ означает, что $x \in A$ если и только если $x \in B$. Для класса A и множества M , $A = M$ означает, что $x \in A$ если и только если $x \in M$.

Пусть $\mathcal{F}$ есть логическая формула о множествах с двумя переменными, для которой выполняется условие: если $\mathcal{F}(x, y)$ и $\mathcal{F}(x, z)$, то $y = z$. Такая формула определяет *класс-отображение* f , для которой область определения является классом

$$\text{Dom } f = \{x : \text{верно } \mathcal{F}(x, y) \text{ для некоторого множества } y\}.$$

Для $x \in \text{Dom } f$, $f(x)$ определяется как то единственное y , для которого верно $\mathcal{F}(x, y)$. Для $A \subset \text{Dom } f$, где A либо класс, либо множество, образ $f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y : \mathcal{F}(x, y) \text{ для некоторого } x \in A\}$ является классом.

С точки зрения построения математической теории из некоторой аксиоматики, данные определения некорректны. Но удобны, в том числе для формулировки аксиом.

Любое рассуждение, к котором присутствуют классы и класс-функции, можно преобразовать в рассуждения без этих понятий. Для этого места в рассуждениях, в которых встречаются классы, нужно заменить логические

формулы, с помощью которых эти классы определяются. Например, для класса A , выражение “ $x \in A$ ” заменяется на “выполняется $\mathcal{P}(x)$ ”.

Для класса $A = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, если существует множество M , для которого $A = M$ (“ $A = M$ ” $\equiv$ “для всех x , выполняется $\mathcal{P}(x)$ если и только если $x \in M$ ”), то тогда говорят, что класс A является множеством. Классы, которые не являются множествами, называются *собственными* классами.

Значительная часть аксиом теории множеств заключаются в том, что те или иные классы являются множествами.

1.2.4 Аксиомы теории множеств

Аксиома 1 (объемности). Пусть x и y множества. Тогда $x = y$ в том и только том случае, когда $z \in x$ эквивалентно $z \in y$ для любого множества z .

Эта аксиома означает, что если у двух множеств одинаковые элементы, то эти множества совпадают. Можно переформулировать аксиому: если $x \subset y$ и $y \subset x$, то $x = y$.

Аксиома эквивалентна и такому утверждению: если x, y множества, z класс, $x = z$ и $y = z$, то $x = y$.

Аксиома 2 (существования). Класс $\emptyset = \{x : x \neq x\}$ является множеством.

То есть существует пустое множество $\emptyset$.

Аксиома 3 (пары). Пусть x и y множества. Тогда класс $\{x, y\} = \{z : z = x \vee z = y\}$ является множеством.

Из этой аксиомы вытекает, что $\{x\} = \{x, x\}$ является множеством.

В теории множеств, элементами множеств являются тоже множествами, поэтому любое множество также является семейством множеств и определен класс $\bigcup x = \{z : z \in y \text{ для некоторого } y \in x\}$ для любого множества x .

Аксиома 4 (объединения). Пусть x множество. Тогда класс $\bigcup x$ является множеством.

Из последних двух аксиом вытекает, что $x \cup y$ и $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ являются множествами. Из перечисленных аксиом вытекает, что из пустого множества можно строить (конечные) множества вида

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Аксиома 5 (бесконечности). Существует множество x , такое что $\emptyset \in x$ и $y \cup \{y\} \in x$ для $y \in x$.

Множество x содержит $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ... и должно быть бесконечным. То есть, существуют бесконечные множества.

Аксиома 6 (множество подмножеств). Пусть x множество. Тогда класс

$$\text{Exp}(x) = \{y : y \subset x\}$$

является множеством.

Множество $\text{Exp}(x)$ называется множеством подмножеств множества x .

Следующие две аксиомы показывают, как логические формулы, то есть классы и классы-отображения, используются для конструирования множеств.

Аксиома 7 (выделения). Пусть x множество и A есть класс. Тогда класс $x \cap A = \{y : y \in x \wedge y \in A\}$ является множеством.

Аксиома 8 (подстановки). Пусть f есть класс-отображение и $M \subset \text{Dom } f$ есть множество. Тогда класс $f(M) = \{f(y) : y \in M\}$ является множеством.

Аксиома 9 (регулярности). Если $x \neq \emptyset$, то $x \cap y = \emptyset$ для некоторого $y \in x$.

Из этой аксиомы вытекает, что $x \notin x$ для любого множества x , для доказательства нужно применить аксиому регулярности к множеству $\{x\}$.

Аксиома 10 (выбора). Пусть x такое множество, что $y \neq \emptyset$ для $y \in x$ и $y \cap z = \emptyset$ для различных $y, z \in x$. Тогда существует множество s , такое что $s \cap y$ одноточечное множество для всех $y \in x$.

1.2.5 Базовые математические конструкции в теории множеств

Опишем некоторые базовые математические конструкции, которые определяются в теории множеств с аксиоматикой Цермела-Френкеля.

Бинарное отношение. Отношения на множестве X , подмножество $R \subset X \times X$ квадрата, $xRy \Leftarrow (x, y) \in R$. Отношение на классе задается с помощью логической формулы $\mathcal{R}$ с двумя переменными: xRy если выполняется $\mathcal{R}(x, y)$.

Множество (совокупность, класс). Классы задается с помощью логических формул с одной переменной: $M = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, $x \in M$ если и только если верно $\mathcal{P}(x)$. Некоторые классы являются множествами. Множества аксиоматизируются в ZF .

Мощность множества. $|X| = \text{Card}X$.

Упорядоченная пара, кортеж. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ — определение Куратовского, также используется определение $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$, для его использования нужна аксиома регулярности.

3-ка: $(x, y, z) = ((x, y), z)$

n -ка: $(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$.

Отображение (функция). Отображение множеств $f : X \rightarrow Y$ отождествляется со своим графиком: $f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Класс-отображения задаются с помощью логической формулы $\mathcal{F}$ от двух переменных, для которой выполняется условие: если верно $\mathcal{F}(x, y)$ и верно $\mathcal{F}(x, z)$, то $y = z$. Функция f определяется тем, что $y = f(x)$ если $\mathcal{F}(x, y)$. Тогда $\text{Dom } f = \{x : \exists y \mathcal{F}(x, y)\}$, $\text{Im } f = \{y : \exists x \mathcal{F}(x, y)\}$, $\text{Gr } f = \{(x, y) : \mathcal{F}(x, y)\}$.

Конечные произведения множеств. Пусть X и Y множества (или классы). Определим произведение множеств $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества. Определим произведение множеств

$$\begin{aligned} X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n &= \prod_{i=1}^n X_i \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$.

1.2.6 Соглашения об обозначениях

Задание множества. Мы используем выражение $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ для обозначения множества (или класса), который состоит из элементов, для которых выполняется условие $\mathcal{P}(x)$. В литературе встречается также запись $\{x | \mathcal{P}(x)\}$. Например, в статье русской википедии о множествах встречаются обе нотации.

Произведения множеств. Если посмотреть на определение n -ки и конечных произведений в разделе 1.2.5, то $(a, b, c) = ((a, b), c)$ и $A \times B \times C = (A \times B) \times C$. Но $(a, b, c) \neq (a, (b, c))$ и $A \times B \times C \neq A \times (B \times C)$. Определение конечных произведений множеств и произведение индексированного семейства множеств кардинально отличаются, поэтому, в соответствие с определениями из разделов 1.2.1 и 1.2.5,

$$\prod_{i=1}^3 X_i = X_1 \times X_2 \times X_3 \neq \prod \{X_i : i = 1, 2, \dots, n\} = \prod \{X_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Но между указанными неравными множествами есть естественная биекция. Мы, как принято в математике, будем отождествлять такие множества.

Множества и индексированные множества, семейства множеств и индексированные семейства множеств. В соответствии с разделом 1.2.1, $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ означает множество (семейство множеств), а $(x_\alpha : \alpha \in A) = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ индексированное множество (семейство множеств).

В литературе запись $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ и, особенно, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, часто используется для обозначения индексированного множества (семейства) $(x_\alpha : \alpha \in A)$. Но значение такой записи зависит от контекста. Например, в выражении $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \cup Y \cap \{x_1, x_2\}$ подразумевается множество, а не индексированное множество.

Выражения вида $(x_\alpha : \alpha \in A) = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ используются для обозначения последовательностей, обыкновенных (A — натуральные числа) или трансфинитных (A — ординал) и также для обозначения произведения элементов произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Чтобы не далеко отходить от общепринятых обозначений, мы также будем использовать запись $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ для обозначения индексированного множества (семейства). Если важно, будем явно писать “индексированное множество (или семейство) $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ ”.

В литературе иногда под “семейством” подразумевают индексированное семейство или множество, а семейство множеств называют системой множеств. Для нас семейство это семейство множеств — множество, элементами которого являются множества или даже другие семейства.

Счетные множества. В литературе под счетным множеством подразумевают либо множество A для которого $|A| \leq \omega$ либо множество A , для которого $|A| = \omega$. Мы счетными множествами будем называть множества с $|A| = \omega$, а множества с $|A| \leq \omega$ будем называть не более чем счетными.

Существуют устоявшиеся выражения типа “счетная база” или “счетное всюду плотное множество” в которых слово счетное используется в первом смысле, $|A| \leq \omega$. Возможно, мы тоже будем использовать такие вольности речи.

1.3 Задачи

1.3.1 Классы и аксиомы ZFC

Задача 1.1. Пусть X и Y классы. Показать, что $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \Delta Y$, $X \setminus Y$, $X \times Y$ — классы.

Задача 1.2. Пусть X вполне упорядоченный собственный класс, то он порядково изоморфен Ord и этот изоморфизм единственный.

1.3.2 Аксиомы ZFC

Задача 1.3. Придумать определение конечного ординала и конечного множества.

Задача 1.4. Показать, что $\omega = \{\lambda : \lambda \text{ конечный ординал}\}$ это множество. Какие аксиомы ZFC используются?

Задача 1.5. Показать, что $\omega_1 = \{\lambda \in \text{Ord} : |\lambda| \leq \omega\}$ это множество. Какие аксиомы ZFC используются?

Задача 1.6. Пусть $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Доказать что $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$. Какие аксиомы ZFC используются?

Задача 1.7. Пусть $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$. Доказать что $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$. Какие аксиомы ZFC используются?

Задача 1.8. Доказать, $X \times Y$ множество для множеств X и Y . Какие аксиомы ZFC используются?

1.3.3 Кардиналы и мощности

Задача 1.9. Доказать $\omega \in \text{Card}$.

Задача 1.10. Доказать $\omega \in \text{Card}$.

Задача 1.11. Доказать что каждый бесконечный кардинал является предельным ординалом.

Задача 1.12. Доказать что если $\mathcal{A} \subset \text{Card}$ является множеством, то $\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \in \text{Card}$.

Задача 1.13. Пусть λ предельный ординал. Показать, что $\lambda \times \lambda$ можно вполне упорядочить таким образом, что для каждого $(\alpha, \beta) \in \lambda \times \lambda$ существует $\gamma < \lambda$, такое что

$$\{(x, y) \in \lambda \times \lambda : (x, y) < (\alpha, \beta)\} \subset \gamma \times \gamma.$$

Задача 1.14. Пусть λ бесконечный кардинал. Показать, что $|\lambda \times \lambda| = \lambda$. Другими словами, $|X \times X| = |X|$ для бесконечного X .

Задача 1.15. Докажите, что любое бесконечное множество X равномощно множеству $[X]^{<\omega} = \{M \subset X : |M| < \omega\}$ всех его конечных подмножеств.

Задача 1.16. Докажите теорему Кёнига: если A — произвольное множество и для каждого $\alpha \in A$, X_α и Y_α — множества, удовлетворяющие условию $|X_\alpha| < |Y_\alpha|$, то

$$\left| \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right| < \left| \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \right|.$$

Заметьте, что из этой теоремы немедленно вытекает теорема Кантора: $|X| < |\text{Exp}(X)|$.

1.3.4 Аксиома выбора и ее следствия

Задача 1.17 (базисе Гамеля). Пусть V векторное пространство, $\mathcal{C}$ семейство линейно независимых подмножеств. Доказать: (1) любая цепь в $\mathcal{C}$ имеет верхнюю грань; (2) множество $B \in \mathcal{C}$ максимально если и только если B базис в V ; (3) любое линейно независимое подмножество $E \subset V$ содержится в некотором базисе.

Задача 1.18 (Теорема Шпильрайна). Пусть X множество, $\mathcal{C} \subset \text{Exp}(X \times X)$ множество частичных порядков на X . Доказать: (1) любая цепь в $\mathcal{C}$ имеет верхнюю грань; (2) множество $L \in \mathcal{C}$ максимально если и только если L является линейным порядком; (3) любой частичный порядок на X продолжается до линейного порядка,

1.3.5 Кофинальность

Если X частично упорядоченное множество, то $Y \subset X$ называется *кофинальным*, если для каждого $x \in X$ существует $y \in Y$, такое что $x \leq y$. Кардинал

$$\text{cf } X = \min\{|Y| : Y \subset X, YX\}$$

называется *кофинальностью* X .

Кардинал τ называется *регулярным*, если $\tau = \text{cf } \tau$.

Задача 1.19. Доказать, кофинальность любого ординала регулярна.

Задача 1.20. Доказать, что $\tau < \text{cf } 2^\tau$ для бесконечного кардинала.

Для кардинала τ обозначим

$$\tau^+ = \min\{\lambda \in \text{Card} : \tau < \lambda\}.$$

Задача 1.21. Доказать, что τ^+ регулярно для бесконечного кардинала τ .

1.3.6 Разное

Задача 1.22. Докажите, что множества $\{0, 1\} \times \omega$ и $\omega \times \{0, 1\}$ с лексикографическим порядком не порядково изоморфны.

Задача 1.23. Пусть R — отношение эквивалентности на X и $Y \subset X$. Докажите, что ограничение отношения R на Y есть отношение эквивалентности.

Задача 1.24. Докажите, что единственным порядковым изоморфизмом на себя вполне упорядоченного множества является тождественное отображение.

Задача 1.25. Найдите мощность всех конечных подмножеств бесконечного множества X .

Задача 1.26. Верно ли, что любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?

Задача 1.27. Докажите, что линейно упорядоченное множество A вполне упорядочено в том и только том случае, если его любое счётное подмножество вполне упорядочено.

Задача 1.28. (а) Какая мощность множества всех порядковых типов конечного множества? (б) Какая мощность множества всех порядковых типов счётного множества?

Глава 2

Топологические и метрические пространства

Темы в этой главе

Тема 3. Топологические пространства. Гомеоморфизмы, топологические свойства. Базы, предбазы, первая и вторая аксиома счетности.

Тема 4. Метрические и метризуемые пространства. База метризуемого пространства, подпространства.

Тема 5. Метризуемые сепарабельные пространства.

Тема 6. Методы введения топологии. Линейно упорядоченные пространства. Примеры топологических пространств.

2.1 Топологические и метрические пространства, топологические свойства

2.1.1 Топологические пространства

Пусть X множество и $\mathcal{T}$ семейство подмножеств множества X . Пара $(X, \mathcal{T})$ называется *топологическим пространством*, если выполняются условия

(Top_1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(Top_2) если $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{T}$;

(Top_3) если $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$ конечное семейство, то $\bigcap \mathcal{I} \in \mathcal{T}$.

Класс всех топологических пространств обозначим через Top .

Отметим, условие (Top_3) можно заменить на условие: если $U, V \in \mathcal{T}$, то $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Семейство $\mathcal{T}$ называется *топологией* пространства X . Элементы топологии $\mathcal{T}$ называются *открытыми множествами*.

Дополнения до открытых множеств называются *замкнутыми* множествами. Для семейства $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{T}\}$ всех замкнутых подмножеств пространства X выполняются следующие условия

(cISets_1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$;

(CISets₂) если $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$, то $\bigcap \mathcal{Q} \in \mathcal{F}$;

(CISets₃) если $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ конечное семейство, то $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{F}$.

Множества, которые одновременно открытые и замкнутые называются *открыто-замкнутыми* множествами.

Пусть $x \in X$. Множество $U \subset X$ называется *открытой окрестностью* точки x , если $x \in U$ и U открытое множество. Множество $S \subset X$ называется *окрестностью* точки x , если $x \in S$ и существует открытая окрестность U точки x , для которой $x \in U \subset S$.

Часто множество X называют топологическим пространством, если из контекста ясно какая топология на X подразумевается. Тогда говорят “ U открытое подмножество X ” для того чтобы обозначить элемент топологии X . Если надо обозначить всю топологию X , то используют фразы подобные “Пусть $\mathcal{T}$ есть топология X ”.

Пусть $Y \subset X$. Семейство $\mathcal{R} = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ удовлетворяет условиям (Тор₁)–(Тор₃). Действительно, условие (Тор₁) выполнено, так как $\emptyset = Y \cap \emptyset$ и $Y = Y \cap X$, а из равенств

$$\bigcup_{U \in \mathcal{M}} Y \cap U = Y \cap \bigcup \mathcal{M}, \quad \bigcap_{U \in \mathcal{I}} Y \cap U = Y \cap \bigcap \mathcal{I}$$

для $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ и конечного $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$, вытекает (Тор₂) и (Тор₃). Пространство $(Y, \mathcal{R})$ называют *подпространством* пространства X , а топологию $\mathcal{R}$ называют *индуцированной топологией* или *топологией подпространства*.

2.1.2 Гомеоморфизмы, топологические свойства

Отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *непрерывным отображением*, если $f^{-1}(U)$ открытое в X множество для любого открытого множества $U \subset Y$ пространства Y .

Отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f биекция и отображения f и $f^{-1} : Y \rightarrow X$ непрерывны.

Предложение 2.1. Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$ биекция. Следующие условия эквивалентны:

- (1) f является гомеоморфизмом;
- (2) $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ для $U \in \mathcal{T}_Y$ и $f(V) \in \mathcal{T}_Y$ для $V \in \mathcal{T}_X$;
- (3) отображение

$$\tilde{f} : \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}_Y, V \mapsto f(V)$$

является биекцией.

Доказательство. Условие (2) эквивалентно тому, что f и f^{-1} непрерывные отображения. Импликация (2) $\Leftrightarrow$ (3) очевидна. $\square$

Из предложения 2.1 (1) $\Leftrightarrow$ (3) вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2. Пусть X , Y и Z пространства. Тогда

- (1) тождественное отображение $\text{id}_X : X \rightarrow X$ является гомеоморфизмом;
- (2) если $f : X \rightarrow Y$ гомеоморфизм, то обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$ является гомеоморфизмом;
- (3) если $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ гомеоморфизмы, то композиция $g \circ f : X \rightarrow Z$ является гомеоморфизмом.

Пространства X и Y называются *гомеоморфными пространствами*, если существует гомеоморфизм из X в Y . Из предложения 2.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Отношение “пространство X гомеоморфно пространству Y ” является отношением эквивалентности на классе Top всех топологических пространств.*

Свойство $\mathcal{P}(X)$ пространства X называется *топологическим свойством*, если из того, что выполняется $\mathcal{P}(X)$ для пространства X и пространство X гомеоморфно пространству Y вытекает, что выполняется $\mathcal{P}(Y)$ для пространства Y .

Одно из главных направлений исследований в топологии, это изучение топологических свойств топологических пространств.

2.1.3 Базы, предбазы, первая и вторая аксиома счетности

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Семейство открытых множеств $\mathcal{B}$ называется *базой* пространства X , если выполняется условие:

- (тв) для любого открытого множества $U \in \mathcal{T}$ существует семейство $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ элементов базы $\mathcal{B}$, такое что $\bigcup \mathcal{U} = U$.

Это условие можно также сформулировать: $U = \bigcup \{V \in \mathcal{B} : V \subset U\}$ для $U \in \mathcal{T}$. Также используются такая эквивалентная формулировка:

- (тв*) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности S точки x существует открытая окрестность $U \in \mathcal{B}$ из базы $\mathcal{B}$ точки x , такая что $x \in U \subset S$.

Семейство подмножеств γ множества X называется *покрытием* множества X , если $\bigcup \gamma = X$.

Для базы $\mathcal{B}$ выполняются условия:

- (тв₁) $\mathcal{B}$ покрытие X ;
- (тв₂) если $x \in X$, $U, V \in \mathcal{B}$ и $x \in U \cap V$, то $x \in W \subset U \cap V$ для некоторого $W \in \mathcal{B}$.

Если для пространства X существует не более чем счетная база топологического пространства X , то говорят, что *пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности* или *пространство X со счетной базой*.

При гомеоморфизме $f : X \rightarrow Y$ база $\mathcal{B}$ пространства X переходит в базу $\mathcal{D} = \{f(U) : U \in \mathcal{B}\}$ пространства Y . Если $|\mathcal{B}| \leq \omega$, то $|\mathcal{D}| \leq \omega$. Следовательно, вторая аксиома счетности является топологическим свойством.

Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$. Семейство открытых множеств $\mathcal{P}$ называется *предбазой* пространства X , если выполняется условие:

(трв) всевозможные конечные пересечения $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_n$, $W_i \in \mathcal{P}$ для $i = 1, 2, \dots, n$ элементов $\mathcal{P}$ образуют базу пространства X .

Это условие эквивалентно: семейство $\{\bigcap \mu : \mu \subset \mathcal{P}, |\mu| < \omega\}$ является базой пространства X . Еще одно эквивалентное условие:

(трв*) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности S точки x существует конечное семейство $\mu \subset \mathcal{P}$, такое что $x \in \bigcap \mu \subset S$.

Для предбазы $\mathcal{P}$ выполняются условие:

(трв₁) $\mathcal{P}$ покрытие X .

Пусть $x \in X$. Семейство открытых окрестностей $\mathcal{B}_x$ точки x называется базой в точке x , если для любой окрестности W точки x существует $U \in \mathcal{B}_x$, такое что $x \in U \subset W$.

Если для пространства X и точки $x \in X$ существует не более чем счетная база в точке x топологического пространства X , то говорят, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в точке x . Если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в каждой точке $x \in X$, то говорят, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

При гомеоморфизме $f : X \rightarrow Y$ база $\mathcal{B}_x$ пространства X в точке x переходит в базу $\mathcal{D}_{f(x)} = \{f(U) : U \in \mathcal{B}_x\}$ пространства Y . Если $|\mathcal{B}_x| \leq \omega$, то $|\mathcal{D}_{f(x)}| \leq \omega$. Следовательно, первая аксиома счетности является топологическим свойством.

Часто, когда говорят о не более чем счетных множествах и семействах, говорят “счетный” вместо “не более чем счетный”. Особенно если говорят о счетных базах, обычно подразумевают не более чем счетные базы.

2.1.4 Топологические свойства пространств, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, I

Пусть X есть топологическое пространство.

Подмножество $M \subset X$ называется *дискретным*, если подпространство M дискретно. Подмножество M дискретно, если только если для любого $x \in M$ существует окрестность U точки x , для которой $U \cap M = \{x\}$. Подмножество M дискретно и замкнуто в X , если только если для любого $x \in X$ существует окрестность U точки x , для которой $|U \cap M| \leq 1$.

Множество $D \subset X$ называется *всюду плотным* в X множеством, если $D \cap U \neq \emptyset$ для любого непустого открытого множества $U \subset X$.

Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если в X существует всюду плотное не более чем счетное подмножество.

Предложение 2.4. Пусть X пространство со счетной базой и $Y \subset X$. Тогда подпространство Y со счетной базой.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X . Тогда $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ является счетной базой Y . $\square$

Предложение 2.5. Пусть X дискретное пространство со счетной базой. Тогда $|X| \leq \omega$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X . Так как $\{x\}$ открыто для $x \in X$, то $x \in U \subset \{x\}$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$. Тогда $\{x\} = U \in \mathcal{B}$. Следовательно, $|X| \leq |\mathcal{B}| \leq \omega$. $\square$

Из предложений 2.4 и 2.5 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.6. Пусть X пространство со счетной базой и $M \subset X$ дискретное подмножество. Тогда $|M| \leq \omega$.

Предложение 2.7. Пусть X пространство со счетной базой. Тогда X сепарабельное пространство.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ есть счетная база X состоящая из непустых множеств. Для каждого $V \in \mathcal{B}$ зафиксируем $x_V \in U$. Положим $D = \{x_V : V \in \mathcal{B}\}$. Тогда $|D| \leq |\mathcal{B}| \leq \omega$. Покажем, что D всюду плотно в X . Пусть U открытое непустое подмножество X . Так как $\mathcal{B}$ база, то $V \subset U$ для некоторого $V \in \mathcal{B}$. Тогда $x_V \in D \cap U \neq \emptyset$. $\square$

2.1.5 Метрические и метризуемые пространства, I

Метрическое пространство есть пара (X, ρ) , состоящая из множества X и функции ρ , определенной на множестве $X \times X$, удовлетворяющей следующим условиям:

(Metr₀) если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$;

(Metr₁) $\rho(x, x) = 0$;

(Metr₂) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(Metr₃) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Функция ρ называется *метрикой*. Метрика неотрицательна, так как $0 = \rho(x, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y)$.

Обозначим

$$B_\rho(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

открытый шар радиуса r в точке x . Определим топологию $\mathcal{T}_\rho$ на множестве X : $U \in \mathcal{T}_\rho$ если

(MT) для каждого $x \in U$ существует $\varepsilon > 0$, такое что $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$.

Утверждение 2.8. Семейство $\mathcal{T}_\rho$ является топологией.

Доказательство. Проверим (top₁). Для $\emptyset$ выполняется (MT). Если $x \in X$, то $B_\rho(x, 1) \subset X$. Следовательно для X выполняется (MT).

Проверим (top₂). Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}_\rho$ и $U = \bigcup \mathcal{M}$. Если $x \in U$, то $x \in V \subset U$ для некоторого $V \in \mathcal{M}$ и существует $\varepsilon > 0$, для которого $x \in B_\rho(x, \varepsilon) \subset V \subset U$. Следовательно для U выполняется (MT).

Проверим (top₃). Пусть $\mathcal{I} = \{V_1, V_2, \dots, V_n\} \subset \mathcal{T}_\rho$ конечное семейство и $U = \bigcap \mathcal{I}$. Если $x \in U$, то для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ существует $\varepsilon_i > 0$, такое что $B_\rho(x, \varepsilon_i) \subset V_i$. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$ для $\varepsilon = \min \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Следовательно для U выполняется (MT). $\square$

Топология $\mathcal{T}_\rho$ на множестве X называется *топологией, индуцированной метрикой ρ* или *топологией метрического пространства (X, ρ)* .

Мы будем говорить о метрическом пространстве (X, ρ) также как о топологическом пространстве, подразумевая топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_\rho)$. Некоторые топологические свойства формулируются также в терминах метрического пространства. Тогда эквивалентность метрических и топологических определений надо доказывать.

Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется *метризуемым пространством*, если существует метрика ρ на X , для которой топология $\mathcal{T}_\rho$, индуцированная метрикой ρ , совпадают с топологией $\mathcal{T}$.

Две метрики ρ и η на множестве X называются *эквивалентными метриками*, если индуцированные метриками топологии $\mathcal{T}_\rho$ и $\mathcal{T}_\eta$ совпадают.

Утверждение 2.9. *Открытый шар $B_\rho(x, \varepsilon)$ является открытой окрестностью точки $x \in X$ для $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Из (Met_1) вытекает $x \in B_\rho(x, \varepsilon)$. Докажем $B_\rho(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_\rho$. Пусть $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$. Тогда $\rho(x, y) < \varepsilon$. Положим $\delta = \varepsilon - \rho(x, y)$. Из (Met_2) и (Met_3) вытекает $B_\rho(y, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$. $\square$

Из утверждения 2.9 и определения топологии метрического пространства вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.10. *Семейство $\{B_\rho(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ является базой метрического пространства (X, ρ) .*

Утверждение 2.11. *Пусть $x \in X$ и $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0. Тогда семейство $\{B_\rho(x, \varepsilon_n) : n \in \omega\}$ является базой в точке x .*

Доказательство. Пусть $x \in U \in \mathcal{T}_\rho$. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. Так как $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ сходится к 0, то $\varepsilon_n < \varepsilon$ для некоторого $n \in \omega$. Следовательно $x \in B_\rho(x, \varepsilon_n) \subset U$. $\square$

Из утверждения 2.11 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.12. *Метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности.*

Пусть $Y \subset X$ и $\eta = \rho|_{Y \times Y}$ есть ограничение функции ρ на $Y \times Y$. Тогда η является метрикой на Y , которая называется *ограничением метрики ρ на Y* . Метрическое пространство (Y, η) называется *метрическим подпространством*.

Предложение 2.13. *Пусть (X, ρ) метрическое пространство, $Y \subset X$ и η есть ограничение метрики ρ на Y . Пусть $(Y, \mathcal{Q})$ есть топологическое подпространство топологического пространства $(X, \mathcal{T}_\rho)$. Тогда $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_\eta$, то есть топология на $Y \subset X$ подпространства X с топологией метрического пространства совпадает с топологией метрического пространства на Y с метрикой на Y , которая является ограничением метрики X на Y .*

Доказательство. По определению $\mathcal{Q} = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}_\rho\}$.

Докажем $\mathcal{T}_\eta \subset \mathcal{Q}$. Пусть $V \in \mathcal{T}_\eta$. Для каждого $x \in V$ существует $\varepsilon_x > 0$, такое что $B_\eta(x, \varepsilon_x) \subset V$. Положим $U = \bigcup \{x \in V : B_\rho(x, \varepsilon_x)\}$. Так $B_\rho(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_\rho$ для $x \in X$ (утверждения 2.9), то $U \in \mathcal{T}_\rho$. Так как $B_\eta(x, \varepsilon) = Y \cap B_\rho(x, \varepsilon)$ для $x \in Y$, то $V = Y \cap U \in \mathcal{Q}$.

Докажем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{T}_\eta$. Пусть $V \in \mathcal{Q}$. Тогда $V = Y \cap U$ для некоторого $U \in \mathcal{T}_\rho$. Пусть $x \in V$. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Так как $B_\eta(x, \varepsilon) = Y \cap B_\rho(x, \varepsilon)$, то $B_\eta(x, \varepsilon) \subset V$ и для V выполняется (мт). $\square$

Теорема 2.14. Пусть X метризуемое пространство. Тогда подпространство $Y \subset X$ метризуемо.

Доказательство. Пусть ρ есть метрика на X , которая индуцирует топологию X . Пусть η есть ограничение метрики ρ на Y . Из предложения 2.13 вытекает, что топология на Y , индуцированная метрикой η , совпадает с топологией подпространства. Следовательно, пространство Y метризуемо. $\square$

Пусть $\varepsilon > 0$. Подмножество $M \subset X$ называется ε -сетью, если для любого $x \in X$ существует $y \in M$, такое что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Предложение 2.15. Пусть (X, ρ) метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Существует ε -сеть $M \subset X$, для которой выполняется условие: если $x, y \in M$ и $x \neq y$, то $\rho(x, y) \geq \varepsilon$. ε -Сеть M является дискретным замкнутым подмножеством X .

Доказательство. Обозначим

$$\mathcal{L} = \{L \subset X : \text{если } x, y \in L \text{ и } x \neq y, \text{ то } \rho(x, y) \geq \varepsilon\}.$$

Покажем, что если $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ есть цепь, то $R = \bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$. Пусть $x, y \in R$ и $x \neq y$. Существуют $A, B \in \mathcal{R}$, такие что $x \in A$ и $y \in B$. Пусть $C = A \cup B$. Так как $\mathcal{R}$ цепь, то либо $C = A$ либо $C = B$, в любом случае $C \in \mathcal{R}$. Тогда $x, y \in C \in \mathcal{L}$ и $x \neq y$. Следовательно $\rho(x, y) \geq \varepsilon$.

Из следствия леммы Цорна (следствие 1.13) вытекает, что существует максимальный элемент $M \in \mathcal{L}$. Покажем, что M является ε -сетью. Предположим противное. Тогда существует $p \in X$, такой что $\rho(p, x) \geq \varepsilon$ для всех $x \in M$. Тогда $M^+ = M \cup \{p\} \in \mathcal{L}$. Противоречие с максимальнойностью M в $\mathcal{L}$.

Так как $B_\rho(x, \varepsilon) \cap M = \{x\}$ для $x \in M$, то M дискретное подмножество X . Покажем, что M замкнуто в X . Множество M замкнуто, если множество $W = X \setminus M$ открыто в X . Пусть $p \in W$. Так как M ε -сеть и $p \notin M$, то $0 < \rho(p, x) < \varepsilon$ для некоторого $x \in M$. Тогда $B_\rho(p, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$ и $x \notin B_\rho(p, \delta)$, где $\delta = \min(\rho(p, x), \varepsilon - \rho(p, x))$. Так как $B_\rho(p, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon) \cap M = \{x\}$, то $B_\rho(p, \delta) \cap M = \emptyset$ и $B_\rho(p, \delta) \subset W$. $\square$

Предложение 2.16. Пусть (X, ρ) метрическое пространство, множество M всюду плотно в X и $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0. Тогда семейство множеств

$$\mathcal{B} = \{B_\rho(x, \varepsilon_n) : x \in M, n \in \omega\}$$

является базой пространства X .

Доказательство. Пусть $x \in X$ и U окрестность точки x . Существует $\varepsilon > 0$, для которого $x \in B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. Так как $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ сходится к 0, то $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$ для некоторого $n \in \omega$. Так как M всюду плотно в X , то существует $y \in M \cap B_\rho(x, \varepsilon_n)$. Тогда $x \in B_\rho(y, \varepsilon_n) \in \mathcal{B}$ и $B_\rho(y, \varepsilon_n) \subset B_\rho(x, 2\varepsilon_n) \subset B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. $\square$

Теорема 2.17. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X удовлетворяет второй аксиоме счетности;
- (2) X сепарабельно;
- (3) любое дискретное замкнутое подмножество X не более чем счетно.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 2.7. Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) вытекает из предложения 2.6.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $M = \{x_m : m \in \omega\} \subset X$ не более чем счетное плотное подмножество X . Положим $\mathcal{B} = \{B_\rho(x_m, \frac{1}{2^n}) : m, n \in \omega\}$. Тогда $|\mathcal{B}| \leq \omega$ и, в силу предложения 2.16, $\mathcal{B}$ является базой X .

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $n \in \omega$. В силу предложения 2.12, существует дискретная и замкнутая $\frac{1}{2^n}$ -сеть $M_n \subset X$. Из (3) вытекает $|M_n| \leq \omega$. Положим $M = \bigcup_{n \in \omega} M_n$. Тогда $|M| \leq \omega$. Покажем, что M всюду плотно в X . Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $x \in U$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем $n \in \omega$, такое что $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Существует $y \in M_n$, такое что $\rho(x, y) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Тогда $y \in B_\rho(x, \varepsilon) \cap M \subset U \cap M \neq \emptyset$. $\square$

2.1.6 Методы введения топологий, I

Пусть X — произвольное множество; под введением топологии на X мы понимаем выбор семейства $\mathcal{T}$ подмножеств X , удовлетворяющих условиям (Тор₁)–(Тор₃), т. е. такого семейства $\mathcal{T}$, что пара $(X, \mathcal{T})$ есть топологическое пространство. Часто бывает удобнее давать косвенное описание семейства открытых множеств. Мы приведем несколько методов введения топологий, которые заключаются в том, что определяется предбаза, или определяется база, или система окрестностей.

Иногда топологию $\mathcal{T}$ можно задать в явном виде.

Пространство X называется *дискретным пространством*, если $\mathcal{T} = \text{Exp}(X)$. Дискретные пространства характеризуются тем, что каждая точка¹ $\{x\} \subset X$ является открытым множеством.

Пространство X называется *антидискретным пространством*, если $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Пример 2.18 (связное двоеточие). Пусть $D = \{0, 1\}$ и $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Для семейства $\mathcal{T}$ выполняются условия (Тор₁)–(Тор₃) на D . Пространство $(D, \mathcal{T})$ называется *связным двоеточием* или *пространством Серпинского*.

Еще бывают *дискретное двоеточие* — двоеточие с дискретной топологией и *антидискретное двоеточие* — двоеточие с антидискретной топологией. Любое пространство из двух точек гомеоморфно одному из этих трех двоеточий.

¹Точнее, каждое одноточечное подмножество.

Пример 2.19 (связная стрелка). Пусть $\mathcal{B} = \{(x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \mathcal{B}$. Для семейства $\mathcal{T}$ выполняются условия (Top_1) – (Top_3) на $\mathbb{R}$. Пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ называется *связной стрелкой*. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии связной стрелки.

Любое двухточечное подпространство связной стрелки гомеоморфно связному двоеточию.

Пример 2.20 (натуральные числа с кофинитной топологией). Пусть $\mathcal{B} = \{U \subset \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus U| < \omega\}$ и $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{B}$. Для семейства $\mathcal{T}$ выполняются условия (Top_1) – (Top_3) на $\mathbb{R}$. Топология $\mathcal{T}$ называется *кофинитной топологией*. Пространство $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ называется *натуральными числами с кофинитной топологией*. Семейство $\mathcal{B}$ является базой.

Пусть $\mathcal{B}$ есть семейство подмножеств X , для которой выполняются условия (TV_1) и (TV_2) .

Утверждение 2.21. Для семейства $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mu : \mu \subset \mathcal{B}\}$ выполняются условия (Top_1) – (Top_3) и $\mathcal{B}$ является базой топологического пространства $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$.

Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств X , для которых выполняется условия (TV_1) и (TV_2) называется *базой топологии* (на множестве X). Топология $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ называется *топологией, порожденная базой $\mathcal{B}$* .

Мы ввели два понятия, которые различны, но названия звучат похоже. Первое: база топологического пространства (некоторого конкретного пространства), база топологии (некоторой топологии конкретного топологического пространства). Второе: база топологии (на некотором множестве).

Пусть $\mathcal{P}$ есть семейство подмножеств X , для которой выполняются условия (TRV_1) , то есть $\mathcal{P}$ покрытие X .

Утверждение 2.22. Для семейства $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \{\bigcap \mu : \mu \subset \mathcal{P}, |\mu| < \omega\}$ выполняются условия (TV_1) и (TV_2) . Для семейства $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \{\bigcup \mu : \mu \subset \mathcal{B}_{\mathcal{P}}\}$ выполняются условия (Top_1) – (Top_3) , $\mathcal{P}$ является предбазой топологического пространства $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ и $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ является базой $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$.

Семейство $\mathcal{P}$ подмножеств X , для которых выполняется условия (TRV_1) (то есть $\mathcal{P}$ покрытие X) называется *предбазой топологии* (на множестве X). Топология $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ называется *топологией, порожденная предбазой $\mathcal{P}$* .

Мы ввели два понятия, которые различны, но названия звучат похоже. Первое: предбаза топологического пространства (некоторого конкретного пространства), предбаза топологии (некоторой топологии конкретного топологического пространства). Второе: предбаза топологии (на некотором множестве).

Пример 2.23 (прямая Зоргенфрея). Пусть $\mathcal{P}_r = \{[x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{P}_l = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l \cup \mathcal{P}_r$. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология порожденная предбазой $\mathcal{P}$. Пространство $S = (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ называется *прямой Зоргенфрея*. Семейство $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$ является базой прямой Зоргенфрея S .

Пример 2.24 (плоскостью Немыцкого). Пусть $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 0\}$ есть верхняя полуплоскость. Обозначим $B(x_0, y_0, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R\}$ открытый круг радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) . Положим $\mathcal{B}_1 = \{B(x_0, y_0, R) : (x_0, y_0) \in P, R > 0, R \leq y_0\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(x_0, 0) \cup B(x_0, R, R) : x_0 \in \mathbb{R}, R > 0\}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология порожденная базой $\mathcal{B}$. Пространство $(P, \mathcal{T})$ называется *плоскостью Немыцкого*.

2.1.7 Линейно упорядоченные пространства, I

Пусть $(X, <)$ линейно упорядоченное множество. Положим

$$\mathcal{P}_{\text{л.у.м}} = \{X\} \cup \{(x, +\infty)_X, (-\infty, y)_X : x, y \in X\}.$$

Топология $\mathcal{T}$, порожденная предбазой топологии $\mathcal{P}$, называется *топологией линейно упорядоченного пространства* или *порядковой топологией* и пространство $(X, \mathcal{T})$ *линейно упорядоченным пространством*. Базу топологий $\mathcal{T}$ образует семейство

$$\mathcal{B}_{\text{л.у.м}} = \{X\} \cup \{(x, +\infty)_X, (-\infty, y)_X, (x, y)_X : x, y \in X\}.$$

Топология линейно упорядоченного пространства на $\mathbb{R}$ совпадает со стандартной топологией на $\mathbb{R}$.

Обозначим

$$\mathcal{B}_{\text{в.у.м}} = \{(-\infty, y]_X, (x, y]_X : x, y \in X, x < y\}.$$

Утверждение 2.25. Если X есть в.у.м с порядковой топологией, то $\mathcal{B}_{\text{в.у.м}}$ является базой для X .

Доказательство. Достаточно показать, что множества вида $(-\infty, x]_X$ открыты в X . Если x максимальный элемент в X , то $(-\infty, x]_X = X$. Для не максимального элемента $x \in X$ обозначим $x^+ = \min(x, +\infty)_X$. Тогда $(-\infty, x]_X = (-\infty, x^+)_X$ открыто в X . $\square$

Обозначим $\tilde{X} = \{-\infty\} \cup X \cup \{+\infty\}$ и на $\tilde{X}$ рассмотрим порядок, продолжающий порядок X и в котором $-\infty$ минимальный элемент и $+\infty$ максимальный элемент. Тогда

$$\mathcal{B}_{\text{л.у.м}} = \{(x, y)_X : x, y \in \tilde{X}, x < y\},$$

$$\mathcal{B}_{\text{в.у.м}} = \{(x, y]_X : x, y \in \tilde{X}, x < y < +\infty\}.$$

На ординалах рассматривается порядковая топология.

Пусть $(X, <)$ и линейно упорядоченные пространства.

Определим л.у.м $X +_{\triangleleft} Y$ — *сумма двух л.у.м.* Если X и Y не пересекаются, то $X +_{\triangleleft} Y = X \cup Y$, если же пересекаются, то возьмем непересекающиеся копии X' и Y' (например, $X' = \{0\} \times X$ и $Y' = \{1\} \times Y$) и положим $X +_{\triangleleft} Y = X' \cup Y'$. Порядок на $X +_{\triangleleft} Y$ продолжает порядки X и Y , и $x < y$ для $x \in X$ и $y \in Y$. Аналогично определяется сумма нескольких л.у.м.

Определим л.у.м $X \times_{\triangleleft} Y$ — *лексикографическое произведение двух л.у.м.* Как множество, $X \times_{\triangleleft} Y = X \times Y$. Определим порядок: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ тогда и только тогда если $x_1 < x_2$ для $x_1 \neq x_2$ и $y_1 < y_2$ для $x_1 = x_2$. Порядок на $X \times_{\triangleleft} Y$ называется *лексикографическим порядком*.

Пример 2.26 (две стрелки). $[0, 1] \times_{\circlearrowleft} \{0, 1\}$ — л.у.м и топологической пространство *две стрелки*.

Несложно доказывается

Предложение 2.27. *Лексикографическое произведение двух в.у.м является в.у.м.*

На ординалах Ord рассматриваются операции: $\lambda + \gamma = \text{Ord}(\lambda +_{\circlearrowleft} \gamma)$ и $\lambda \gamma = \lambda \cdot \gamma = \text{Ord}(\lambda \times_{\circlearrowleft} \gamma)$.

Если X л.у.м и $Y \subset X$, то Y наследует порядок из X и Y наследует топологию из X с порядковой топологией. Но не обязательно порядковая топология на Y совпадает с топологией Y , наследуемой из X .

Пусть $X = \mathbb{R}$ и $Y = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$. Тогда Y порядково изоморфно X , но Y не гомеоморфно X .

2.2 Дополнение

2.2.1 Системы окрестностей

Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть топологическое пространство. Пусть для каждого $x \in X$ задана база $\mathcal{B}_x$ в точке x . Индексируемое семейство $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ называется *системой окрестности топологического пространства X* .

Для системы окрестностей $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ выполняются условия:

- (NS₀) если $x \in X$ и $U \in \mathcal{B}_x$, то $U \subset X$;
- (NS₁) $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ для любого $x \in X$ и $x \in U$ для $U \in \mathcal{B}_x$;
- (NS₂) если $U, V \in \mathcal{B}_x$, то $W \subset U \cap V$ для некоторого $W \in \mathcal{B}_x$;
- (NS₃) если $x \in U \in \mathcal{B}_y$, то $x \in W \subset U$ для некоторого $W \in \mathcal{B}_x$.

Семейство $\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ является базой пространства X .

2.2.2 Методы введения топологий, II

Пусть X множество.

Если для индексированного семейства $\mathfrak{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ выполняется условия (NS₀)–(NS₃), то семейство $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ называется *системой окрестностей топологии*.

Утверждение 2.28. *Для семейства $\mathcal{B}_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ выполняются условия (ТВ₁) и (ТВ₂), то есть $\mathcal{B}_{\mathfrak{B}}$ является базой топологии. Тогда для $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}} = \{\bigcup \mu : \mu \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{B}}\}$ выполняются условия (Тор₁)–(Тор₃) и $\mathcal{B}_{\mathfrak{B}}$ является базой топологического пространства $(X, \mathcal{T}_{\mathfrak{B}})$.*

Топология $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$ называется *топологией, порожденная системой окрестностей топологии $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$* .

Введение топологии с помощью системы окрестностей топологии более наглядно, чем с помощью базы топологии.

Прямая Зоргенфрея. Положим $\mathcal{B}_x^S = \{[x, y) : x < y\}$ для $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\{\mathcal{B}_x^S\}_{x \in \mathbb{R}}$ является системой окрестностей для прямой Зоргенфрея.

Плоскость Немыцкого. Пусть $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 0\}$ есть верхняя полуплоскость, d — евклидова метрика на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Если $y = 0$, то положим

$$\mathcal{B}_{(x,0)}^{PN} = \{(x, 0)\} \cup B_d((x, z), z) : z > 0\}.$$

Если $y > 0$, то положим

$$\mathcal{B}_{(x,y)}^{PN} = \{B_d((x, y), r) : 0 < r < y\}.$$

Тогда $\{\mathcal{B}_x^{PN}\}_{x \in \mathbb{R}}$ является системой окрестностей для плоскости Немыцкого.

2.2.3 Кардинальные инварианты, I

Кардинальным инвариантом называют функцию

$$\Phi : \text{Top} \rightarrow \text{Card},$$

для которой выполняется условие: если пространства X и Y гомеоморфны, то $\Phi(X) = \Phi(Y)$.

Определим ряд кардинальных инвариантов. Удобнее, когда кардинальные инварианты принимают бесконечные значения. Для удобства определения кардинальных инвариантов введем обозначение:

$$\min_* \mathcal{M} = \min(\{\omega\} \cup \mathcal{M}), \quad \sup_* \mathcal{M} = \sup(\{\omega\} \cup \mathcal{M})$$

для $\mathcal{M} \subset \text{Card}$. Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство и $x \in X$. Положим

$$w(X) = \min_* \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ база } X\} — \text{вес};$$

$$d(X) = \min_* \{|M| : M \subset X \text{ всюду плотно в } X\} — \text{плотность};$$

$$e(X) = \sup_* \{|M| : M \subset X \text{ дискретно и замкнуто в } X\} — \text{экстенд};$$

$$s(X) = \sup_* \{|M| : M \subset X \text{ дискретно в } X\} — \text{спред};$$

$$c(X) = \sup_* \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ дюзьюнктное семейство непустых открытых множеств в } X\} — \text{число Суслина};$$

$$l(X) = \min_* \{\tau \in \text{Card} : \text{для каждого открытого покрытия}^2 \gamma \text{ существует } \mu \subset \gamma, \text{ такое что } \mu \text{ покрытие } X \text{ и } |\mu| \leq \tau\} — \text{число Линделефа};$$

$$hd(X) = \sup_* \{d(Y) : Y \subset X\} — \text{наследственная плотность};$$

$$hl(X) = \sup_* \{l(Y) : Y \subset X\} — \text{наследственное число Линделефа};$$

$$\chi(x, X) = \min_* \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ база в } x\} — \text{характер в точке } x,$$

$$\chi(X) = \sup_* \{\chi(x, X) : x \in X\} — \text{характер}.$$

²открытое покрытие — семейство открытых множеств, объединение которого совпадает со всем пространством

Наиболее интересный случай, когда кардинальные инварианты счетны. Часто пространства со счетным кардинальным инвариантом имеют специальное название.

$w(X) \leq \omega$ — счетная база, вторая аксиома счетности;

$d(X) \leq \omega$ — сепарабельность;

$e(X) \leq \omega$ — счетный экстенд;

$s(X) \leq \omega$ — счетный спред;

$c(X) \leq \omega$ — свойство Суслина;

$l(X) \leq \omega$ — финальная компактность;

$hd(X) \leq \omega$ — наследственная сепарабельность;

$hl(X) \leq \omega$ — наследственная финальная компактность;

$\chi(x, X) \leq \omega$ — счетный характер в точке x , счетная база в точке, первая аксиома в точке

$\chi(X) \leq \omega$ — счетный характер, первая аксиома.

Отметим некоторые простые неравенства.

Предложение 2.29. Пусть X топологическое пространство. Тогда

$$d(X) \leq hd(X) \leq w(X), \quad l(X) \leq hl(X) \leq w(X);$$

$$e(X) \leq l(X), \quad e(X) \leq s(X), \quad s(X) \leq hd(X), \quad s(X) \leq hl(X);$$

$$c(X) \leq d(X), \quad c(X) \leq s(X).$$

2.2.4 Топологические свойства пространств, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, II

Из предложения 2.30, в дополнении к результатам из раздела 2.1.4, вытекает

Предложение 2.30. Пусть X пространство со счетной базой. Тогда X

(наследственно) сепарабельно, (наследственно) линделефово,

имеет счетный спред, свойство Суслина.

2.3 Задачи

2.3.1 Метрические и метризуемые пространства

Задача 2.1. Пусть X метризуемое пространство. Доказать, что следующие свойства эквивалентны для X : счетная база; сепарабельность; свойство Суслина; линделефовость.

Задача 2.2. Пусть X метризуемое пространство. Доказать, что $w(X) = d(X) = c(X) = l(X) = e(X) = s(X) = hd(X) = hl(X)$.

Задача 2.3. Приведите пример метризуемого пространства, не удовлетворяющего второй аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

Задача 2.4. Приведите пример топологического пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

2.3.2 Линейно упорядоченные пространства

Задача 2.5. Привести пример несепарабельного линейно упорядоченного пространства.

Задача 2.6. Доказать, что в две стрелки (пример 2.26) топологически вкладывается прямая Зонгенфрея (пример 2.23).

Задача 2.7. Доказать, что две стрелки раскладывается в сумму двух подпространств, каждое из которых гомеоморфно прямой Зонгенфрея.

Задача 2.8. Привести пример сепарабельного неметризуемого линейно упорядоченного пространства.

Задача 2.9. Пусть X линейно упорядоченное пространство. Доказать, что $\chi(X) \leq d(X) = hd(X) \leq hl(X) = s(X) = c(X)$.

2.3.3 Базы пространств

Задача 2.10. Пусть $\mathcal{B}$ есть база пространства X со второй аксиомой счётности. Доказать, что существует $\mathcal{B}_* \subset \mathcal{B}$, такое что $|\mathcal{B}_*| \leq \omega$ и $\mathcal{B}_*$ база X .

Задача 2.11. Пусть $\mathcal{B}$ есть база пространства X . Доказать, что существует $\mathcal{B}_* \subset \mathcal{B}$, такое что $|\mathcal{B}_*| \leq w(X)$ и $\mathcal{B}_*$ база X .

2.3.4 Свойства примеров

Задача 2.12. Доказать что у связной стрелки (пример 2.19) есть счетная база, но она не метризуема.

Задача 2.13. Доказать что у натуральных чисел с кофинитной топологией (пример 2.20) есть счетная база, но они не метризуемы.

Задача 2.14. Доказать что у прямой Зонгенфрея S (пример 2.23) нет счетной базы.

Задача 2.15. Доказать что $w(S) = 2^\omega$.

Задача 2.16. Доказать что прямая Зонгенфрея сепарабельна.

Задача 2.17. Доказать что в прямой Зонгенфрея любое дискретное подмножество не более чем счетно.

Задача 2.18. Доказать что прямая Зонгенфрея финально компактна.

Задача 2.19. Доказать что прямая Зонгенфрея наследственно финально компактна.

Задача 2.20. Доказать что прямая Зонгенфрея наследственно сепарабельна.

Задача 2.21. Опишите индуцированную из плоскости Немыцкого P (пример 2.24) топологию на нижней прямой $y = 0$ и верхней полуплоскости $y > 0$

Докажите, что плоскость Немыцкого сепарабельна и содержит дискретное замкнутое подмножество мощности 2^ω .

Докажите, что плоскость Немыцкого без счетной базы и неметризуема.

2.3.5 Разное

Задача 2.22. Могут ли различные топологии на множестве X индуцировать одинаковые топологии на подмножестве $A \subset X$?

Задача 2.23. Доказать, что любое открытое подмножество прямой является объединением не более чем счетного числа дизъюнктивных открытых интервалов (интервалами дополнительно считаются вся прямая и открытые лучи $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$).

Задача 2.24. Пусть Y открытое (замкнутое) подмножество X . Доказать, что любое открытое (замкнутое) подмножество Y открыто (замкнуто) в X .

Задача 2.25. 10. Доказать, что топология на множестве $[0, 1] \times [0, 1]$, индуцированная топологией лексикографического порядка на квадрате $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества действительных чисел $\mathbb{R}$, и топология лексикографического порядка на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ отрезка $[0, 1]$ различны.

Задача 2.26. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $M \subset X$. Если $\sup\{\rho(x, y) : x, y \in M\} = d < +\infty$, то множество M называется ограниченным, а число d называется его диаметром и обозначается через $\text{diam}_\rho(M)$. Докажите, что для любого метрического пространства (X, ρ) расстояние Хаусдорфа

$$d_\rho(A, B) = \max\{\sup\{\rho(a, B) : a \in A\}, \sup\{\rho(b, A) : b \in B\}\}$$

является метрикой в множестве ограниченных замкнутых подмножеств $A, B \subset X$.

Задача 2.27. Доказать метризуемость топологии лексикографического порядка на квадрате $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ линейно упорядоченного множества R . Привести пример метрики, индуцирующей эту топологию.

Глава 3

Предельные точки, пределы, непрерывные отображения

Темы в этой главе

Тема 7. Типы точек. Замыкание, граница и внутренность множества. Всюду плотные и нигде не плотные множества.

Тема 8. Непрерывные в точке отображения. Непрерывные отображения. Сходящиеся последовательности. Замыкание и непрерывные отображения пространств с первой аксиомой счетности.

3.1 Типы точек, замыкание и внутренность, сходящиеся последовательности, непрерывность

3.1.1 Типы точек

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство и $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{T}\}$ семейство замкнутых подмножеств пространства X .

Пусть $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется

- *точкой прикосновения* множества M , если $U \cap M \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки x ;
- *предельной точкой* множества M , если $(U \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки x ;
- *граничной точкой* множества M , если $U \cap M \neq \emptyset$ и $U \setminus M \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки x ;
- *внутренней точкой* множества M , если $U \subset M$ для некоторой окрестности U точки x .

В этих определениях можно заменить “окрестности” на “открытой окрестности”. Если $\mathcal{B}_x$ база в точке x , то в определениях можно заменить “окрестности” на “элементы базы $\mathcal{B}_x$ ”.

Множество $\mathring{U} \subset X$ называется *проколотой окрестностью* точки x , если $\mathring{U} = U \setminus \{x\}$ для некоторой окрестности U точки x . Точка x является предельной точкой множества M если и только если $\mathring{U} \cap M \neq \emptyset$ для любой проколотой окрестности $\mathring{U}$ точки x .

Точка x является предельной точкой множества M если и только если x является точкой прикосновения множества $M \setminus \{x\}$. Любая предельная точка является точкой прикосновения.

Точка x называется *изолированной* точкой пространства X , если $\{x\}$ открытое множество, то есть множество $\{x\}$ является окрестностью точки x . Точка $x \in M$ называется изолированной точкой множества X , если x изолированная точка подпространства M , то есть $\{x\} = M \cap U$ для некоторой окрестности U точки x в пространстве X .

- Утверждение 3.1.** (1) Если $x \in M$, то x точка прикосновения множества M .
- (2) Если $x \notin M$, то x точка прикосновения множества M тогда и только тогда когда x предельная точка M .
- (3) Если x изолированная точка M , то x не предельная точка M .
- (4) Если x точка прикосновения не предельная точка M , то x изолированная точка M ;
- (5) Точка x является граничной точкой множества M если и только если x точка прикосновения множеств M и $X \setminus M$.

Доказательство. Докажем (1). Если U окрестность x , то $x \in U \cap M \neq \emptyset$.

Докажем (2). Если U окрестность x , то $U \cap M = (U \setminus \{x\}) \cap M$.

Докажем (3). Пусть U есть окрестность x , для которой $U \cap M = \{x\}$. Тогда $(U \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$.

Докажем (4). Так как x не предельная точка M , то $(U \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$ для некоторой окрестности U точки x . Так как x точка прикосновения M , то $U \cap M \neq \emptyset$. Следовательно, $U \cap M = \{x\}$ и x изолированная точка M .

Докажем (5). Определение граничной точки эквивалентно тому, что $U \cap M \neq \emptyset$ и $U \cap (X \setminus M) = U \setminus M \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки x . Это утверждение эквивалентно тому, что $U \cap M \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки x ($\equiv x$ точка прикосновения множества M) и что $U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки x ($\equiv x$ точка прикосновения множества $X \setminus M$). $\square$

Положим

- $\overline{M} = \{x \in X : x \text{ точка прикосновения } M\}$ — замыкание множества M ,
 $\text{Fr } X = \{x \in X : x \text{ граничная точка } M\}$ — граница множества M ,
 $\text{Int } M = \{x \in X : x \text{ внутренняя точка } M\}$ — внутренность множества M .

Утверждение 3.2. (1) Замыкание $\overline{M}$ множества M замкнуто,

$$M \subset \overline{M} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : M \subset F\}$$

и $\overline{M}$ характеризуется тем, что $\overline{M}$ есть наименьшее замкнутое множество, которое содержит M .

(2) Внутренность $\text{Int } M$ множества M открыта,

$$\text{Int } M = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset M\} \subset M$$

и $\text{Int } M$ характеризуется тем, что $\text{Int } M$ есть наибольшее открытое множество, которое содержится в M .

Доказательство. Докажем (1). Обозначим $\tilde{F} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : M \subset F\}$. Как пересечение замкнутых множеств, множество $\tilde{F}$ замкнуто и является наименьшим замкнутым множеством, содержащим множество M . Нам надо доказать $\tilde{F} = \overline{M}$.

Докажем $\overline{M} \subset \tilde{F}$. Пусть $x \in \overline{M}$. Так как $U = X \setminus \tilde{F}$ не пересекается с $\tilde{F}$, то U не является окрестностью точки x , то есть $x \notin U$. Следовательно, $x \in \tilde{F}$.

Докажем $\tilde{F} \subset \overline{M}$. Пусть $x \in \tilde{F}$. Возьмем произвольную открытую окрестность U точки x . Тогда $M \not\subset \tilde{F} \setminus U$, так как $\tilde{F} \setminus U \subsetneq \tilde{F}$ и $\tilde{F}$ является наименьшим замкнутым множеством, содержащим множество M . Следовательно $M \cap U \neq \emptyset$ для любой открытой окрестности точки x , то есть $x \in \overline{M}$.

Докажем (2). Обозначим $\tilde{U} = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : M \subset U\}$. Как объединение открытых множеств, множество $\tilde{U}$ открыто и является наибольшим открытым множеством, лежащим в множестве M . Нам надо доказать $\tilde{U} = \text{Int } M$.

Докажем $\text{Int } M \subset \tilde{U}$. Пусть $x \in \text{Int } M$. Тогда $U \subset M$ для некоторой открытой окрестности точки x . Так как множество U открыто и $U \subset M$, то $U \subset \text{Int } M$ и, следовательно, $x \in \text{Int } M$.

Докажем $\tilde{U} \subset \text{Int } M$. Пусть $x \in \tilde{U}$. Тогда $\tilde{U}$ открытая окрестность точки x и $\tilde{U} \subset M$. Следовательно $x \in \text{Int } M$. $\square$

Утверждение 3.3.

$$\begin{aligned} \text{Int } M &= X \setminus \overline{X \setminus M}, \\ \overline{M} &= X \setminus \text{Int}(X \setminus M). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Так как $X \setminus \overline{X \setminus M}$ открыто и лежит в M , то $X \setminus \overline{X \setminus M} \subset \text{Int } M$. Так как $\text{Int } M$ открыто и $\text{Int } M \subset M$, то $\text{Int } M \cap (X \setminus M) = \emptyset$ и, следовательно, $\text{Int } M \cap \overline{X \setminus M} = \emptyset$. Тогда $\text{Int } M \subset X \setminus \overline{X \setminus M}$.

Докажем второе равенство. Положим $L = X \setminus M$. Из первого равенства вытекает $\text{Int } L = X \setminus \overline{X \setminus L}$ и, следовательно, $\overline{X \setminus L} = X \setminus \text{Int } L$. Заменяя L на $X \setminus M$ и $X \setminus L$ на M , получаем второе равенство. $\square$

Теорема 3.4. Пусть X топологическое пространство и $A, B \subset X$. Тогда

- (1) (co₁) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
- (co₂) $A \subset \overline{A}$;
- (co₃) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- (co₃^{*}) если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$;
- (co₄) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- (2) (io₁) $\text{Int } X = X$;

- (io₂) $\text{Int } A \subset A$;
- (io₃) $\text{Int } (A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$;
- (io₃^{*}) если $A \subset B$, то $\text{Int } A \subset \text{Int } B$;
- (io₄) $\text{Int } (\text{Int } A) = \text{Int } A$.

Доказательство. Докажем (1). Пункты (co₁), (co₂), (co₃^{*}) и (co₄) вытекает из утверждения 3.2.

Докажем (co₃). Включение $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ вытекает из того, что множество $\overline{A \cup B}$ замкнуто, $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ и $\overline{A \cup B}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащие $A \cup B$.

Включение $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ вытекает из того, что $A, B \subset A \cup B$ и, следовательно, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ и $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Пункт (2) вытекает из (1) и формулы $\text{Int } M = X \setminus \overline{X \setminus M}$ (утверждение 3.3). $\square$

Утверждение 3.5. Граница $\text{Fr } M$ замкнута в X и

$$\begin{aligned} \text{Fr } M &= \overline{M} \cap \overline{X \setminus M} \\ &= \overline{M} \setminus \text{Int } M \\ &= \text{Fr}(X \setminus M). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть $x \in X$. Точка x граничная если и только если x точка прикосновения для множеств M и $X \setminus M$ (утверждение 3.1(5)), то есть $x \in \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$. Следовательно, первое равенство верно и $\text{Fr } X$ замкнуто в X как пересечение двух замкнутых множеств.

Докажем второе равенство.

$$\text{Fr } X = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M} = \overline{M} \cap (X \setminus \text{Int } M) = \overline{M} \setminus \text{Int } M.$$

Докажем третье равенство.

$$\begin{aligned} \text{Fr}(X \setminus M) &= \overline{X \setminus M} \cap \overline{X \setminus (X \setminus M)} = \\ &= \overline{X \setminus M} \cap \overline{M} = \text{Fr } X. \end{aligned}$$

$\square$

3.1.2 Всюду плотные и нигде не плотные множества

Множество M *всюду плотно* в X если $M \cap U \neq \emptyset$ для любого непустого открытого $U \subset X$.

Множество M *нигде не плотно* в X если для любого непустого открытого $V \subset X$ существует непустое открытое $U \subset V$, для которого $M \cap U = \emptyset$.

Утверждение 3.6. (1) Множество M *всюду плотно* в X если и только если $\overline{M} = X$.

(2) Множество M *нигде не плотно* в X если и только если $X \setminus \overline{M}$ *всюду плотно* в X .

Доказательство. Докажем (1). ($\Rightarrow$). Пусть $x \in X$. Тогда $U \cap M \neq \emptyset$ для любой окрестности точки x , то есть x есть точка прикосновения множества M и $x \in \overline{M}$.

($\Leftarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Пусть $x \in U$. Так как $x \in \overline{M}$ и U есть окрестность x , то $U \cap M \neq \emptyset$.

Докажем (2). ($\Rightarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Так как M нигде не плотно в X , то существует непустое открытое $V \subset U$, для которого $V \cap M = \emptyset$. Тогда $V \subset X \setminus \overline{M}$ и, следовательно, $U \cap (X \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Так как $X \setminus \overline{M}$ всюду плотно в X , то $V = U \cap (X \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$. Непусто множество V открыто и $V \subset U$. $\square$

Из утверждения 3.6(2) вытекает

Утверждение 3.7. Если M нигде не плотно в X , то $\overline{M}$ нигде не плотно в X .

Утверждение 3.8. Если M замкнуто или открыто в X , то граница $\text{Fr } M$ нигде не плотна в X .

Доказательство. Так как $\text{Fr } M = \text{Fr}(X \setminus M)$ (утверждение 3.5), то достаточно доказать утверждение для замкнутого M . Из утверждения 3.5 вытекает, что $\text{Fr } M = \overline{M} \setminus \text{Int } M = M \setminus \text{Int } M$. Пусть $U \subset X$ открытое непустое множество. Если $U \setminus M \neq \emptyset$, то $V = U \setminus M \subset U$ непусто открытое множество и $V \cap M = \emptyset$. Если $U \setminus M = \emptyset$, то $U \subset M$ и, следовательно, $U \subset \text{Int } M$. Так как $\text{Fr } M = M \setminus \text{Int } M$, то $U \cap \text{Fr } M = \emptyset$. $\square$

3.1.3 Непрерывные отображения, I

Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{R})$ топологические пространства и $x \in X$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным в точке x* , если для любой окрестности W точки $f(x)$ существует окрестность U точки x , для которой $f(U) \subset W$.

Отображение f называется *непрерывным*, если $f^{-1}(W)$ открыто для любого открытого $W \subset Y$.

Утверждение 3.9. Следующие условия эквивалентны.

- (1) Отображение f непрерывно.
- (2) Отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть W открытая окрестность точки $f(x)$. Тогда $U = f^{-1}(W)$ открыто, $x \in U$ и $f(U) \subset W$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $W \subset Y$ открыто. Для каждого $x \in f^{-1}(W)$ существует окрестность U точки x , для которой $f(U) \subset W$. То есть $x \in U \subset f^{-1}(W)$. Следовательно $f^{-1}(W)$ открыто. $\square$

Пусть $\mathcal{B}_x$ база в точке x , $\mathcal{B}_y$ база в точке $y = f(x)$, $\mathcal{P}$ предбаза пространства Y .

Утверждение 3.10. Следующие условия эквивалентны.

- (1) Отображение f непрерывно в точке x .

(2) $x \in \text{Int } f^{-1}(W)$ для любой окрестности W точки y .

(3) Если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $y \in \overline{f(M)}$.

Доказательство. Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть W окрестность y . Из (2) вытекает, что $x \in U = \text{Int } f^{-1}(W)$. Тогда $f(U) \subset W$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть W окрестность y . Из (1) вытекает, что существует открытая окрестность U точки x , для которой $f(U) \subset W$. Тогда $x \in U \subset f^{-1}(W)$. Так как U открыто, то $U \subset \text{Int } f^{-1}(W)$. Следовательно $x \in \text{Int } f^{-1}(W)$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (3). Предположим противное, то есть $y \notin \overline{f(M)}$. Положим $W = Y \setminus \overline{f(M)}$. Тогда W является окрестностью точки y . Из (1) вытекает, что существует окрестность U точки x , для которой $f(U) \subset W$. Так $x \in \overline{M}$ и U окрестность x , то $U \cap M \neq \emptyset$. Следовательно $f(U) \cap f(M) \neq \emptyset$ и $f(M) \cap W \neq \emptyset$. Противоречие с $W = Y \setminus \overline{f(M)}$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть W есть открытая окрестность точки y . Положим $M = X \setminus f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \setminus W)$.

Покажем, что $x \notin \overline{M}$. Предположим противное, то есть $x \in \overline{M}$. Из (3) вытекает, что $y \in \overline{f(M)} = \overline{Y \setminus W} = Y \setminus W$. Противоречие с тем, что $y \in W$.

Положим $U = X \setminus \overline{M}$. Тогда U открытая окрестность x и

$$f(U) \subset f(X \setminus \overline{M}) = f(f^{-1}(W)) = W.$$

□

Утверждение 3.11. (1) Следующие условия эквивалентны.

- (a) Отображение f непрерывно в точке x .
- (b) Для любого $W \in \mathcal{B}_y$ существует $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset W$.
- (c) Для любого окрестности $W \in \mathcal{P}$ точки y существует $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset W$.

(2) Следующие условия эквивалентны.

- (a) $x \in \text{Int } f^{-1}(W)$ для любой окрестности W точки y .
- (b) $x \in \text{Int } f^{-1}(W)$ для любого $W \in \mathcal{B}_y$.
- (c) $x \in \text{Int } f^{-1}(W)$ для любой окрестности $W \in \mathcal{P}$ точки y .

Доказательство. Докажем (1). Импликации (a) $\Leftrightarrow$ (b), (a) $\Rightarrow$ (c) очевидны.

Докажем (c) $\Rightarrow$ (a). Пусть W окрестность y . Так как $\mathcal{P}$ предбаза, то существуют $W_1, W_2, \dots, W_n \in \mathcal{P}$, для которых $y \in \bigcap_{i=1}^n W_i \subset W$. Из (c) вытекает, что для $i = 1, 2, \dots, n$, существуют $U_i \in \mathcal{B}_x$, для которых $f(U_i) \subset W_i$. Тогда $f(U) \subset W$ для $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Докажем (2). Импликации (a) $\Leftrightarrow$ (b), (a) $\Rightarrow$ (c) очевидны.

Докажем (c) $\Rightarrow$ (a). Пусть W окрестность y . Так как $\mathcal{P}$ предбаза, то существуют $W_1, W_2, \dots, W_n \in \mathcal{P}$, для которых $y \in \bigcap_{i=1}^n W_i \subset W$. Из (c) вытекает, что $x \in \text{Int } f^{-1}(W_i)$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Int } f^{-1}(W_i) = \text{Int} \left(\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(W_i) \right) \subset \text{Int } f^{-1}(W).$$

□

Предложение 3.12. Пусть X и Y топологические пространства и $f : X \rightarrow Y$ отображение. Пусть $\mathcal{B}$ база Y и $\mathcal{P}$ предбаза пространства Y . Следующие условия эквивалентны.

- (1) Отображение f непрерывно.
- (2) $f^{-1}(U)$ открыто для каждого $U \in \mathcal{B}$.
- (3) $f^{-1}(U)$ открыто для каждого $U \in \mathcal{P}$.
- (4) Отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$.
- (5) $f^{-1}(F)$ замкнуто в X для каждого замкнутого $F \subset Y$.
- (6) Если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{M}$.

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть U открыто в Y . Так как $\mathcal{B}$ база, то $U = \bigcup \gamma$ для некоторого $\gamma \subset \mathcal{B}$. Тогда $f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} f^{-1}(V)$ и так как $f^{-1}(V)$ открыто для $V \in \mathcal{B}$, то U открыто в X .

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Положим $\tilde{\mathcal{B}} = \{\bigcap \mu : \mu \subset \mathcal{P}, |\mu| < \omega\}$. Тогда $\tilde{\mathcal{B}}$ база X . Пусть $U \in \tilde{\mathcal{B}}$. Тогда $U = \bigcap \mu$ для некоторого конечного $\mu \subset \mathcal{P}$. Тогда $f^{-1}(U) = \bigcap_{V \in \mu} f^{-1}(V)$ открыто в X . Так как $f^{-1}(U)$ открыто в X для U из базы $\tilde{\mathcal{B}}$, то из (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает (1).

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (4) это утверждение 3.9.

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (5) вытекает из того, что $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(F)$ для открытого $U \subset Y$ и замкнутого $F = Y \setminus U$.

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (6) вытекает из (1) $\Leftrightarrow$ (4) и утверждения 3.10. $\square$

Предложение 3.13. Пусть X и Y топологические пространства и $f : X \rightarrow Y$ отображение. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$, где F_i замкнуто в X для $i = 1, 2, \dots, n$. Если отображения $f|_{F_i}$ непрерывны для $i = 1, 2, \dots, n$, то отображение f непрерывно.

Доказательство. Пусть $F \subset Y$ замкнуто. Пусть $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Так как отображение $f|_{F_i}$ непрерывно, то из предложения 3.12(5) вытекает, что $(f|_{F_i})^{-1}(F) = F_i \cap f^{-1}(F)$ замкнуто в F_i . Так как F_i замкнуто, то $F_i \cap f^{-1}(F)$ замкнуто в X .

Итак, $F_i \cap f^{-1}(F)$ замкнуто в X для $i = 1, 2, \dots, n$. Так как $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$, то

$$f^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^n (F_i \cap f^{-1}(F))$$

является объединением конечного числа замкнутых множеств. Следовательно, $f^{-1}(F)$ замкнуто в X . Из предложения 3.12(5) вытекает, что отображение f непрерывно. $\square$

3.1.4 Сходящиеся последовательности, I

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, $x \in X$ и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ последовательность точек.

Последовательность $(x_n)_n$ *сходится к точке x* , если для любой окрестности U точки x существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$.

Последовательность $(x_n)_n$ *касается точки x* , если для любой окрестности U точки x множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ бесконечно. Также говорят, что точка x является *предельной точкой* для последовательности $(x_n)_n$.

Очевидно, если последовательность сходится к точке x , то тогда она касается точки x .

Пусть $\mathcal{B}_x$ есть база в точке x и $\mathcal{P}$ есть предбаза пространства X .

Утверждение 3.14. *Следующие условия эквивалентны.*

- (1) *Последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x .*
- (2) *Для любого $U \in \mathcal{B}_x$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$.*
- (3) *Для любого $U \in \mathcal{P}$, такого что $x \in U$, существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть S есть окрестность точки x . Так как $\mathcal{B}_x$ база в точке x , то $x \in U \subset S$ для некоторого $U \in \mathcal{B}_x$. Из (2) вытекает, что существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$. Тогда $x_n \in S$ для $n > N$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть S есть окрестность точки x . Так как $\mathcal{P}$ предбаза X , то существуют $W_1, W_2, \dots, W_m \in \mathcal{P}$, для которых $x \in \bigcap_{i=1}^m W_i \subset S$. Из (3) вытекает, что для $i = 1, 2, \dots, m$ существует $N_i \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in W_i$ для $n > N_i$. Положим $N = \max N_1, N_2, \dots, N_m$. Тогда $x_n \in S$ для $n > N$. $\square$

Утверждение 3.15. *Если $M \subset X$, $(x_n)_n \subset M$ и $(x_n)_n$ сходится к точке x , то $x \in \overline{M}$.*

Доказательство. Пусть U окрестность точки x . Тогда $U \cap M \supset U \cap (x_n)_n \neq \emptyset$. Следовательно, $x \in \overline{M}$. $\square$

Предложение 3.16. *Пусть X топологическое пространство $x \in X$ точка с первой аксиомой счетности. Тогда*

(fup) *для $M \subset X$, $x \in \overline{M}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x .*

Доказательство. Импликация ($\Leftarrow$) вытекает из утверждения 3.15.

Докажем ($\Rightarrow$). Пусть $(U_n)_n$ счетная база в x , для которой $U_{n+1} \subset U_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Так как $x \in \overline{M}$, то $U_n \cap M \neq \emptyset$. Возьмем $x_n \in U_n \cap M$. Тогда $(x_n)_n \subset M$. Покажем, что последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x . Пусть U окрестность точки x . Существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $U_N \subset U$. Тогда $x_n \in U$ для $n > N$. $\square$

Из этого утверждения вытекает следующее предложение.

Предложение 3.17. Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда

(FU) для любого $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x .

Из этого утверждения и утверждения 3.15 вытекает следующее предложение.

Предложение 3.18. Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда

(SEQ) множество $F \subset X$ замкнуто X если и только если предел любой сходящейся последовательности $(x_n)_n \subset F$ принадлежит F .

Предложение 3.19. Пусть X топологическое пространство, $x \in X$, Y топологическое пространство и $f : X \rightarrow Y$ отображение. Если отображение f непрерывно в точке x и последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x , то образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.

Доказательство. Пусть W окрестность точки $y = f(x)$. Так как отображение f непрерывно в точке x , то $f(U) \subset W$ для некоторой окрестности точки x . Так как $(x_n)_n$ сходится к точке x , то существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$. Тогда $f(x_n) \in f(U) \subset W$ для $n > N$. $\square$

Теорема 3.20. Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности в точке $x \in X$, Y топологическое пространство и $f : X \rightarrow Y$ отображение. Тогда отображение f непрерывно в точке x если и только если для любой последовательности $(x_n)_n$, сходящейся к точке x , образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.

Доказательство. Импликация $(\Rightarrow)$ вытекает из предложения 3.19.

Докажем $(\Leftarrow)$. В силу предложения 3.14, для доказательства непрерывности отображения f в точке x достаточно проверить, что если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{f(M)}$. Из предложения 3.16 вытекает, что существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x . Тогда образ последовательности $(f(x_n))_n \subset f(M)$ сходится к точке $f(x)$. Из утверждения 3.15 вытекает, что $f(x) \in \overline{f(M)}$. $\square$

Из теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.21. Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности, Y топологическое пространство и $f : X \rightarrow Y$ отображение. Тогда отображение f непрерывно в x если и только если для любой последовательности $(x_n)_n$, сходящейся к некоторой точке $x \in X$, образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.

3.2 Дополнение

3.3 Задачи

3.3.1 Типы точек

Задача 3.1. Доказать:

- (1) $\overline{A} = A \cup \text{Fr } A$;
- (2) $\text{Int } A = A \setminus \text{Fr } A$;
- (3) $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus \text{Int } A$;
- (4) $X \setminus \text{Fr } A = \text{Int } A \cup \text{Int}(X \setminus A)$;
- (5) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A \subset A$;
- (6) A открыто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A \cap A = \emptyset$;
- (7) $A^d \setminus A = \text{Fr } A \setminus A$, где A^d – предельные точки A ;
- (8) A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^d \subset A$.

Задача 3.2. Проверить справедливость следующих соотношений:

- (1) если $A \subset B$, то $\text{Int } A \subset \text{Int } B$ ($\overline{A} \subset \overline{B}$);
- (2) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr } A \cap \text{Fr } B$;
- (3) $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int } A \cup \text{Int } B$, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$;
- (4) $\overline{A} = \overline{(\overline{A})}$, $\text{Int } A = \text{Int}(\text{Int } A)$;
- (5) $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$;
- (6) $\text{Fr}(X \setminus A) = \text{Fr } A$, $\text{Fr}(\overline{A}) \subset \text{Fr } A$, $\text{Fr}(\text{Int } A) \subset \text{Fr } A$;
- (7) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

3.3.2 Канонически открытые и канонически замкнутые множества

Множество $U \subset X$ называется *канонически открытым*, если $U = \text{Int } F$ для некоторого замкнутого F . Множество $F \subset X$ называется *канонически замкнутым*, если $F = \overline{U}$ для некоторого открытого U .

Задача 3.3. Доказать, что множество U канонически открытое если и только если $U = \text{Int } \overline{U}$. Доказать, что множество F канонически замкнутое если и только если $F = \overline{\text{Int } F}$.

Задача 3.4. Доказать, что множество U канонически открытое если и только если множество $X \setminus U$ канонически замкнутое.

Задача 3.5. Доказать, что пересечение конечного числа канонически открытых множеств является канонически открытым множеством. Верно ли, что объединение конечного числа канонически открытых множеств является канонически открытым множеством?

Задача 3.6. Доказать, что объединение конечного числа канонически замкнутых множеств является канонически замкнутым множеством. Верно ли, что пересечение конечного числа канонически замкнутых множеств является канонически замкнутым множеством?

Задача 3.7. Перечислите все различные множества, которые можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции $\bar{\cdot}$ и Int .

Задача 3.8. Для каких $n \in \mathbb{N}$ на прямой можно построить n открытых множеств, имеющих одну и ту же границу.

3.3.3 (Всюду) плотное и нигде не плотное подмножество

Задача 3.9. Подмножество пространства l_2 , состоящее из всех точек $(x_1, \dots, x_k, \dots)$, для которых $0 \leq x_k \leq 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом*. Доказать, что гильбертов куб — замкнутое подмножество l_2 ; внутренность гильбертова куба в l_2 — пустое множество.

Расстояние в l_2 определяется формулой:

$$\rho((x_n)_n, (y_n)_n) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2},$$

$l_2 = \{(x_n)_n : \rho(\bar{0}, (x_n)_n) < \infty\}$, где $\bar{0}$ нулевая последовательность.

Задача 3.10. Доказать, что замкнутое всюду плотное подмножество пространства X совпадает с X .

Задача 3.11. Найдите (опишите все) топологии на множестве X , для которых всюду плотно одноточечное множество $\{x\}$, где $x \in X$.

Задача 3.12. Будет ли пересечение всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?

Задача 3.13. Докажите, что в любом всюду плотном подмноестве $\mathbb{R}$ имеется счетное всюду плотное подмножество.

Задача 3.14. Является ли $\mathbb{Q}$ пересечением счетного числа открытых всюду плотных в $\mathbb{R}$ подмножеств?

Задача 3.15. Найти минимальную мощность всюду плотных подмножеств пространства l_2 , прямой Зоргенфрея, пространства Бэра, "метризуемого ежа". Докажите, что любое бесконечное подмножество прямой в топологии Зарисского является всюду плотным.

3.3.4 Разное

Задача 3.16. Пусть $C: \text{Exp}(X) \rightarrow \text{Exp}(X)$ — оператор на семействе подмножеств множества X , удовлетворяющий условиям:

- (1) $C(\emptyset) = \emptyset$;
- (2) $M \subset C(M)$;

$$(3) \ C(M \cup N) = C(M) \cup C(N);$$

$$(4) \ C(C(M)) = C(M).$$

Докажите, что на X существует топология такая, что $\overline{M} = C(M)$ для всех $M \in \text{Exp}(X)$.

Задача 3.17. Найдите замыкание множества $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ на прямой в кофинитной топологии.

Задача 3.18. Доказать, что конечномерное подпространство нормированного пространства замкнуто.

Глава 4

Аксиомы отделимости

Темы в этой главе

Тема 9. Аксиомы отделимости T_0 , T_1 и T_2 . Сходящиеся последовательности и непрерывные отображения в хаусдорфовых пространствах.

Тема 10. Аксиомы отделимости T_3 , $T_{3\frac{1}{2}}$ и T_4 . Нормальность метризуемых пространств.

Тема 11. Лемма Урысона. Вполне регулярность нормальных пространств.

4.1 Аксиомы отделимости, хаусдорфовы, регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства

4.1.1 Аксиомы отделимости

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство.

Определим для X аксиомы отделимости T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , $T_{3\frac{1}{2}}$ и T_4 .

T_0 : Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y , для которых $y \notin U$ или $x \notin V$.

T_1 : Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y , для которых $y \notin U$ и $x \notin V$.

T_2 : Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y , для которых $U \cap V = \emptyset$.

T_2 -Пространства также называются *хаусдорфовыми* пространствами.

T_3 : Пространство X является T_1 -пространством, для $x \in X$ и замкнутого $F \subset X$, для которого $x \notin F$, существуют открытые U и V , такие что $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$.

T_3 -Пространства также называются *регулярными* пространствами.

$T_{3\frac{1}{2}}$: Пространство X является T_1 -пространством, для $x \in X$ и замкнутого $F \subset X$, для которого $x \notin F$, существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$.

$T_{3\frac{1}{2}}$ -Пространства также называются *вполне регулярными* или *тихоновскими* пространствами.

T_4 : Пространство X является T_1 -пространством, для замкнутых $P, F \subset X$, для которых $P \cap F = \emptyset$, существуют открытые U и V , такие что $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$.

T_4 -Пространства также называются *нормальными* пространствами.

В литературе, учебниках и статьях, также часто встречается вариант определений T_3 , $T_{3\frac{1}{2}}$ и T_4 , в которых не требуется выполнения аксиомы T_1 . Так что при чтении литературы нужно быть внимательным.

Практически всегда, регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства определяются как здесь.

Естественно ожидать, что T_i влечет T_j для $i > j$, что мы и докажем с течением времени. Ясно, для $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, свойства T_i являются топологическими. $T_{3\frac{1}{2}}$ также является топологическим свойством, что мы покажем в разделе 4.1.6.

4.1.2 T_0 , T_1 и T_2 пространства

Пусть X пространство, $x, y \in X$, $x \neq y$, U окрестность x и V окрестность y . Рассмотрим условия на $x, y, U \ni x, V \ni y$:

(T_0) $y \notin U$ или $x \notin V$;

(T_1) $y \notin U$ и $x \notin V$;

(T_2) $U \cap V = \emptyset$.

Для $i \in \{0, 1, 2\}$, пространство X является T_i -пространством если и только если выполняется условие:

для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y , для которых выполняется условие (T_i).

Так как $(T_2) \Rightarrow (T_1) \Rightarrow (T_0)$, то верно следующее утверждение.

Предложение 4.1. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Предложение 4.2. Пусть $i \in \{0, 1, 2\}$, X является T_i -пространством и $Y \subset X$. Тогда Y является T_i -пространством.

Доказательство. Пусть $x, y \in Y$, $x \neq y$. Так как для X является T_i -пространством, то существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y , для которых выполняется условие (T_i). Положим $\tilde{U} = U \cap Y$ и $\tilde{V} = V \cap Y$. Тогда $\tilde{U}$ является окрестностью x в Y , $\tilde{V}$ является окрестностью y в Y и для $x, y, \tilde{U}, \tilde{V}$ выполняется условие (T_i). Следовательно, Y является T_i -пространством. $\square$

Предложение 4.3. Пусть $i \in \{0, 1, 2\}$, X является T_i -пространством, пространство Y непрерывно и инъективно отображается в X . Тогда Y является T_i -пространством.

Доказательство. Пусть $f : Y \rightarrow X$ есть непрерывное инъективное отображение. Пусть $x, y \in Y$, $x \neq y$. Так как для X является T_i -пространством, то существуют окрестность U точки $f(x)$ и окрестность V точки $f(y)$, для которых выполняется условие (T_i) . Положим $\tilde{U} = f^{-1}(U)$ и $\tilde{V} = f^{-1}(V)$. Тогда $\tilde{U}$ является окрестностью x в Y , $\tilde{V}$ является окрестностью y в Y и для $x, y, \tilde{U}, \tilde{V}$ выполняется условие (T_i) . Следовательно, Y является T_i -пространством. $\square$

Предложение 4.4. *Антидискретное не одноточечное пространство не является T_0 -пространством.*

Доказательство. Пусть X есть антидискретное пространство, $x, y \in X$, $x \neq y$. Если U окрестность x и V окрестность y , то $U = V = X$ и условие (T_0) не выполняется. $\square$

Пример 4.5 (существует не T_0 пространство). Антидискретное двоеточие не является T_0 -пространством.

Предложение 4.6. *Пространство X является T_0 -пространством если и только если в X не вкладывается антидискретное двоеточие.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$. Предположим противное. Пусть $D \subset X$ есть антидискретное двоеточие. Из предложения 4.2 вытекает, что D T_0 -пространство. Противоречие с предложением 4.4.

$(\Leftarrow)$. Предположим противное. Тогда X не T_0 -пространство и существуют различные $x, y \in X$, так что $y \in U$ и $x \in V$ для любых окрестностей U и V точек x и y , соответственно. Тогда подпространство $D = \{x, y\}$ является антидискретным двоеточием. Противоречие. $\square$

Предложение 4.7. *Пространство X является T_1 -пространством если и только если в X любая точка замкнута, то есть $\{x\}$ замкнуто в X для любого $x \in X$.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$. Пусть $y \in C = X \setminus \{x\}$. Из T_1 вытекает, что $x \notin V_y$ для некоторой окрестности V_y точки y . Тогда $y \in V_y \subset C$. Следовательно, y внутренняя точка C . Так как любая точка C является внутренней, то C открыто и, следовательно, $\{x\}$ замкнуто.

$(\Leftarrow)$. Пусть $x, y \in X$ различные точки. Положим $U = X \setminus \{y\}$ и $V = X \setminus \{x\}$. Тогда U и V окрестности x и y , соответственно, и для x, y, U, V выполняется (T_1) . $\square$

Пример 4.8 ($T_0 \not\Rightarrow T_1$). Связное двоеточие является T_0 не T_1 пространством.

Пример 4.9 ($T_1 \not\Rightarrow T_2$). Пусть N есть натуральные числа с кофинитной топологией (пример 2.20). В N любая точка замкнута, поэтому N T_1 -пространство. Так как в N любые два непустых открытых множества пересекаются, то N не T_2 -пространство.

Теорема 4.10. Пусть X хаусдорфово пространство, Y пространство, $f, g: Y \rightarrow X$ непрерывные отображения и

$$E = \{y \in Y : f(y) = g(y)\}.$$

Тогда

- (1) E замкнуто в Y ;
- (2) если E всюду плотно в Y , то $f = g$.

Доказательство. Докажем (1). Достаточно показать, что множество

$$W = Y \setminus E = \{y \in Y : f(y) \neq g(y)\}$$

открыто. Пусть $y \in W$. Тогда $f(y) \neq g(y)$. Так как X хаусдорфово пространство, то существуют открытые окрестности U и V точек $f(y)$ и $g(y)$, соответственно, для которых $U \cap V = \emptyset$. Так как отображения f и g непрерывны, то множества $f^{-1}(U)$ и $g^{-1}(V)$ являются открытыми окрестностями точки y . Множество $W_y = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ является открытой окрестностью точки y . Тогда $f(W_y) \subset U$ и $g(W_y) \subset V$. Так как $U \cap V = \emptyset$, то $f(W_y) \cap g(W_y) = \emptyset$. Следовательно, $W_y \subset W$. Мы показали, что произвольная точка $y \in W$ является внутренней точкой множества W . Следовательно, W открыто.

Докажем (2). Множество E замкнуто и всюду плотно в Y . Следовательно, $E = Y$, что означает $f = g$. $\square$

Позднее мы покажем, что теорема 4.10 характеризует хаусдорфовы пространства. То есть если для пространства X выполняется теорема 4.10 (достаточно пункта (2)), то X хаусдорфово пространство.

4.1.3 Сходящиеся последовательности, II

Предложение 4.11. Пусть X хаусдорфово пространство. Тогда у любой последовательности в X может быть не более одного предела.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к двум разным точкам x и y . Пусть U и V есть не пересекающиеся окрестности точек x и y , соответственно. Существует $N_x \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N_x$. Существует $N_y \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in V$ для $n > N_y$. Пусть $m > N_x$ и $m > N_y$. Тогда $x_m \in U \cap V$. Противоречие с $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Предложение 4.12. Пусть X есть топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Следующие условия эквивалентны.

- (1) Пространство X хаусдорфово.
- (2) У любой последовательности в X может быть не более одного предела.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 4.11. Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное. Тогда существуют различные точки $x, y \in X$, такие что $U \cap V \neq \emptyset$ для любых окрестностей U и V точек x и y , соответственно. Пусть $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ есть базы окрестностей в точках x и y , такие что $U_{n+1} \subset U_n$ и $V_{n+1} \subset V_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть $x_n \in U_n \cap V_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(x_n)_n$ сходится к двум различным точкам x и y . $\square$

Предложение 4.13. Пусть X есть топологическое пространство и y любой последовательности в X может быть не более одного предела. Тогда X является T_1 -пространством.

Доказательство. Предположим противное. В силу предложения 4.7, существует $x \in X$, для которого $\{x\}$ не замкнуто. Пусть $y \in \overline{\{x\}} \setminus \{x\}$. Положим $x_n = x$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x . Так как $x \in U$ для любой окрестности точки y , то последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке y . У последовательности $(x_n)_n$ два различных предела. Противоречие. $\square$

Пусть M бесконечное множество и a_M некоторая точка, не принадлежащая M (например $\{M\}$). Положим $A(M) = M \cup \{a_M\}$. Определим топологию на $A(M)$. Положим

$$\mathcal{B}_M = \{\{x\} : x \in M\}, \quad \mathcal{B}_a = \{\{a_M\} \cup (M \setminus L) : L \subset M, |L| < \omega\},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_M \cup \mathcal{B}_a.$$

Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, определяемая базой $\mathcal{B}$. Далее $A(M)$ будем рассматривать с топологией $\mathcal{T}$. Точки из M являются изолированными точками пространства $A(M)$. Точка a_M является предельной точкой для множества M . Множество M всюду плотно в $A(M)$.

Последовательность $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $a_{\mathbb{N}}$ в пространстве $A(\mathbb{N})$. Пространство $A(\mathbb{N})$ гомеоморфно сходящейся последовательности с пределом $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Определим гомеоморфизм $f : A(\mathbb{N}) \rightarrow S$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x = a_{\mathbb{N}}. \end{cases}$$

Пространство $A(\mathbb{N})$ также будем называть сходящейся последовательностью.

Предложение 4.14. Пусть X есть топологическое пространство. Последовательность

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X, \quad n \mapsto x_n$$

сходится к точке $x \in X$, если и только если продолжение

$$\hat{f} : A(\mathbb{N}) \rightarrow X, \quad a \mapsto \begin{cases} x_n, & \text{если } a = n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{если } a = a_{\mathbb{N}}. \end{cases}$$

отображения f является непрерывным отображением.

Доказательство. Докажем $(\Rightarrow)$, то есть непрерывность $\hat{f}$. Пусть $U \subset X$ открытое множество. Если $x \in U$, то множество $L = A(\mathbb{N}) \setminus \hat{f}^{-1}(U)$ является конечным подмножеством $\mathbb{N}$ и множество $f^{-1}(U) = A(\mathbb{N}) \setminus L$ является открытой окрестностью точки $a_{\mathbb{N}}$. Если $x \notin U$, то $\hat{f}^{-1}(U) \subset \mathbb{N}$ открыто в $A(\mathbb{N})$.

Докажем $(\Leftarrow)$, то есть что последовательность $(x_n)_n$ сходится к x . Последовательность $(n)_n$ сходится к $a_{\mathbb{N}}$ в пространстве $A(\mathbb{N})$ и отображение $\hat{f}$ непрерывно. Из предложения 3.19 вытекает что образ последовательности $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $\hat{f}(a_{\mathbb{N}}) = x$. $\square$

Из этого предложения вытекает следующее утверждение.

Предложение 4.15. Пусть X есть топологическое пространство. Следующие условия эквивалентны.

- (1) Если $f, g : A(\mathbb{N}) \rightarrow X$ непрерывные отображения и $f|_{\mathbb{N}} = g|_{\mathbb{N}}$, то $f = g$.
- (2) У любой последовательности в X может быть не более одного предела.

Это предложение показывает, что предложение 4.11 является следствием теоремы 4.10.

4.1.4 T_3 . Регулярные пространства

Предложение 4.16. T_1 -Пространство X является регулярным пространством если и только если выполняется условие:

если $x \in X$ и W окрестность x , то $\bar{U} \subset W$ для некоторой окрестности U точки x .

Доказательство. $(\Rightarrow)$. Можно считать, что W открыто. Положим $F = X \setminus W$. Из условия T_3 вытекает, что существуют открытые U и V , такие что $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. Тогда $\bar{U} \subset W$.

$(\Leftarrow)$. Пусть $x \in X$ и замкнутое множество F не содержит x . Множество $W = X \setminus F$ является открытой окрестностью точки x . Тогда $\bar{U} \subset W$ для некоторой открытой окрестности U точки x . Множество $V = X \setminus \bar{U}$ открыто. Тогда $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Предложение 4.17. $T_3 \Rightarrow T_2$.

Доказательство. Пусть X регулярное пространство, $x, y \in X$ различные точки. Так как X является T_1 -пространством, то, в силу предложения 4.7, множество $F = \{y\}$ замкнуто в X . Из T_3 вытекает, что существуют открытые U и V , такие что $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. Осталось заметить, что условие $F \subset V$ эквивалентно $y \in V$. $\square$

Предложение 4.18. Если пространство X регулярно, то подпространство $Y \subset X$ регулярно.

Доказательство. Так как X является T_1 -пространством, то, в силу предложения 4.2, Y является T_1 -пространством. Пусть $x \in Y$ и F есть замкнутое подмножество Y , не содержащие точку x . Тогда $F = \tilde{F} \cap Y$ для некоторого замкнутого в X множества $\tilde{F}$. Так как X регулярно, то существуют открытые $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ в X , такие что $x \in \tilde{U}$, $\tilde{F} \subset \tilde{V}$ и $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$. Положим $U = Y \cap \tilde{U}$ и $V = Y \cap \tilde{V}$. Множества U и V открыты в Y , $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Пример 4.19 ($T_2 \not\Rightarrow T_3$). Положим $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $W = \mathbb{R} \setminus F$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ — счетная база $\mathbb{R}$. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cup \{U \cap W : U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, которая определяется этой базой. Пусть $X = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Пространство X хаусдорфово, со счетной базой, но не регулярно, так W является окрестностью 0, но $\bar{U} \not\subset W$ для любой окрестности U точки 0.

4.1.5 Непрерывные отображения, II

Предложение 4.20. Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ непрерывные отображения топологических пространств, то композиция

$$g \circ f: X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$$

отображений f и g непрерывна.

Доказательство. Пусть $U \subset Z$ открыто. Из непрерывности g вытекает, вытекает, что $g^{-1}(U) \subset Y$ открыто. Из непрерывности f вытекает, вытекает, что $f^{-1}(g^{-1}(U)) \subset X$ открыто. Так как, $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$, то $(g \circ f)^{-1}(U)$ открыто. $\square$

Предложение 4.21. Если $f: X \rightarrow Y$ непрерывное отображение топологических пространств и $Z \subset X$, то ограничение

$$f|_Z: Z \rightarrow Y, z \mapsto f(z)$$

отображения f на Z непрерывно.

Доказательство. Пусть $U \subset Y$ открыто. Из непрерывности f вытекает, вытекает, что $f^{-1}(U)$ открыто в X . Тогда

$$(f|_Z)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap Z$$

открыто в Z . $\square$

4.1.6 $T_{3\frac{1}{2}}$. Вполне регулярные пространства

Предложение 4.22. $T_{3\frac{1}{2}}$ является топологическим свойством.

Доказательство. Надо доказать, что если X и Y гомеоморфные пространства и пространство X вполне регулярно, то Y вполне регулярно. Пусть $h: Y \rightarrow X$ гомеоморфизм, $y \in Y$, $P \subset Y$ замкнуто в Y и $y \notin P$. Докажем, что существует непрерывная функция $g: Y \rightarrow [0, 1]$, такая что $g(y) = 0$ и $g(P) = \{1\}$.

Пусть $x = h(y)$ и $F = h(P)$. Так как h гомеоморфизм, то F замкнуто в X и $x \notin F$. Так как X вполне регулярное пространство, то существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$. Положим $g = f \circ h$. Как композиция непрерывных функций, функция g непрерывна. Кроме того, $g(y) = 0$ и $g(P) = \{1\}$. $\square$

Предложение 4.23. $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$.

Доказательство. Пусть X есть вполне регулярное пространство. Тогда X T_1 -пространство. Докажем, что X регулярное пространство. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X , не содержащие точку x . Так как X вполне регулярное пространство, то существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$. Множества $U = f^{-1}((-\infty, \frac{1}{3}))$ и $V = f^{-1}((\frac{2}{3}, +\infty))$ открыты, $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Предложение 4.24. Подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно.

Доказательство. Пусть X есть вполне регулярное пространство и $Y \subset X$. Так как X T_1 -пространство, то Y T_1 -пространство. Пусть $x \in Y$, P замкнутое подмножество Y не содержащие точку x . Так как P замкнуто в Y , то существует замкнутое подмножество F пространства X , для которого $P = F \cap Y$. Тогда $x \notin F$. Так как X вполне регулярное пространство, то существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$. Положим $g = f|_Y$. Тогда функция g непрерывна, $g(x) = 0$ и $g(P) = \{1\}$. $\square$

4.1.7 T_4 . Нормальные пространства

Предложение 4.25. T_1 -Пространство X является нормальным пространством если и только если выполняется условие:

если P замкнутое подмножество X $W \supset P$ открыто, то $\overline{U} \subset W$ для некоторого открытого $U \supset P$.

Доказательство. ($\Rightarrow$). Положим $F = X \setminus W$. Из условия T_4 вытекает, что существуют открытые U и V , такие что $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. Тогда $\overline{U} \subset W$.

($\Leftarrow$). Пусть P и F замкнутые непересекающиеся множества в X . Множество $W = X \setminus F$ открыто и $P \subset W$. Тогда $\overline{U} \subset W$ для некоторой открытой U , содержащей P . Множество $V = X \setminus \overline{U}$ открыто. Тогда $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Теорема 4.26 (Лемма Урысона). Пусть X нормальное пространство, множества $P, F \subset X$ замкнуты и не пересекаются. Тогда существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, такая что $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$.

Доказательство. Положим $D_0 = \{0, 1\}$,

$$D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 < k < 2^n, k \text{ нечетное целое число} \right\}$$

для $n > 0$, $D_n^* = \bigcup_{i=0}^n D_i$ для $n \in \omega$ и $D = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i$ — двоично рациональные числа на отрезке $[0, 1]$. Ясно, $D_{n+1}^* = D_n^* \cup D_{n+1}$.

Индукцией по n , построим семейства $\{U_r : r \in D_n\}$ открытых множеств, такие что выполняются условия:

$$(I_0) \quad P \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1 \subset X \setminus F;$$

$$(I_n) \quad \text{если } p, q \in D_n^* \text{ и } p < q, \text{ то } \overline{U_p} \subset U_q.$$

База индукции. Положим $U_1 = X \setminus F$. Множество U_1 является открытой окрестностью множества P . В силу предложения 4.25, существует открытое U_0 , такое что $P \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$.

Шаг индукции, $n > 0$. Для $r = \frac{s}{2^n} \in D_n$, где s нечетно и $0 < s < 2^n$, обозначим $r_- = \frac{s-1}{2^n}$ и $r_+ = \frac{s+1}{2^n}$. Тогда $r_-, r_+ \in D_{n-1}^*$ и $(r_-, r_+) \cap D_n^* = \{r\}$.

Пусть $r \in D_n$. По предположению индукции (I_{n-1}) , $\overline{U_{r_-}} \subset U_{r_+}$. Из нормальности X вытекает, что существует открытое множество U_r , такое что

$$\overline{U_{r_-}} \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_{r_+}.$$

Проверим (I_n) . Пусть $p, q \in D_n^*$ и $p < q$. Надо доказать, $\overline{U_p} \subset U_q$. Рассмотрим четыре случая.

$$(1) \quad p \notin D_n, q \notin D_n. \text{ Тогда } \overline{U_p} \subset U_q \text{ вытекает из } (I_{n-1}).$$

$$(2) \quad p \in D_n, q \notin D_n. \text{ Тогда } p_+ \leq q \text{ и } \overline{U_p} \subset U_{p_+} \subset U_q.$$

$$(3) \quad p \notin D_n, q \in D_n. \text{ Тогда } p \leq q_- \text{ и } \overline{U_p} \subset \overline{U_{q_-}} \subset U_q.$$

$$(4) \quad p \in D_n, q \in D_n. \text{ Тогда } p_+ \leq q_- \text{ и } \overline{U_p} \subset \overline{U_{p_+}} \subset \overline{U_{q_-}} \subset U_q.$$

Построение завершено. Выполняется условие

$$(I_{\infty}) \quad \text{если } p, q \in D \text{ и } p < q, \text{ то } \overline{U_p} \subset U_q.$$

Определим функцию $f : X \rightarrow [0, 1]$. Пусть $x \in X$. Положим $f(x) = 1$ если $x \notin U_1$. Положим

$$f(x) = \inf\{r \in D : x \in U_r\}$$

если $x \in U_1$. Из (I_0) вытекает, что $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$. Из определения функции f вытекает, что

$$f^{-1}([0, r)) \subset U_r \subset f^{-1}([0, r])$$

для $r \in D$. Пусть $0 < t < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f^{-1}([0, p)) &\subset U_p \subset f^{-1}([0, p]) \subset f^{-1}([0, t)) \subset \\ &f^{-1}([0, t]) \subset f^{-1}([0, q)) \subset U_q \subset f^{-1}([0, q]) \end{aligned}$$

для $p < t < q$ и $p, q \in D$. Следовательно,

$$f^{-1}([0, t)) = \bigcup \{U_p : p \in D, p < t\}, \quad (4.1)$$

$$f^{-1}([0, t]) = \bigcap \{U_q : q \in D, t < q\}. \quad (4.2)$$

Из (4.2) и (I_∞) вытекает, что

$$f^{-1}([0, t]) = \bigcap \{\overline{U_q} : q \in D, t < q\}. \quad (4.3)$$

Для непрерывности f достаточно проверить, что прообразы элементов предбазы $[0, t]$ и $(t, 1]$ открыты для $0 < t < 1$. Из (4.1) вытекает, что множество $f^{-1}([0, t])$ открыто. Из (4.3) вытекает, что множество $f^{-1}([0, t])$ замкнуто и, следовательно, множество $f^{-1}((t, 1]) = X \setminus f^{-1}([0, t])$ открыто. $\square$

Предложение 4.27. $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$.

Доказательство. Пусть X есть нормальное пространство. Тогда X T_1 -пространство. Докажем, что X вполне регулярное пространство. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X , не содержащее точку x . Положим $P = \{x\}$. Из леммы Урысона вытекает, что существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1]$, такая что $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$. Тогда $f(x) = 0$. $\square$

Предложение 4.28. Пусть X нормальное пространство и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Тогда Y нормальное пространство.

Доказательство. Как подпространство T_1 -пространства, пространство Y T_1 -пространство. Пусть $P, F \subset Y$ замкнутые в Y непересекающиеся множества. Так как X нормальное пространство и P и F замкнуты в X , то у P и F есть открытые в X непересекающиеся окрестности U и V . Тогда $U \cap Y$ и $V \cap Y$ есть открытые в Y непересекающиеся окрестности множеств P и F . $\square$

4.1.8 Метрические и метризуемые пространства, II

Пусть (X, ρ) метрическое пространство.

Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Положим $\rho(x, A) = \rho(\{x\}, A)$ для $x \in X$.

Утверждение 4.29. Положим $f(x) = \rho(x, A)$. Тогда

- (1) $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$;
- (2) функция f непрерывна;
- (3) $\rho(x, A) = 0$ если и только если $x \in \overline{A}$.

Доказательство. Докажем (1). Достаточно доказать $f(x) - f(y) \leq \rho(x, y)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\rho(y^*, y) \leq f(y) + \varepsilon$ для некоторого $y^* \in A$. Тогда

$$\rho(x, y) + f(y) + \varepsilon \geq \rho(x, y) + \rho(y^*, y) \geq \rho(x, y^*) \geq f(x).$$

Тогда $f(x) \leq \rho(x, y) + f(y) + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $f(x) \leq \rho(x, y) + f(y)$.

Докажем (2). Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Если $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Докажем (3). Если $\rho(x, A) = 0$, то $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$. Если $x \in \overline{A}$, то $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\rho(x, A) = 0$. $\square$

Теорема 4.30. *Метризуемые пространства нормальны.*

Доказательство. Пусть X метризуемое пространство и ρ метрика, которая задает топологию пространства X .

Покажем, что X хаусдорфово пространство. Пусть x и y различные точки X и $r = \rho(x, y)$. Тогда $B_\rho(x, \frac{r}{2})$ и $B_\rho(y, \frac{r}{2})$ есть непересекающиеся окрестности x и y .

Покажем, что X нормальное пространство. Пусть $P, F \subset X$ замкнутые в Y непересекающиеся множества. Положим

$$U = \bigcup \{B_\rho(x, \rho(x, F)/2) : x \in P\},$$

$$V = \bigcup \{B_\rho(y, \rho(y, P)/2) : y \in F\}.$$

Из утверждения 4.29 вытекает, что U и V являются открытыми окрестностями P и F . Покажем $U \cap V = \emptyset$. Предположим противное. Тогда

$$B_\rho(x, \rho(x, F)/2) \cap B_\rho(y, \rho(y, P)/2) \neq \emptyset$$

для некоторых $x \in P$ и $y \in F$. Следовательно,

$$\rho(x, y) < \rho(x, F)/2 + \rho(y, P)/2 \leq \rho(x, y)/2 + \rho(y, x)/2 = \rho(x, y).$$

Противоречие. $\square$

Возможно простое доказательство леммы Урысона для метрических пространств: функция

$$f(x) = \frac{\rho(x, P)}{\rho(x, P) + \rho(x, F)}$$

непрерывна и разделяет замкнутые непересекающиеся множества P и F — $f(X) \subset [0, 1]$, $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$.

4.2 Дополнение

4.3 Задачи

4.3.1 Отображения

Задача 4.1. Пусть X хаусдорфово пространство и $f: X \rightarrow X$ непрерывное отображение. Доказать, что множество $\{x \in X : f(x) = x\}$ неподвижных точек в X замкнуто в X .

Задача 4.2. Пусть X регулярное пространство, Y пространство, D плотное подмножество Y и $f: Y \rightarrow X$ непрерывное отображение. Предположим, что отображение

$$f|_{D \cup \{y\}} : D \cup \{y\} \rightarrow X$$

непрерывно для каждого $y \in Y \setminus D$. Доказать, что отображение f непрерывно.

Подмножество F пространства X называется *нуль-множеством* или *функционально замкнутым*, если существует непрерывная функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $F = f^{-1}(0)$. Дополнения до нуль-множеств называют *конуль-множествами* или *функционально открытыми* множествами.

Задача 4.3. Пусть P и F функционально замкнутые непересекающиеся множества пространства X . Доказать, что существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, такая что $P = f^{-1}(0)$. Пусть X регулярное пространство, Y пространство, D плотное подмножество Y и $f: Y \rightarrow X$ непрерывное отображение. Предположим, что отображение

$$f|_{D \cup \{y\}}: D \cup \{y\} \rightarrow X$$

непрерывно для каждого $y \in Y \setminus D$. Доказать, что отображение f непрерывно.

4.3.2 Разное

Задача 4.4. Привести пример нормального пространства, некоторое подпространство которого не нормально.

Задача 4.5. Привести пример регулярного не вполне регулярного пространства.

Несчетное хаусдорфово пространство, в котором каждое нигде не плотное подмножество счетно, называется *лузинским пространством*.

Задача 4.6. В предположении континуум гипотезы ($\omega_1 = 2^\omega$, CH) доказать что в вещественной прямой есть лузинское подпространство.

В рамках ZFC нельзя доказать существование лузинских пространств. В некоторой модели ZFC лузинское пространство нет.

Задача 4.7. Доказать, что каждое сепарабельное пространство представляется в виде суммы подпространства без изолированных точек и счетного подпространства.

Пространство без изолированных точек называется *разложимым*, если оно представляется в виде суммы непересекающихся всюду плотных подпространств.

Задача 4.8. Доказать, что любое метризуемое пространство без изолированных точек разложимо.

Задача 4.9. Доказать, что существует счетное регулярное разложимое пространство без изолированных точек.

Задача 4.10. Докажите, что в любом конечном T_0 -пространстве а) существует изолированная точка; б) множество изолированных точек всюду плотно.

Глава 5

Компактность

Темы в этой главе

Тема 12. Компактные пространства. Нормальность хаусдорфовых компактных пространств. Замкнутость компактных подмножеств хаусдорфовых пространств. Сохранение компактности конечными объединениями и непрерывными образами.

Тема 13. Локально компактные пространства. Одноточечная компактификация Александрова.

Тема 14. Счетно компактные и секвенциально компактные пространства. Компактные метризуемые пространства.

Тема 15. Финально компактные и линделефовы пространства. Нормальность линделефовых пространств. Финально компактные метризуемые пространства.

5.1 Топологические свойства типа компактности

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Семейство подмножеств γ пространства X называется *открытым покрытием* пространства X , если γ состоит из открытых множеств (то есть $\gamma \subset \mathcal{T}$) и γ покрытие X (то есть $\bigcup \gamma = X$). Семейство μ подмножеств называется *подпокрытием* покрытия γ , если $\mu \subset \gamma$ и μ покрытие X ($\bigcup \mu = X$).

5.1.1 Компактные пространства

Пространство X называется *компактным* пространством, если для любого открытого покрытия пространства X существует конечное подпокрытие.

Другими словами, X компактное пространство, если для любого открытого покрытия γ ($\gamma \subset \mathcal{T}$ и $\bigcup \gamma = X$) пространства X существует конечное подпокрытие μ ($\mu \subset \gamma$, $|\mu| < \omega$ и $\bigcup \mu = X$).

Предложение 5.1. *Замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть X компактное пространство и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Докажем, что Y компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y . Для каждого $\alpha \in A$, существует открытое подмножество V_α пространства X , для которого $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$. Положим $V = X \setminus Y$. Семейство $\gamma' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием компактного пространства X . Так как X компактно, то существует конечное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ' . Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Предложение 5.2. *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть X компактное пространство, Y пространство и $f: X \rightarrow Y$ непрерывное сюръективное отображение. Докажем, что Y компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y . Так как отображение f непрерывно и сюръективно, то семейство $\gamma' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием X . Так как X компактно, то существует конечное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ' . Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Предложение 5.3. *Если пространство X является объединением конечного семейства компактных подпространств, то X компактно.*

Доказательство. Пусть $\{X_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ конечное покрытие X и X_i компактно для $i = 1, 2, \dots, n$. Докажем, что X компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства X .

Пусть $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Семейство $\{U_\alpha \cap X_i : \alpha \in A\}$ открытое покрытие компактного пространства X_i . Следовательно, существует конечное $B_i \subset A$, для которого $\{U_\alpha \cap X_i : \alpha \in B_i\}$ покрытие X_i .

Положим $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$. Множество B конечно и семейство $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Одноточечное пространство компактно, поэтому из предложения 5.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 5.4. *Конечное пространство компактно.*

Лемма 5.5. *Пусть X есть хаусдорфовое пространство, $x \in X$, F компактное подмножество X и $x \notin F$. Тогда существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F .*

Доказательство. Для каждого $y \in F$ зафиксируем открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y точек x и y . Так как $\{V_y \cap F : y \in F\}$ есть открытое покрытие F , то $F \subset \bigcup \{V_y : y \in M\}$ для некоторого конечного $M \subset F$. Положим $U = \bigcap \{U_y : y \in M\}$ и $V = \bigcup \{V_y : y \in M\}$. Тогда U и V есть открытые непересекающиеся окрестности точки x и множества F . $\square$

Предложение 5.6. *Компактное подмножество хаусдорфового пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть X есть хаусдорфовое пространство и F компактное подмножество X . Пусть $x \in X \setminus F$. Из леммы 5.5 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F . Тогда $V \subset X \setminus F$ есть открытая окрестность точки x . Получаем, $X \setminus F$ открыто и, следовательно, F замкнуто в X . $\square$

Теорема 5.7. *Хаусдорфовое компактное пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X есть хаусдорфовое компактное пространство.

Докажем, что X регулярно. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X и $x \notin F$. Из предложения 5.1 вытекает, что F компактно. Из леммы 5.5 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F .

Докажем, что X нормально. Пусть P и F есть замкнутое непересекающиеся подмножество. Для каждого $x \in P$ зафиксируем открытые непересекающиеся окрестности U_x и V_x точки x и замкнутого множества F . Из предложения 5.1 вытекает, что P компактно. Так как $\{U_x \cap P : x \in P\}$ есть открытое покрытие P , то $P \subset \bigcup \{U_x : x \in P\}$ для некоторого конечного $M \subset P$. Положим $U = \bigcup \{U_x : x \in M\}$ и $V = \bigcap \{V_x : x \in M\}$. Тогда U и V есть открытые непересекающиеся окрестности множеств P и F . $\square$

Пример 5.8. Связное двоеточие является T_0 не T_1 компактным пространством.

Пример 5.9. Пусть X есть натуральные числа $\mathbb{N}$ с кофинитной топологией (пример 2.20). Покажем, что X компактно. Пусть γ открытое покрытие X и $U \in \gamma$ не пусто. Тогда $X \setminus U$ конечно и $X \setminus U \subset \bigcup \mu'$ для некоторого конечного $\mu' \subset \gamma$. Тогда $\mu = \{U\} \cup \mu'$ конечное подпокрытие γ .

Пространство X является компактным не T_2 T_1 -пространством.

5.1.2 Локально компактные пространства, одноточечная компактификация

Пространство X называется *локально компактным* пространством, если для любой точки $x \in X$ существует компактная окрестность S точки x .

Пусть X пространство и ∞_X есть некоторая точка, которая не принадлежит X . Пусть $\mathcal{T}$ топология X ,

$$\mathcal{B}_\infty^X = \{\{\infty_X\} \cup (X \setminus K) : K \subset X \text{ компактно и замкнуто в } X\}.$$

Но множестве $\alpha X = \{\infty_X\} \cup X$ введем топологию $\mathcal{T} \cup \mathcal{B}_\infty^X$. Пространство αX называется *одноточечной компактификацией* (компактификацией Александера, александровской компактификацией) пространства X .

Из определения вытекает следующее утверждение.

Предложение 5.10. *Пространство X вложено в одноточечную компактификацию αX как открытое множество. Пространство X плотно в αX если и только если X не компактное пространство.*

Предложение 5.11. *Для пространства X , одноточечная компактификация αX компактна.*

Доказательство. Пусть γ открытое покрытие X . Существует $U \in \gamma$, для которого $\infty_X \in U$. Тогда $U = \{\infty_X\} \cup (X \setminus K)$, где K компактное замкнутое подмножество X . Так как K компактно, то $K \subset \bigcup \mu$ для некоторого конечного $\mu \subset \gamma$. Тогда семейство $\{U\} \cup \mu$ является конечным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Теорема 5.12. Пусть X пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X является хаусдорфовым локально компактным пространством;
- (2) одноточечная компактификация αX хаусдорфова.

Доказательство. Докажем $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $x, y \in \alpha X$ и $x \neq y$. Рассмотрим два случая.

Рассмотрим случай $x, y \in X$. Так как X хаусдорфово пространство, то существуют непересекающиеся окрестности U и V точек x и y . Тогда U и V являются непересекающимися окрестностями точек x и y в пространстве αX .

Рассмотрим случай $\{x, y\} \not\subset X$. Для определенности, пусть $y = \infty_X$. Так как X локально компактное пространство, то у точки x есть компактная окрестность S . Так как X хаусдорфово пространство, то из предложения 5.6 вытекает, что S замкнуто в X . Так как S является компактным и замкнутым подмножеством в X , то множество $V = \{\infty_X\} \cup (X \setminus S)$ является окрестностью точки $y = \infty_X$ в пространстве αX . Тогда S и V являются непересекающимися окрестностями точек x и y .

Докажем $(1) \Leftarrow (2)$. Пусть $x \in X$. Так как αX хаусдорфово пространство, существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точек ∞_X и x . Пусть $S = \alpha X \setminus U$. Тогда $x \in V \subset S$ и S является компактной окрестностью точки x в пространстве X . $\square$

Теорема 5.13. Хаусдорфовое локально компактное пространство вполне регулярно.

Доказательство. Из теоремы 5.13 вытекает, что одноточечная компактификация αX хаусдорфова. Из предложения 5.11 вытекает, что αX компактно. Следовательно, пространство αX нормально (теорема 5.7) и вполне регулярно (предложение 4.27). Так как X есть подпространство αX (предложение 5.10), то X вполне регулярно (предложение 4.24). $\square$

Предложение 5.14. Открытое подпространство локально компактного хаусдорфова пространства локально компактно.

Доказательство. Пусть Y есть открытое подпространство локально компактного хаусдорфова пространства X . Пусть $y \in Y$. Пусть S есть компактная окрестность точки y в пространстве X . Так как X хаусдорфово, то S замкнуто в X (предложение 5.6). Из теоремы 5.13 вытекает, что X регулярное пространство. Следовательно, существует открытое $U \subset X$, для которого $y \in U \subset \overline{U} \subset Y$. Тогда $Q = S \cap \overline{U}$ есть замкнутое подмножество в компакте S . Следовательно, Q компактно (предложение 5.1). Множество Q является компактной окрестностью точки y в Y . $\square$

Отметим, что из предложения 5.14 нельзя убрать условия хаусдорфовости, так как любое пространство X вкладывается в компактное пространство αX как открытое подмножество.

5.1.3 Счетно компактные и секвенциально компактные пространства

Пространство X называется *счетно компактным* пространством, если для любого не более чем счетного открытого покрытия пространства X существует конечное подпокрытие.

Другими словами, X счетно компактно, если для любого не более чем счетного открытого покрытия γ ($\gamma \subset \mathcal{T}$, $|\gamma| \leq \omega$ и $\bigcup \gamma = X$) пространства X существует конечное подпокрытие μ ($\mu \subset \gamma$, $|\mu| < \omega$ и $\bigcup \mu = X$).

Пространство X называется *секвенциально компактным*, если для любой последовательности $(x_n)_n \subset X$ существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к некоторой точке пространства X .

Из определений вытекает

Предложение 5.15. *Компактные пространства счетно компактны.*

Предложение 5.16. *Замкнутое подпространство счетно компактного пространства счетно компактно.*

Доказательство. Пусть X счетно компактно и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Докажем, что Y счетно компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y и $|A| \leq \omega$. Для каждого $\alpha \in A$, существует открытое подмножество V_α пространства X , для которого $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$. Положим $V = X \setminus Y$. Семейство $\gamma' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым не более чем счетным покрытием счетно компактного пространства X . Так как X счетно компактно, то существует конечное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ' . Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Предложение 5.17. *Непрерывный образ счетно компактного пространства счетно компактен.*

Доказательство. Пусть X счетно компактно, Y пространство и $f: X \rightarrow Y$ непрерывное сюръективное отображение. Докажем, что Y счетно компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y и $|A| \leq \omega$. Так как отображение f непрерывно и сюръективно, то семейство $\gamma' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием X . Так как X счетно компактно, то существует конечное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ' . Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Предложение 5.18. *Если пространство X является объединением конечного семейства счетно компактных подпространств, то X счетно компактно.*

Доказательство. Пусть $\{X_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ конечное покрытие X и X_i счетно компактно для $i = 1, 2, \dots, n$. Докажем, что X счетно компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства X и $|A| \leq \omega$.

Пусть $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Семейство $\{U_\alpha \cap X_i : \alpha \in A\}$ открытое не более чем счетное покрытие счетно компактного пространства X_i . Следовательно, существует конечное $B_i \subset A$, для которого $\{U_\alpha \cap X_i : \alpha \in B_i\}$ покрытие X_i .

Положим $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$. Множество B конечно и семейство $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Теорема 5.19. Пусть X пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X счетно компактное пространство;
- (2) любая последовательность $(x_n)_n$ в X имеет предельную точку;
- (3) если $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ убывающая последовательность непустых замкнутых множеств, то пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ непусто.

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (3). Предположим противное. Положим $U_n = X \setminus F_n$. Тогда $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ это счетное открытое покрытие, в котором нельзя выделить конечное подпокрытие. Противоречие.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\gamma = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ счетное открытое покрытие X . Положим $F_n = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$. Тогда $(F_n)_n$ убывающая последовательность замкнутых множеств и пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ пусто. Следовательно, $F_n = \emptyset$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{U_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ конечное подпокрытие γ .

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Возьмем $x_n \in F_n$. Пусть x предельная точка последовательности $(x_n)_n$. Тогда $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Положим $F_n = \overline{\{x_i : i > n\}}$. Тогда $(F_n)_n$ убывающая последовательность непустых замкнутых множеств. Любая точка из $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ является предельной для последовательности $(x_n)_n$. $\square$

Предложение 5.20. Если пространство секвенциально компактно, то оно счетно компактно.

Доказательство. Пусть X счетно компактное пространство. Пусть $(x_n)_n$ последовательность в X . В силу теоремы 5.19 достаточно показать, что у последовательности $(x_n)_n$ есть предельные точки. Так как X секвенциально компактно, то для последовательности $(x_n)_n \subset X$ существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к некоторой точке x пространства X . Тогда x предельная точка для последовательности $(x_n)_n$. $\square$

Лемма 5.21. Пусть X пространство с первой аксиомой счетности, $(x_n)_n$ последовательность в X и x предельная точка последовательности $(x_n)_n$. Тогда существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к точке x .

Доказательство. Пусть $(U_n)_n$ счетная убывающая база в точке x . Положим $N_k = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_k\}$. Так как x предельная точка для $(x_n)_n$, то множество N_k бесконечно. Возьмем строго возрастающую последовательность $(n_k)_k$ натуральных чисел, такую что $n_k \in N_k$. Тогда $x_{n_k} \in U_k$ и подпоследовательность $(x_{n_k})_k$ сходится к точке x . $\square$

Теорема 5.22. Пусть X пространство с первой аксиомой счетности. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X счетно компактное пространство;
- (2) X секвенциально компактное пространство.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает из предложения 5.20. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $(x_n)_n$ последовательность в X . Из теоремы 5.19 вытекает, что последовательность $(x_n)_n$ касается некоторой точки $x \in X$. Из леммы 5.21 вытекает, что существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к точке x . $\square$

Предложение 5.23. Пусть X счетно компактное пространство. Тогда

- (1) любое бесконечное подмножество в X имеет предельную точку;
- (2) любое дискретное и замкнутое подмножество X конечно.

Доказательство. Докажем (1). Пусть $M \subset X$ бесконечно. Пусть $(x_n)_n \subset M$ и $x_i \neq x_j$ для различных $i, j \in \mathbb{N}$. Из теоремы 5.19(2) вытекает, что последовательность $(x_n)_n$ касается некоторой точки x . Тогда x предельная точка для M .

Докажем (2). Дискретные и замкнутые множества не имеют предельных точек, поэтому из (1) вытекает (2). $\square$

Лемма 5.24. Пусть X T_1 -пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) x предельная точка множества M ;
- (2) множество $M \cap U$ бесконечно для любой окрестности точки x .

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим противное. Тогда множество $K = M \cap U$ конечно для некоторой окрестности U точки x . Положим $F = K \setminus \{x\}$ и $V = U \setminus F$. Так как X T_1 -пространство, то F замкнуто в X и V является окрестностью точки x . Так как $M \cap (V \setminus \{x\}) = \emptyset$, то противоречие с (1).

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1).¹ Пусть U окрестность точки x . Так как $M \cap U$ бесконечно, то $M \cap (U \setminus \{x\})$ бесконечно и, следовательно, не пусто. $\square$

Теорема 5.25. Пусть X T_1 -пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X счетно компактное пространство;
- (2) любое бесконечное подмножество в X имеет предельную точку;
- (3) любое дискретное и замкнутое подмножество X конечно.

¹Отметим, что эта импликация верна для всех пространств, не только T_1 .

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2)$ и $(1) \Rightarrow (3)$ вытекают из предложения 5.23.

Докажем $(2) \Rightarrow (3)$. Дискретные и замкнутые множества не имеют предельных точек, поэтому из (2) вытекает (3) .

Докажем $(3) \Rightarrow (1)$. Пусть $(x_n)_n$ последовательность в X . В силу теоремы 5.19 достаточно показать, что у последовательности $(x_n)_n$ есть предельные точки. Если множество $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ конечно, то $|n \in \mathbb{N} : x = x_n| = \omega$ для некоторой точки x из M и x является предельной точкой для последовательности $(x_n)_n$. Если M бесконечно, то M не является дискретным и замкнутым множеством в X . Следовательно, некоторая точка $x \in X$ является предельной точкой для M . Из леммы 5.24 вытекает, что множество $M \cap U$ бесконечно для любой окрестности точки x . Тогда x является предельной точкой для последовательности $(x_n)_n$. $\square$

Лемма 5.26. Пусть X есть хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности, $x \in X$, F счетно компактное подмножество X и $x \notin F$. Тогда существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F .

Доказательство. Пусть $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ счетная открытая база в x , $U_{n+1} \subset U_n$. Положим $F_n = \overline{U_n} \cap F$ для $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Предположим противное. Пусть $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Так как X хаусдорфово, то существуют непересекающиеся открытые окрестности O_x и O_y точек x и y . Так как (U_n) база в x , то $U_n \subset O_x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $y \notin \overline{U_n}$ и $y \notin F_n$. Противоречие.

Положим $V_n = F \setminus F_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Семейство $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ является открытым счетным покрытием счетно компактного пространства F . Тогда $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ является покрытием X для некоторого конечного $N \subset \mathbb{N}$. Положим $n = \max N$. Тогда $V_n = F$ и $\overline{U_n} \cap F = \emptyset$. Положим $U = U_n$ и $V = X \setminus \overline{U_n}$. $\square$

Предложение 5.27. Счетно компактное подмножество хаусдорфового пространства с первой аксиомой счетности замкнуто.

Доказательство. Пусть X есть хаусдорфово пространство и F счетно компактное подмножество X . Пусть $x \in X \setminus F$. Из леммы 5.26 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F . Тогда $V \subset X \setminus F$ есть открытая окрестность точки x . Получаем, $X \setminus F$ открыто и, следовательно, F замкнуто в X . $\square$

Теорема 5.28. Хаусдорфовое счетно компактное пространство с первой аксиомой счетности регулярно.

Доказательство. Пусть X есть хаусдорфово счетно компактное пространство. Докажем, что X регулярно. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X и $x \notin F$. Из предложения 5.16 вытекает, что F счетно компактно. Из леммы 5.26 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F . $\square$

5.1.4 Финально компактные пространства

Пространство X называется *финально компактным* пространством, если для любого открытого покрытия пространства X существует не более чем счетное подпокрытие.

Из определений вытекает

Предложение 5.29. *Компактные пространства финально компактны.*

Предложение 5.30. *Пространство компактно если и только если оно счетно компактно и финально компактно.*

Предложение 5.31. *Замкнутое подпространство финально компактного пространства финально компактно.*

Доказательство. Пусть X финально компактное пространство и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Докажем, что Y финально компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y . Для каждого $\alpha \in A$, существует открытое подмножество V_α пространства X , для которого $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$. Положим $V = X \setminus Y$. Семейство $\gamma' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием финально компактного пространства X . Так как X финально компактно, то существует не более чем счетное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in B\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ' . Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Предложение 5.32. *Непрерывный образ финально компактного пространства финально компактен.*

Доказательство. Пусть X финально компактное пространство, Y пространство и $f: X \rightarrow Y$ непрерывное сюръективное отображение. Докажем, что Y финально компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y . Так как отображение f непрерывно и сюръективно, то семейство $\gamma' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием X . Так как X финально компактно, то существует не более чем счетное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in B\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ' . Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Предложение 5.33. *Если пространство X является объединением не более чем счетным семейства финально компактных подпространств, то X финально компактно.*

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где X_n финально компактно. Пусть γ открытое покрытие X . Для $n \in \mathbb{N}$ возьмем не более чем счетное $\mu_n \subset \gamma$, для которого $X_n \subset \bigcup \mu_n$. Тогда $\mu = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n$ не более чем счетное покрытие X . $\square$

Лемма 5.34. *Пусть X регулярное пространство, P и F замкнутые непесекающиеся подмножества X , пространство P финально компактно. Тогда существует последовательность открытых множеств $(U_n)_n$, для которой $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\bar{U}_n \cap F = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ топология X . Положим $\gamma = \{U \in \mathcal{T} : \bar{U} \cap F = \emptyset\}$. Так как X регулярно, то $\bigcup \gamma = X \setminus F$. Так как P линделефово, то $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ для некоторого $(U_n)_n \subset \gamma$. $\square$

Регулярное финально компактное пространство называется *линделефовым* пространством.

Теорема 5.35. *Линделефово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X регулярное финально компактное пространство. Пусть P и F замкнутые непересекающиеся подмножества X . Тогда, в силу предложения 5.31, пространства P и F финально компактны. Из леммы 5.34 вытекает, что существуют последовательности $(U_n)_n$ и $(V_n)_n$ открытых множеств, для которых $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ и $\bar{U}_n \cap F = \emptyset$, $\bar{V}_n \cap P = \emptyset$ для $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\begin{aligned}\tilde{U}_n &= U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_i, & \tilde{V}_n &= V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_i, \\ U &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_n, & V &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n.\end{aligned}$$

Тогда $P \subset U$ и $F \subset V$. Так как $U_n \cap V_m = \emptyset$ для $n, m \in \mathbb{N}$, то $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Предложение 5.36. *В финально компактном пространстве любое дискретное и замкнутое подмножество не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть Y дискретное и замкнутое подпространство финально компактного пространства X . Из предложения 5.31 вытекает, что Y финально компактное пространство.

Так как Y дискретно, то $\gamma = \{\{y\} : y \in Y\}$ является открытым в Y покрытием пространства Y . Так Y финально компактно и единственное подпокрытие γ является только само γ , то $|\gamma| \leq \omega$. Следовательно, $|Y| \leq \omega$. $\square$

Предложение 5.37. *Если X пространство со второй аксиомой счетности, то X финально компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X и γ открытое покрытие X . Положим $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{B} : U \subset V \text{ для некоторого } V \in \gamma\}$. Так $\mathcal{B}$ база и γ открытое покрытие, то $\mathcal{U}$ покрытие X . Для $U \in \mathcal{U}$ зафиксируем $V_U \in \gamma$, такое что $U \subset V_U$. Тогда $\{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ . $\square$

Теорема 5.38. *Регулярное со второй аксиомой счетности пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X есть регулярное со второй аксиомой счетности пространство. Из предложения 5.37 вытекает, что X линделефово. Из теоремы 5.35 вытекает, что X нормально. $\square$

5.1.5 Метрические и метризуемые пространства, III

Теорема 5.39. Пусть X метризуемое пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X удовлетворяет второй аксиоме счетности;
- (2) X финально компактно.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 5.37. Докажем (1) $\Leftarrow$ (2). Из предложения 5.36 вытекает, что в X любое дискретное и замкнутое подмножество не более чем счетно. Из теоремы 2.17 вытекает, что X удовлетворяет второй аксиоме счетности. $\square$

Теорема 5.40. Пусть X метризуемое пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X компактно;
- (2) X счетно компактно;
- (3) X секвенциально компактно.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 5.15. Так как метризуемое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности (предложение 2.12), то из теоремы 5.22 вытекает (2) $\Leftarrow$ (3).

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Из предложения 5.23(2) вытекает, что любое дискретное и замкнутое подмножество X конечно. Из теоремы 2.17 вытекает, что X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Из теоремы 5.39 вытекает, что X финально компактно. Так как X счетно компактно и финально компактно пространство, то, в силу предложения 5.30, пространство X компактно. $\square$

Теорема 5.41. Пусть X компактное метризуемое пространство. Тогда X удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Доказательство. Так как X компактное пространство, то X финально компактно (предложение 5.29). Из теоремы 5.39 вытекает, что X удовлетворяет второй аксиоме счетности. $\square$

5.2 Дополнение

5.3 Задачи

5.3.1 Компактность и отделимость

Задача 5.1. Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если оно замкнуто в любом хаусдорфовом пространстве, содержащем его в качестве подпространства.

Задача 5.2. Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если любое взаимно однозначное непрерывное отображение этого пространства на произвольное хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

5.3.2 Точки полного накопления

Точка x топологического пространства X называется *точкой полного накопления* множества $Y \subset X$, если для любой её окрестности U имеет место равенство $|Y \cap U| = |Y|$.

Задача 5.3. Докажите, что топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждое бесконечное множество в X имеет точку полного накопления.

Задача 5.4. Докажите, что топологическое пространство X счетно компактно тогда и только тогда, когда каждое счетное множество в X имеет точку полного накопления.

5.3.3 Разреженные пространства и пространства без изолированных точек

Задача 5.5. Докажите, что счетнокомпактное регулярное пространство без изолированных точек имеет мощность не меньше 2^ω .

Пространство называется *разреженным*, если в любом непустом подпространстве есть изолированная точка.

Задача 5.6. Пусть X пространство и $U = \{x \in X : \text{некоторая окрестность } x \text{ разрежена}\}$. Тогда U разреженное пространство. Если $F = X \setminus U$ не пусто, то в F нет изолированных точек.

Задача 5.7. Докажите, что каждое разреженное сепарабельное метризуемое пространство не более чем счетно.

Задача 5.8. Докажите, что каждое несчетное сепарабельное метризуемое пространство содержит подпространство без изолированных точек.

Задача 5.9. Докажите, что каждое несчетное компактное метризуемое пространство имеет мощность не меньше 2^ω .

Задача 5.10. Докажите, что каждое несчетное замкнутое подмножество прямой имеет мощность 2^ω .

Задача 5.11. Пусть X разреженное компактное хаусдорфово пространство, Y хаусдорфово пространство и $f : X \rightarrow Y$ непрерывное отображение. Показать, что $f(X)$ разреженное компактное хаусдорфово пространство.

Задача 5.12. Докажите, что метризуемое компактное хаусдорфово пространство разреженно тогда и только тогда, когда его мощность не более чем счетная.

Задача 5.13. Докажите, что каждое разреженное компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности не более чем счетно.

Задача 5.14. Докажите, что каждое несчетное компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности имеет мощность не менее 2^ω .

Задача 5.15. Докажите, что каждое компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности имеет мощность не более 2^ω .

Задача 5.16. Докажите, что каждый последовательный ординал является разреженным компактом.

Задача 5.17. Докажите, что ω_1 счетнокомпактное не компактное нормальное пространство с первой аксиомой счетности.

5.3.4 Разное

Задача 5.18. Какие подмножества прямой Зоргенфрея являются компактными?

Задача 5.19. Докажите, что любое подмножество прямой Зоргенфрея финально компактно.

Задача 5.20. Докажите, что пространство "Две стрелки Александра" компактно, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Задача 5.21. Докажите, что любое подмножество пространства "Две стрелки Александра" финально компактно.

Задача 5.22. Докажите, что любое подмножество сепарабельного линейно упорядоченного пространства финально компактно и сепарабельно.

Задача 5.23. Докажите, что если любая непрерывная функция на метризуемом пространстве ограничена, то пространство компактно

Задача 5.24. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве ограничена, то пространство компактно.

Задача 5.25. Докажите, что лексикографически упорядоченный квадрат компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, и не сепарабелен. Докажите, что подмножество $(0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1) \times \{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство "Две стрелки Александра") компактно, сепарабельно и не удовлетворяет второй аксиоме счетности (следовательно не метризуемо).

Задача 5.26. Докажите, что отображение $f: X \rightarrow Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.

Задача 5.27. Докажите, что в хаусдорфовом компактном пространстве объединение счетного числа нигде не плотных подмножеств имеет пустую внутренность.

Задача 5.28. Приведите пример метрического пространства и его замкнутого, ограниченного, не компактного подмножества.

Задача 5.29. Докажите, что непустое хаусдорфово компактное пространство X без изолированных точек несчетно. Докажите, что $|X| \geq 2^\omega$.

Задача 5.30. Приведите пример множества и топологически эквивалентных метрик на нем таких, что одна метрика полна, а другая не полна. Докажите, что на локально компактном, не компактном метризуемом пространстве существуют полная метрика и не полная метрика.

Задача 5.31. Приведите пример несепарабельного компакта с первой аксиомой счётности.

Глава 6

Фильтры и направленности

Темы в этой главе

Тема 16. Базы фильтров, фильтры и ультрафильтры. Пределы и предельные точки фильтров. Фильтры в хаусдорфовых пространствах.

Тема 17. Фильтры и непрерывные отображения. Критерии компактности с помощью фильтров. Теорема Александера.

6.1 Фильтры и направленности

6.1.1 Фильтры и ультрафильтры

Определение фильтров и баз фильтров

Пусть X множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ множества X называют *фильтром* на множестве X , если выполняются условия:

- (Filtr₁) $\emptyset \notin \mathcal{F} \neq \emptyset$;
- (Filtr₂) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- (Filtr₃) если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$.

Семейство подмножеств $\mathcal{B}$ множества X называется *базой фильтра* $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ и для каждого $A \in \mathcal{F}$ найдется $B \in \mathcal{B}$, для которого $B \subset A$. Для базы $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{F}$ выполняются условия:

- (FB₁) $\emptyset \notin \mathcal{B} \neq \emptyset$;
- (FB₂) если $A, B \in \mathcal{B}$, то $C \subset A \cap B$ для некоторого $C \in \mathcal{B}$.

Семейство подмножеств $\mathcal{B}$ множества X называется *базой фильтра* на множестве X , если для $\mathcal{B}$ выполняются условия (FB₁) и (FB₂).

Тут схожие, но различные понятия: (1) база (некоторого конкретного) фильтра $\mathcal{F}$ и (2) база фильтра (без привязки к конкретному фильтру).

Тут аналогия с понятием база топологии.

Фильтры можно охарактеризовать, как базы фильтров, для которых выполняется условие (Filtr₃).

Обозначим

$$\mathcal{F}_B^X = \{M \subset X : A \subset M \text{ для некоторого } A \in B\}.$$

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 6.1. Семейство $\mathcal{F}_B^X$ является фильтром и $\mathcal{F}_B^X$ единственный фильтр на X , для которого B является базой фильтра.

Фильтр $\mathcal{F}_B^X$ называется *фильтром, порожденный базой фильтра B* .

Пусть $Y \subset X$ и $\mathcal{Q}$ фильтр на Y . Тогда $\mathcal{Q}$ является базой фильтра на множестве X . Фильтр $\mathcal{F}_Q^X$ также называется *фильтром, продолжающий фильтр $\mathcal{Q}$ на X* .

Если $\mathcal{F}$ есть фильтр на X и $Y \in \mathcal{F}$, то семейство

$$\mathcal{F}|_Y = \{M \cap Y : M \in \mathcal{F}\}$$

совпадает с $\{M \subset Y : M \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$ и является фильтром на Y . Фильтр $\mathcal{F}|_Y$ называется *ограничением фильтра $\mathcal{F}$ на Y* . Отметим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{F}|_Y}^X.$$

Зачастую, фильтры $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{F}_Q^X$ отождествляются, то есть считается, что фильтр $\mathcal{Q}$ на $Y \subset X$ также является фильтром (как фильтр $\mathcal{F}_Q^X$) на X .

Определение ультрафильтров, основные свойства

Все фильтры на множестве X частично упорядочены порядком включения как семейства множеств на X . Минимальный фильтр на X , это семейство $\{X\}$. Максимальные элементы в ч.у.м всех фильтров на множестве X называются *ультрафильтрами* на множестве X . Другими словами, фильтр $\mathcal{U}$ является ультрафильтром, если из того, что $\mathcal{F}$ фильтр и $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ вытекает $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Теорема 6.2. Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ есть множество всех фильтров на множестве X . В силу следствия 1.13 леммы Цорна, для доказательства теоремы достаточно доказать, что если $\mathfrak{C}$ цепь в $\mathfrak{F}$, то $\mathcal{F} = \bigcup \mathfrak{C} \in \mathfrak{F}$.

Проверим (Filtr₁). Очевидно, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Так как $\emptyset \notin \mathcal{P}$ для $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$, то $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Проверим (Filtr₂). Пусть $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда $A \in \mathcal{F}_A$ и $B \in \mathcal{F}_B$ для некоторых $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B \in \mathfrak{C}$. Так как $\mathfrak{C}$ цепь, то $\mathcal{P} = \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B$ совпадает либо с $\mathcal{F}_A$, либо с $\mathcal{F}_B$. Тогда $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$ и $A, B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P}$ фильтр, то $A \cap B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Проверим (Filtr₃). Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$. Тогда $A \in \mathcal{P}$ для некоторого $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$. Так как $\mathcal{P}$ фильтр, то $B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$, то $B \in \mathcal{F}$. $\square$

Предложение 6.3. Пусть $\mathcal{U}$ фильтр на множестве X . Следующие условия эквивалентны:

- (A) $\mathcal{U}$ является ультрафильтром;

(B) если $A \subset X$, то либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \setminus A \in \mathfrak{U}$.

Доказательство. Докажем $(A) \Rightarrow (B)$. Положим $\mathcal{B} = \{A \cap M : M \in \mathfrak{U}\}$.

Если $\emptyset \in \mathcal{B}$, то $A \cap M = \emptyset$ для некоторого $M \in \mathfrak{U}$. Тогда $M \subset X \setminus A$ и, следовательно, $X \setminus A \in \mathfrak{U}$.

Рассмотрим случай $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B}$ является базой фильтра. Пусть $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$ есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Так как $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$ и $\mathfrak{U}$ является ультрафильтром, то $\mathfrak{U} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$. Следовательно, $\mathcal{B} \subset \mathfrak{U}$. Так как $A = X \cap A \in \mathcal{B}$, то $A \in \mathfrak{U}$.

Докажем $(B) \Rightarrow (A)$. Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр на X и $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}$. Нужно доказать, что $\mathfrak{U} = \mathcal{F}$. Пусть $A \in \mathcal{F}$. Так как в фильтре любые два элемента имеют непустое пересечение, то $X \setminus A \notin \mathcal{F}$ и, следовательно, $X \setminus A \notin \mathfrak{U}$. Из (B) вытекает $A \in \mathfrak{U}$. $\square$

Предложение 6.4. Пусть $\mathfrak{U}$ фильтр на множестве X . Следующие условия эквивалентны:

(A) $\mathfrak{U}$ является ультрафильтром;

(U₁) если $\mathcal{M}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcup \mathcal{M} = X$, то $M \in \mathfrak{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{M}$;

(U₂) если $\mathcal{M}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcup \mathcal{M} \in \mathfrak{U}$, то $M \in \mathfrak{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Докажем $(A) \Rightarrow (U_2)$. Предположим противное. Тогда существует конечное семейство $\mathcal{M}$ подмножеств множества X , такое что $\bigcup \mathcal{M} \in \mathfrak{U}$ и $M \notin \mathfrak{U}$ для всех $M \in \mathcal{M}$. Из предложения 6.3 вытекает, что $X \setminus M \in \mathfrak{U}$ для всех $M \in \mathcal{M}$. Положим $\mathcal{L} = \{X \setminus M : M \in \mathcal{M}\}$. Тогда $\mathcal{L} \subset \mathfrak{U}$. Так как $\mathcal{L}$ конечное семейство, то $\bigcap \mathcal{L} \in \mathfrak{U}$. Следовательно, $\bigcup \mathcal{M} = X \setminus \bigcap \mathcal{L} \notin \mathfrak{U}$. Противоречие.

Импликация $(U_2) \Rightarrow (U_1)$ вытекает из того, что $X \in \mathfrak{U}$.

Докажем $(U_1) \Rightarrow (A)$. В силу предложения 6.3, достаточно показать, что если $A \subset X$, то либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. Положим $\mathcal{M} = \{A, X \setminus A\}$. Так как $X = \bigcup \mathcal{M}$, то из (U₁) вытекает, что либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. $\square$

Предложение 6.5. Пусть $\mathcal{F}$ фильтр на множестве X . Если $\mathcal{L}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcap \mathcal{L} \notin \mathcal{F}$, то $L \notin \mathcal{F}$ для некоторого $L \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Предположим противное, то есть $L \in \mathcal{F}$ для всех $L \in \mathcal{L}$, то есть $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. Так как $\mathcal{F}$ фильтр, то $\bigcap \mathcal{L} \in \mathcal{F}$. Противоречие. $\square$

Предложение 6.6. Пусть $\mathfrak{U}$ фильтр на множестве X и $Y \in \mathfrak{U}$. Следующие условия эквивалентны:

(A) $\mathfrak{U}$ является ультрафильтром на X ;

(Y) $\mathfrak{U}|_Y$ является ультрафильтром на Y .

Доказательство. Докажем $(A) \Rightarrow (Y)$. В силу предложения 6.3, достаточно показать, что если $A \subset Y$, то либо $A \in \mathfrak{U}|_Y$, либо $Y \setminus A \in \mathfrak{U}|_Y$. Так как $\mathfrak{U}$ ультрафильтр, то из предложения 6.3 вытекает, что либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. Если $A \in \mathfrak{U}$, то, учитывая $A \subset Y$, получаем $A \in \mathfrak{U}|_Y$. Рассмотрим случай $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. Так как $Y \in \mathfrak{U}$, то $Y \setminus A = Y \cap (X \setminus A) \in \mathfrak{U}$ и, следовательно, $Y \setminus A \in \mathfrak{U}|_Y$.

Докажем $(Y) \Rightarrow (A)$. В силу предложения 6.3, достаточно показать, что если $A \subset X$, то либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. Положим $\tilde{A} = A \cap Y$. Если $\tilde{A} \in \mathfrak{U}|_Y$, то $A \in \mathfrak{U}$. Рассмотрим случай $\tilde{A} \notin \mathfrak{U}|_Y$. Так как $\mathfrak{U}|_Y$ ультрафильтр, то, в силу предложения 6.3, $Y \setminus \tilde{A} \in \mathfrak{U}|_Y$ и, следовательно, $Y \setminus \tilde{A} \in \mathfrak{U}$. Так как $Y \setminus \tilde{A} \subset X \setminus A$, то $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. $\square$

Свободные и главные фильтры

Пусть X множество. Фильтр $\mathcal{F}$ на X называется *главным*, если $\mathcal{F} = \{M \subset X : x \in M\}$ для некоторого $x \in X$. Очевидно, главный фильтр является ультрафильтром. Главный фильтр $\mathcal{F}$ будем называть *главным ультрафильтром*, порожденный точкой x . Фильтр $\mathcal{F}$ на X называется *свободным*, если $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Предложение 6.7. *Не главный ультрафильтр является свободным.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ не главный ультрафильтр на X . Предположим, что $\mathcal{F}$ не свободный ультрафильтр. Пусть $x \in \bigcap \mathcal{F}$ и $\mathfrak{U} = \{M \subset X : x \in M\}$ есть главный ультрафильтр, порожденный точкой x . Тогда $\mathcal{F} \subset \mathfrak{U}$. Так как $\mathcal{F}$ ультрафильтр, то $\mathcal{F} = \mathfrak{U}$ и $\mathcal{F}$ главный ультрафильтр. Противоречие. $\square$

Отображение фильтров и баз фильтров

Пусть $f : X \rightarrow Y$ есть отображения множеств, $\mathcal{F}$ фильтр на X и $\mathcal{B}$ база фильтра на X . Обозначим

$$f(\mathcal{B}) = \{f(M) : M \in \mathcal{B}\}.$$

Утверждение 6.8. *$f(\mathcal{B})$ является базой фильтра на Y .*

Доказательство. Условие (FB_1) для $f(\mathcal{B})$ очевидно. Проверим (FB_2) . Пусть $A, B \in f(\mathcal{B})$. Тогда $A = f(\tilde{A})$ и $B = f(\tilde{B})$ для некоторых $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{B}$. Так как $\mathcal{B}$ база фильтра и для $\mathcal{B}$ выполняется (FB_2) , то существует $\tilde{C} \in \mathcal{B}$, такое что $\tilde{C} \subset \tilde{A} \cap \tilde{B}$. Положим $C = f(\tilde{C})$. Тогда $C \in f(\mathcal{B})$ и $C \subset A \cap B$. $\square$

Утверждение 6.9. *$f(\mathcal{F})$ является фильтром на $f(X)$.*

Доказательство. Из утверждения 6.8 вытекает, что $f(\mathcal{F})$ является базой фильтра. Проверим (Filtr_3) . Пусть если $A \in f(\mathcal{F})$ и $A \subset B \subset f(X)$. Тогда $A = f(\tilde{A})$ для некоторого $\tilde{A} \in \mathcal{F}$. Положим $\tilde{B} = f^{-1}(B)$. Тогда $\tilde{A} \subset \tilde{B}$. Так как $\mathcal{F}$ фильтр, то $\tilde{B} \in \mathcal{F}$. Следовательно $B = f(\tilde{B}) \in f(\mathcal{F})$. $\square$

Фильтр $\mathcal{F}_{f(\mathcal{F})}^Y$, продолжающий фильтр $f(\mathcal{F})$ на Y , будем называть *образом фильтра $\mathcal{F}$ при отображении f* и будем обозначать как $f(\mathcal{F})$.

Утверждение 6.10. Пусть $\mathcal{U}$ есть ультрафильтр на X . Образ $f(\mathcal{U})$ ультрафильтра $\mathcal{U}$ при отображении f является ультрафильтром.

Доказательство. В силу предложения 6.6, предложение достаточно доказать для случая $Y = f(X)$. В силу предложения 6.3, достаточно показать, что если $A \subset Y$, то либо $A \in f(\mathcal{U})$, либо $Y \setminus A \in f(\mathcal{U})$. Положим $\tilde{A} = f^{-1}(A)$. Так как $\mathcal{U}$ ультрафильтр, то, в силу предложения 6.3, либо $\tilde{A} \in \mathcal{U}$, либо $X \setminus \tilde{A} \in \mathcal{U}$. Так как $A = f(\tilde{A})$ и $Y \setminus A = f(X \setminus \tilde{A})$, то либо $A \in f(\mathcal{U})$, либо $Y \setminus A \in f(\mathcal{U})$. $\square$

6.1.2 Фильтры и ультрафильтры в топологических пространствах

Пределы и предельные точки фильтров и баз фильтров

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, $\mathcal{F}$ фильтр на X , $\mathcal{B}$ база фильтра и $x \in X$.

Точка x называется *пределом фильтра* $\mathcal{F}$, если каждая ее окрестность есть элемент $\mathcal{F}$. В этом случае говорят, что фильтр $\mathcal{F}$ *сходится к точке* x , и пишут $x \in \lim \mathcal{F}$.

Точка x называется *пределом базы фильтра* $\mathcal{B}$, если x является пределом фильтра $\mathcal{F}_B^X$, порожденного базой фильтра $\mathcal{B}$. В этом случае говорят, что база фильтра $\mathcal{B}$ *сходится к* x , и пишут $x \in \lim \mathcal{B}$. Очевидно, что $x \in \lim \mathcal{B}$ в том и только том случае, если любая окрестность точки x содержит элемент $\mathcal{B}$.

Точка x называется *предельной точкой фильтра* $\mathcal{F}$, если она принадлежит замыканию каждого элемента из $\mathcal{F}$. Очевидно, что x — предельная точка фильтра $\mathcal{F}$ в том и только том случае, если любая ее окрестность пересекает все элементы из $\mathcal{F}$.

Точка x называется *предельной точкой базы фильтра* $\mathcal{B}$, если x является предельной точкой фильтра $\mathcal{F}_B^X$, порожденного базой фильтра $\mathcal{B}$. Очевидно, что x — предельная точка база фильтра $\mathcal{B}$ в том и только том случае, если любая ее окрестность пересекает все элементы из $\mathcal{B}$.

Отметим, что

$$\bigcap_{M \in \mathcal{F}} \overline{M} \text{ — предельные точки для фильтра } \mathcal{F},$$

$$\bigcap_{M \in \mathcal{B}} \overline{M} \text{ — предельные точки для базы фильтра } \mathcal{B}.$$

Предложение 6.11. Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр на пространстве X , $x \in X$ и $\mathcal{P}$ предбаза X . Следующие условия эквивалентны:

- (1) x предел фильтра $\mathcal{F}$;
- (2) если $x \in W \in \mathcal{P}$, то $W \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Импликация (1) $\rightarrow$ (2) очевидна. Докажем (2) $\rightarrow$ (1). Пусть U окрестность x . Так как $\mathcal{P}$ предбаза, то существует конечное $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}$, для которого $\bigcap \mathcal{W} \subset U$. Из (2) вытекает $\mathcal{W} \subset \mathcal{F}$. Из (Filtr_2) вытекает, что $\bigcap \mathcal{W} \in \mathcal{F}$. Из (Filtr_3) вытекает, что $U \in \mathcal{F}$. $\square$

Предложение 6.12. Пусть $\mathfrak{U}$ есть ультрафильтр на пространстве X . Любая предельная точка $\mathfrak{U}$ является пределом для $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть x есть предельная точка для $\mathfrak{U}$ и U есть окрестность x . Положим $\mathcal{B} = \{U \cap M : M \in \mathfrak{U}\}$. Так как x предельная точка для $\mathfrak{U}$, то $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой фильтра. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$ есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Тогда $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}$. Так как $\mathfrak{U}$ ультрафильтр, то $\mathfrak{U} = \mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{B} \subset \mathfrak{U}$. Так как $U = U \cap X \in \mathcal{B}$, то $U \in \mathfrak{U}$. $\square$

Предложение 6.13. Пусть X пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) $x \in \overline{M}$;
- (2) x является предельной точкой для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ на X , для которого $M \in \mathcal{F}$;
- (3) x является пределом для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ на X , для которого $M \in \mathcal{F}$;
- (4) x является пределом для некоторого ультрафильтра $\mathfrak{U}$ на X , для которого $M \in \mathfrak{U}$.

Доказательство. Импликации (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) очевидны.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Так как $M \in \mathcal{F}$ и x предельная точка для $\mathcal{F}$, то $x \in \overline{M}$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (3). Положим $\mathcal{B} = \{U \cap M : U \text{ окрестность точки } x\}$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой фильтра и сходится к x . Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$ есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Тогда $M \in \mathcal{F}$ и фильтр $\mathcal{F}$ сходится к x .

Докажем (3) $\Rightarrow$ (4). Из теоремы 6.2 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$, который содержит $\mathcal{F}$. Тогда $M \in \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}$ сходится к x . $\square$

Аксиомы отделимости

Теорема 6.14. Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

- (1) X хаусдорфово пространство;
- (2) у любого фильтра на X не более одного предела;
- (3) у любого ультрафильтра на X не более одного предела.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, то есть что X не хаусдорфово. Пусть $x, y \in X$ различные точки, у которых любые окрестности пересекаются. Положим

$$\mathcal{B} = \{U \cap V : U \text{ и } V \text{ окрестности точек } x \text{ и } y, \text{ соответственно}\}.$$

Семейство $\mathcal{B}$ является базой фильтра, которая сходится к x и y . Из теоремы 6.2 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$, который содержит $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X \supset \mathcal{B}$. Тогда ультрафильтр $\mathfrak{U}$ сходится к различным точкам x и y . Противоречие.

Докажем $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть фильтр $\mathcal{F}$ сходится к точке x . Пусть $y \in X \setminus \{x\}$. Так как X хаусдорфово, то существуют непересекающиеся окрестности U и V точек x и y . Так как $\mathcal{F}$ сходится к x , то $U \in \mathcal{F}$. Тогда $V \subset X \setminus U \notin \mathcal{F}$. Следовательно, $V \notin \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ не сходится к y . $\square$

В силу доказанной теоремы, множество пределов $\lim \mathcal{F}$ фильтра $\mathcal{F}$ на хаусдорфовом пространстве X состоит не более чем из одной точки. В этом случае часто пишут $x = \lim \mathcal{F}$ вместо $x \in \lim \mathcal{F}$.

Непрерывные отображения

Пусть X множество, $\mathcal{F}$ фильтр на X , Y топологическое пространство и $f: X \rightarrow Y$ отображение. Множество $\lim f(\mathcal{F})$ состоит из предельных точек фильтра $f(\mathcal{F})$, это множество также обозначается как $\lim_{x \rightarrow \mathcal{F}} f(x)$. Если пространство Y хаусдорфово, то, в силу теоремы 6.14, в множестве $\lim f(\mathcal{F})$ не более одного элемента. В этом случае выражение $y = \lim_{x \rightarrow \mathcal{F}} f(x)$ означает, что y есть единственный предел фильтра $f(\mathcal{F})$.

Теорема 6.15. Пусть $f: X \rightarrow Y$ отображение топологических пространств и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) отображение f непрерывно в x ;
- (2) если $\mathcal{F}$ фильтр на X и x является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является предельной точкой для фильтра $f(\mathcal{F})$;
- (3) если $\mathcal{F}$ фильтр на X и x является пределом для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является пределом для фильтра $f(\mathcal{F})$;
- (4) если $\mathcal{U}$ ультрафильтр на X и x является пределом для ультрафильтра $\mathcal{U}$, то $f(x)$ является пределом для ультрафильтра $f(\mathcal{U})$.

Доказательство. Импликация $(3) \Rightarrow (4)$ очевидна.

Докажем $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $M \in \mathcal{F}$. Так как x является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$, то $x \in \overline{M}$. Из утверждения 3.10 вытекает, что $f(x) \in \overline{f(M)}$. Следовательно, $f(x)$ предельная точка для $f(\mathcal{F})$.

Докажем $(2) \Rightarrow (1)$. В силу предложения 3.10, достаточно показать, что если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{f(M)}$. Положим $\mathcal{F} = \{L \subset X : M \subset L\}$. Точка x является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$. Тогда $f(x)$ является предельной точкой для фильтра $f(\mathcal{F})$. Следовательно, $f(x) \in \overline{f(M)}$.

Докажем $(1) \Rightarrow (3)$. Пусть U окрестность $f(x)$. Тогда $f(V) \subset U$ для некоторой окрестности V точки x . Так как $\mathcal{F}$ сходится к x , то $M \subset V$ для некоторого $M \in \mathcal{F}$. Тогда $f(M) \in f(\mathcal{F})$ и $f(M) \subset U$.

Докажем $(3) \Rightarrow (1)$. Пусть U окрестность $f(x)$. Пусть $\mathcal{F} = \{V \subset X : V \text{ окрестность точки } x\}$. Фильтр окрестностей $\mathcal{F}$ сходится к x . Тогда $f(\mathcal{F})$ сходится к $f(x)$. Следовательно, $f(V) \subset U$ для некоторой окрестности $V \in \mathcal{F}$ точки x .

Докажем $(4) \Rightarrow (1)$. В силу предложения 3.10, достаточно показать, что если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{f(M)}$. Из предложения 6.13 вытекает, что x является пределом для некоторого ультрафильтра $\mathcal{U}$ на X , для которого $M \in \mathcal{U}$. Тогда $f(\mathcal{U})$ сходится к $f(x)$. Следовательно, $f(x) \in \overline{f(M)}$. $\square$

Так как отображение непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке (утверждение 3.9), то из теоремы 6.15 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.16. Пусть $f : X \rightarrow Y$ отображение топологических пространств. Следующие условия эквивалентны:

- (1) отображение f непрерывно;
- (2) если $\mathcal{F}$ фильтр на X и $x \in X$ является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является предельной точкой для фильтра $f(\mathcal{F})$;
- (3) если $\mathcal{F}$ фильтр на X и $x \in X$ является пределом для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является пределом для фильтра $f(\mathcal{F})$;
- (4) если $\mathcal{U}$ ультрафильтр на X и $x \in X$ является пределом для ультрафильтра $\mathcal{U}$, то $f(x)$ является пределом для ультрафильтра $f(\mathcal{U})$.

Компактность

Предложение 6.17. Пусть X компактное пространство и $\mathcal{B}$ база фильтра, состоящая из замкнутых множеств. Тогда $F = \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$ и для любой окрестности U множества F существует $B \in \mathcal{B}$, такое что $F \subset B \subset U$.

Доказательство. Предположим противное, $F = \bigcap \mathcal{B} = \emptyset$. Тогда $\gamma = \{X \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$ открытое покрытие X . Так как X компактно, то существует конечное подпокрытие $\mu \subset \gamma$. Тогда $\mu = \{X \setminus B : B \in \mathcal{M}\}$ для некоторого конечного $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$. Так как $\bigcup \mu = X$, то $\bigcap \mathcal{M} = \emptyset$. Противоречие с тем, что $\mathcal{B}$ база фильтра.

Докажем, что существует $B \in \mathcal{B}$, такое что $F \subset B \subset U$ для любой открытой окрестности U множества F . Предположим противное, то есть $B \cap U \neq \emptyset$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Тогда семейство $\mathcal{Q} = \{B \cap U : B \in \mathcal{B}\}$ состоит из непустых множеств и, следовательно, является базой фильтра, состоящая из замкнутых множеств. Из доказанного вытекает, что $Q = \bigcap \mathcal{Q}$ не пусто. Ясно, $Q \subset F$. Противоречие с $F \subset U$ и $Q \subset X \setminus U$. $\square$

Теорема 6.18. Пусть X топологическое пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X компактное пространство;
- (2) если $\mathcal{B}$ база фильтра, состоящая из замкнутых множеств, то $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$;
- (3) у любого фильтра $\mathcal{F}$ на X есть предельные точки;
- (4) любой ультрафильтр $\mathcal{U}$ на X сходится к некоторой точке пространства X .

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 6.17.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное. Тогда существует открытое покрытие γ пространства X без конечных подпокрытий. Тогда $\mathcal{B} = \{X \setminus \bigcup \mu : \mu \subset \gamma, |\mu| < \omega\}$ является базой фильтра с пустым пересечением и состоящей из замкнутых множеств. Противоречие.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр на X . Тогда $\mathcal{B} = \{\overline{M} : M \in \mathcal{F}\}$ является базой фильтра, состоящая из замкнутых множеств. Из (2) вытекает, что $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Множество $\bigcap \mathcal{B}$ является множеством предельных точек для фильтра $\mathcal{F}$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Из (3) вытекает, что у $\mathcal{F}$ есть предельная точка x . Тогда $x \in \bigcap \mathcal{B}$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (4). Из (2) вытекает, у ультрафильтра $\mathcal{U}$ есть некоторая предельная точка x . Из предложения 6.12 вытекает, что x есть предел $\mathcal{U}$.

Докажем (4) $\Rightarrow$ (3). Из теоремы 6.2 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathcal{U}$, который содержит $\mathcal{F}$. Из (2) вытекает, что $\mathcal{U}$ сходится к некоторой точке $x \in X$. Тогда x предельная точка для $\mathcal{F}$. $\square$

Теорема 6.19 (теорема Александера). Пусть X топологическое пространство и $\mathcal{P}$ предбаза X . Следующие условия эквивалентны:

- (1) X компактное пространство;
- (2) для любого открытого покрытия γ , состоящего из элементов $\mathcal{P}$ (т.е. $\gamma \subset \mathcal{P}$), существует конечное подпокрытие.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, то что X не компактно. Из теоремы 6.18 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathcal{U}$ на X , не сходящийся ни к какой точке X .

Покажем, что для каждой точки $x \in X$ существует $W_x \in \mathcal{P}$, такое что $W_x \notin \mathcal{U}$. Так как x не предел $\mathcal{U}$, то $U \notin \mathcal{U}$ для некоторой окрестности U точки x . Так как $\mathcal{P}$ предбаза X , то $x \in \bigcap \mathcal{W} \subset U$ для некоторого конечного $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}$. Тогда $\bigcap \mathcal{W} \notin \mathcal{U}$. Из предложения 6.5 вытекает, что $W_x \notin \mathcal{U}$ для некоторого $W_x \in \mathcal{W} \subset \mathcal{P}$.

Семейство $\gamma = \{W_x : x \in X\} \subset \mathcal{P}$ является открытым покрытием X элементами $\mathcal{P}$ и $W \notin \mathcal{U}$ для $W \in \gamma$. Из (2) вытекает, что существует конечное подпокрытие $\mu \subset \gamma$ покрытия γ . Так как $\bigcup \mu = X$, то из предложения 6.4 вытекает, что $W \in \mathcal{U}$ для некоторого $W \in \mu$. Противоречие с тем, что $\mu \subset \gamma$ и $W \notin \mathcal{U}$ для $W \in \gamma$. $\square$

6.2 Дополнение

6.2.1 Направленности

Множество Σ с отношением $\leq$ называется *направленным множеством*, если выполняются условия

- (Net₁) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$;
- (Net₂) $x \leq x$;
- (Net₃) для любых x и y существует z , такой что $x \leq z$ и $y \leq z$.

Пример направленного множества — натуральные числа $\mathbb{N}$.

Направленностью называется отображение направленного множества Σ в топологическое пространство X , которое обычно записывается как индексированное множество $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ или $(x_\sigma)_\sigma$.

Типичный пример направленности — последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ *сходится к точке* x , если для любой окрестности U точки x существует $\sigma_0 \in \Sigma$, такой что $x_\sigma \in U$ для $\sigma \geq \sigma_0$.

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ *касается точки* x , если для любой окрестности U точки x и любого $\sigma_0 \in \Sigma$ существует $\sigma \geq \sigma_0$, такой что $x_\sigma \in U$.

Обозначим

$$\Sigma_{\sigma_0} = \{\sigma \in \Sigma : \sigma \geq \sigma_0\}.$$

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ *касается точки* x , если и только если

$$x \in \overline{\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma_{\sigma_0}\}}$$

для $\sigma_0 \in \Sigma$.

На направленном множестве Σ есть база фильтра порожденная порядком $\leq$:

$$\mathcal{B}_\Sigma = \{\Sigma_{\sigma_0} : \sigma_0 \in \Sigma\}.$$

Образ база фильтра $\mathcal{B}_\Sigma$ при отображении $\sigma \mapsto x_\sigma$:

$$\mathcal{B}_{(x_\sigma)_\sigma} = \{\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma_{\sigma_0}\} : \sigma_0 \in \Sigma\}$$

назовем базой фильтра порожденная направленностью $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$.

Соответствующие фильтры будем называть *фильтром порожденным порядком $\leq$* и *фильтром порожденная направленностью $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$* .

Утверждение 6.20. Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр порожденный направленностью $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$.

- (1) $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ *сходится к* x *если и только если* $\mathcal{F}$ *сходится к* x ;
- (2) $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ *касается* x *если и только если* $\mathcal{F}$ *касается* x ;
- (3) если $f : X \rightarrow Y$ отображение, то фильтр порожденный направленностью $(f(x_\sigma))_{\sigma \in \Sigma}$ совпадает с фильтром $f(\mathcal{F})$.

Утверждение 6.21. Любой фильтр порождается некоторой направленностью.

Из этих утверждений вытекают аналогии утверждений про фильтры.

Предложение 6.22. Пусть X пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) $x \in \overline{M}$;
- (2) x является предельной точкой для некоторой направленности $(x_\sigma)_\sigma \subset M$;
- (3) x является пределом для некоторой направленности $(x_\sigma)_\sigma \subset M$.

Теорема 6.23. Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

- (1) X хаусдорфово пространство;
- (2) у любого направления $(x_\sigma)_\sigma$ не более одного предела.

Теорема 6.24. Пусть $f : X \rightarrow Y$ отображение топологических пространств и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) отображение f непрерывно в x ;
- (2) если направленность $(x_\sigma)_\sigma$ касается x , то $(f(x_\sigma))_\sigma$ касается $f(x)$;
- (3) если направленность $(x_\sigma)_\sigma$ сходится к x , то $(f(x_\sigma))_\sigma$ сходится к $f(x)$.

Теорема 6.25. Пусть $f : X \rightarrow Y$ отображение топологических пространств. Следующие условия эквивалентны:

- (1) отображение f непрерывно;
- (2) для любого $x \in X$, если направленность $(x_\sigma)_\sigma$ касается x , то $(f(x_\sigma))_\sigma$ касается $f(x)$;
- (3) для любого $x \in X$, если направленность $(x_\sigma)_\sigma$ сходится к x , то $(f(x_\sigma))_\sigma$ сходится к $f(x)$.

Теорема 6.26. Пусть X топологическое пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X компактное пространство;
- (2) у любой направленности $(x_\sigma)_\sigma$ есть предельные точки.

6.2.2 Фильтры и направленности

Важную роль в анализе играет утверждение: если $(x_n)_n$ касается точки x (в $\mathbb{R}^n$, в метрическом пространстве), то некоторая подпоследовательность $(x_{n_k})_k$ сходится к точке x . Это утверждение обобщается на пространства с первой аксиомой счетности (лемма 5.21), но в общем случае неверно.

Для фильтров и направленностей вводятся аналогичные понятия.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Q}$ фильтры на множестве X . Фильтр $\mathcal{Q}$ *тоньше* фильтра $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F} \subset \mathcal{Q}$.

Для баз фильтров $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ понятие тоньше выглядит более привычно: база фильтра $\mathcal{C}$ *тоньше* $\mathcal{B}$, если для каждого $B \in \mathcal{B}$ существует $C \in \mathcal{C}$, такие что $C \subset B$.

Пусть $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ и $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ направленности в множестве X . Направленность $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *тоньше* направленности $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, если существует отображение $f : \Lambda \rightarrow \Sigma$, для которого выполняются условия:

- (FN₁) для любого $\sigma_0 \in \Sigma$ существует $\lambda_0 \in \Lambda$, такие что $f(\lambda) \geq \sigma_0$ для любого $\lambda \geq \lambda_0$;
- (FN₂) $x_{f(\lambda)} = y_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda$.

Последовательность $(x_n)_n$ является направленностью, а подпоследовательность $(x_{n_k})_k$ как направленность тоньше последовательности $(x_n)_n$.

Если направленность $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ тоньше направленности $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, то фильтр порожденный направленностью $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, тоньше фильтра порожденного направленностью $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$.

Предложение 6.27. Пусть X топологическое пространство, фильтр $\mathcal{F}$ касается точки $x \in X$. Тогда существует фильтр $\mathcal{Q}$, тоньше фильтра $\mathcal{F}$, такой что $\mathcal{Q}$ сходится к x .

Доказательство. Положим $\mathcal{Q} = \{U \cap M : U \text{ окрестность точки } x \text{ и } M \in \mathcal{F}\}$. Тогда фильтр $\mathcal{Q}$ сходится к x и $\mathcal{Q}$ тоньше $\mathcal{F}$. $\square$

Предложение 6.28. Пусть X топологическое пространство, направленность $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ касается точки $x \in X$. Тогда существует направленность $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, тоньше направленности $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, такая что $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ сходится к x .

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_x$ есть некоторая база в точке x . Положим

$$\Lambda = \{(\sigma, U) \in \Sigma \times \mathcal{B}_x : x_\sigma \in U\}.$$

Определим порядок на Λ : $(\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_2, U_2)$ если и только если $\sigma_1 \leq \sigma_2$ и $U_2 \subset U_1$, где $(\sigma_1, U_1), (\sigma_2, U_2) \in \Lambda$. Положим $f(\lambda) = \sigma$ и $y_\lambda = x_\sigma$ для $\lambda = (\sigma, U) \in \Lambda$. Тогда направленность $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ тоньше направленности $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ и направленность $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ сходится к точке x . $\square$

6.3 Задачи

Пространство ультрафильтров

Пусть X множество. Обозначим через $\text{Ult}(X)$ множество ультрафильтров на X . Для $x \in X$, обозначим $\xi_x = \{M \subset X : x \in M\}$ главный ультрафильтр, порожденный точкой x . Точки $x \in X$ множества X отождествим с главными ультрафильтрами ξ_x , будем считать, что X является подмножеством $\text{Ult}(X)$. Множество $X^* = \text{Ult}(X) \setminus X$ называется *наростом* и состоит из свободных ультрафильтров.

Для $M \subset X$ обозначим $W(M) = \{\xi \in \text{Ult}(X) : M \in \xi\}$. Семейство $\mathcal{B}_X = \{W(M) : \emptyset \neq M \subset X\}$ является базой топологии. Будем рассматривать $\text{Ult}(X)$ как топологическое пространство с топологией, порожденной базой топологии $\mathcal{B}_X$.

Задача 6.1. Пространство ультрафильтров $\text{Ult}(X)$ является компактным хаусдорфовым пространством, множество X состоит из изолированных точек пространства $\text{Ult}(X)$ и плотно в $\text{Ult}(X)$.

Пространство X называется *экстремально несвязным*, если $\overline{U}$ открыто для любого открытого $U \subset X$.

Задача 6.2. В экстремально несвязном регулярном пространстве нет нетривиальных (т.е. бесконечных) сходящихся последовательностей.

Задача 6.3. Пространство $\text{Ult}(X)$ экстремально несвязно и, следовательно, в $\text{Ult}(X)$ нетривиальных сходящихся последовательностей.

Задача 6.4. Пусть X компактное хаусдорфово пространство. Доказать, что отображение

$$f : \text{Ult}(X) \rightarrow X, \xi \mapsto \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$$

непрерывно.

6.3.1 Компактные полугруппы

Множество S с умножением $\cdot$ называется *полугруппой*, если выполняется тождество $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Вместо $x \cdot y$ будем писать xy .

Множество $Q \subset S$ называется *подполугруппой*, если $xy \in Q$ для всех $x, y \in Q$.

Полугруппа S с топологией называется *право топологической* полугруппой, если каждый *правый сдвиг*

$$\rho_y : S \rightarrow S, x \mapsto xy$$

непрерывен для каждого $y \in S$.

Непустая подполугруппа $Q \subset S$ право топологической полугруппы S называется *минимальной замкнутой подполугруппой*, если любая непустая замкнутая подполугруппа $R \subset Q$ совпадает с Q .

Задача 6.5. Пусть S компактная хаусдорфова право топологическая полугруппа и $g \in S$. Тогда множества

$$\begin{aligned} Sg &= \{xg : x \in S\}, \\ Q &= \{x \in S : xg = g\} \end{aligned}$$

являются замкнутыми подполугруппами S , множество Sg не пусто, множество Q может быть пустым.

Задача 6.6. Пусть S компактная право топологическая полугруппа. Существует минимальная замкнутая подполугруппа $Q \subset S$.

Задача 6.7. Пусть S хаусдорфова компактная право топологическая полугруппа. Любая минимальная замкнутая подполугруппа $Q \subset S$ одноточечная.

Элемент $g \in S$ полугруппы S называется *идемпотентом*, если $g^2 = gg = g$.

Задача 6.8 (теорема Эллис–Нумакура). Пусть S хаусдорфова компактная право топологическая полугруппа. Тогда в S существует идемпотент.

Задача 6.9. Привести пример T_1 компактной право топологической полугруппы, которая не содержит идемпотентов.

6.3.2 Полугруппа $\beta\omega$

Пространство $\text{Ult}(\omega)$ также обозначается как $\beta\omega$. Тогда $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ — нарост ω , пространство свободных ультрафильтров на ω . Продолжим операцию сложения с ω на $\beta\omega$. Для $\xi, \zeta \in \beta\omega$ положим

$$\xi + \zeta = \lim_{n \rightarrow \xi} \left(\lim_{m \rightarrow \zeta} (n + m) \right).$$

Задача 6.10. Доказать, что пространство $\beta\omega$ с операцией $+$ является компактной хаусдорфовой право топологической полугруппой и нарост ω^* является замкнутой подполугруппой полугруппы $\beta\omega$.

Задача 6.11. Пусть ξ есть идемпотент в полугруппе ω^* и $M \in \xi$. Доказать, что

- (1) $a + B \subset M$ для некоторых $a \in M$ и $B \in \xi$;
- (2) $a + b = c$ для некоторых $a, b, c \in M$.

Задача 6.12 (теорема Шура). Доказать, что для любого разбиения $\omega = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k$ существует $i \leq k$ и числа $a, b, c \in N_i$, такие что $a + b = c$.

Теоремы о разбиениях естественным образом связаны с ультрафильтрами.

Задача 6.13. Пусть $\mathcal{L}$ семейство подмножеств чисел ω , для которого выполняется условия:

- (1) если $A \in \mathcal{L}$ и $A \subset B \subset \omega$, то $B \in \mathcal{L}$;
- (2) для любого разбиения $\omega = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k$ существует $i \leq k$, для которого $N_i \in \mathcal{L}$.

Доказать, что тогда $\xi \subset \mathcal{L}$ для некоторого $\xi \in \omega^*$.

Для теоремы Шуры, $\mathcal{L} = \{M \subset \omega : a + b = c \text{ для некоторых } a, b, c \in M\}$.

6.3.3 Теоремы о компактности и ультрафильтры

Для доказательства теоремы о компактности пространства X возможна следующая схема доказательства:

- (1) для ультрафильтра $\xi \in \text{Ult}(X)$ мы “вычисляем” предел $L(\xi) \in X$;
- (2) далее доказываем, что $L(\xi)$ является пределом ξ .

Компактность отрезка

Задача 6.14. Пусть $\xi \in \text{Ult}([0, 1])$.

- (1) Доказать что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $[a, b] \in \xi$, такое что $b - a < \varepsilon$.
- (2) Доказать что существует убывающая последовательность отрезков $([a_n, b_n])_n \subset \xi$, такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$.

Задача 6.15. Для $\xi \in \text{Ult}([0, 1])$ определим $x = L_{[0,1]}(\xi) \in [0, 1]$ таким образом, что $\{x\} = \bigcap_n [a_n, b_n]$, где $([a_n, b_n])_n \subset \xi$ из задачи 6.14(2).

- (1) Доказать, что $L_{[0,1]}(\xi)$ является пределом ξ .
- (2) Доказать компактность отрезка $[0, 1]$.

Компактность линейно упорядоченного множества

Задача 6.16. Пусть X линейно упорядоченное пространство, для которого выполняется условие:

существуют $\inf M$ и $\sup M$ для каждого непустого $M \subset X$.

Для $\xi \in \text{Ult}(X)$ положим

$$L_X(\xi) = \inf\{\sup M : M \in \xi\}.$$

- (1) Доказать, что $L_X(\xi)$ является пределом ξ .
- (2) Доказать компактность X .

Компактность экспоненты

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Семейство всех непустых замкнутых подмножеств пространства X обозначим через $\text{Exp}_F(X)$. Предбазу $\text{Exp}_F(X)$ образуют множества

$$\begin{aligned} W_1(U) &= \{F \in \text{Exp}_F(X) : F \subset U\}, \\ W_2(U) &= \{F \in \text{Exp}_F(X) : F \cap U \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

где $U \in \mathcal{T}$.

Для $x \in X$, $\{x\} \in \text{Exp}_F(X)$. Отождествляя x с $\{x\}$, будем считать, что X подмножество $\text{Exp}_F(X)$.

Задача 6.17. Пусть X пространство. Доказать, что X топологически вложено в $\text{Exp}_F(X)$.

Задача 6.18. Пусть X компактное пространство. Для $\xi \in \text{Ult}(\text{Exp}_F(X))$ положим

$$L_{\text{Exp}_F(X)}(\xi) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \xi} \overline{\bigcup \mathcal{F}}.$$

- (1) Доказать, что $L_{\text{Exp}_F(X)}(\xi)$ является пределом ξ .
- (2) Доказать компактность $\text{Exp}_F(X)$.

Компактность пространства мер

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества M называется *алгеброй множеств*, если выполняются условия:

- (Alg₁) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
- (Alg₂) $X \setminus A \in \mathcal{A}$ для $A \in \mathcal{A}$;
- (Alg₃) $A \cup B \in \mathcal{A}$ для $A, B \in \mathcal{A}$.

Отметим, из этих условий вытекает еще одно:

- (Alg₄) $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{A}$ и $\bigcap \mathcal{M} \in \mathcal{A}$, для конечного $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_X$ наименьшую алгебру множеств, которая содержит $\mathcal{T}$.

Функция $\mu : \mathcal{A}_X \rightarrow [0, 1]$ называется *вероятностной мерой*, если выполняются условия:

$$(\text{Prob}_1) \quad \mu(\emptyset) = 0 \text{ и } \mu(X) = 1;$$

$$(\text{Prob}_2) \quad \mu(A) \geq 0 \text{ для } A \in \mathcal{A}_X;$$

$$(\text{Prob}_3) \quad \mu(X \setminus A) = 1 - \mu(A) \text{ для } A \in \mathcal{A}_X;$$

$$(\text{Prob}_4) \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ для непересекающихся } A, B \in \mathcal{A}_X.$$

Отметим, из этих условий вытекает еще одно:

$$(\text{Prob}_5) \quad \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = 1, \text{ если } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_X \text{ разбиение пространства } X.$$

Пространство всех вероятных мер обозначим $P(X)$. Предбазу топологии $P(X)$ образуют множества

$$W(U, \varepsilon) = \{\mu \in P(X) : \mu(U) > \varepsilon\}$$

для $U \in \mathcal{T}$ и $\varepsilon > 0$.

Для $x \in X$, обозначим через δ_x *меру Дирака*: положим

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A, \end{cases}$$

для $A \in \mathcal{A}_X$. отождествляя x и δ_x , будем считать, что X вложено в $P(X)$.

Задача 6.19. Пространство X вложено в $P(X)$.

Задача 6.20. Пусть X пространство. Для $\xi \in \text{Ult}(P(X))$ и $A \in \mathcal{A}_X$ положим

$$L_{P(X)}(\xi)(A) = \lim_{\mu \rightarrow \xi} \mu(A).$$

- (1) Доказать, что $L_{P(X)}(\xi) \in P(X)$.
- (2) Доказать, что $L_{P(X)}(\xi)$ является пределом ξ .
- (3) Доказать компактность $P(X)$.

Компактность пространства функционалов

Пусть L линейное вещественное пространство и $B \subset L$. Положим

$$B^* = \{f : f \text{ функционал на } L, \text{ для которого } f(B) \subset [-1, 1]\}.$$

Семейство всевозможных

$$W(v, U) = \{f \in B^* : f(x) \in U\}$$

где $v \in L$ и $U \subset \mathbb{R}$ открытое множество, является предбазой топологии B^* .

Множество $B \subset L$ назовем *поглощающим*, если для любого ненулевого $v \in L$ существует ненулевое число λ , такое что $\lambda v \in B$.

Задача 6.21. Пусть L линейное вещественное пространство и $B \subset L$ поглощающее подмножество. Для $\xi \in \text{Ult}(B^*)$ и $v \in L$ положим

$$L_{B^*}(\xi)(v) = \lim_{f \rightarrow \xi} f(v).$$

- (1) Доказать, что $L_{B^*}(\xi)$ является функционалом на L .
- (2) Доказать, что $L_{B^*}(\xi) \in B^*$.
- (3) Доказать, что $L_{B^*}(\xi)$ является пределом ξ .
- (4) Доказать компактность B^* .

Если L нормируемое пространство, B единичный шар, то B^* это единичный шар сопряженного пространства L^* (пространства функционалов на L , которые ограничены на B) со слабой* топологией. Компактность B^* в этой ситуации — эта теорема Алаоглу.

6.3.4 Теоремы о компактности и теорема Александрера

Задача 6.22. Используя теорему Александрера доказать компактность отрезка $[0, 1]$.

Задача 6.23. Используя теорему Александрера доказать компактность линейно упорядоченного пространства X , для которого выполняется условие:

существуют $\inf M$ и $\sup M$ для каждого непустого $M \subset X$.

Задача 6.24. Используя теорему Александрера доказать компактность $\text{Exp}_F(X)$ для компактного X .

Глава 7

Операции над пространствами

Темы в этой главе

Тема 18. Сравнение топологий. Инициальные и финальные топологии. Сумма пространств.

Тема 19. Произведение пространств. Теорема Тихонова о компактности произведений.

Тема 20. Диагональное произведение отображений. Метризациянная теорема Урысона.

7.1 Операции над топологическими пространствами

7.1.1 Сравнение топологий

Пусть X множество и $\mathfrak{T}$ семейство всех топологий на множестве X . Семейство $\mathfrak{T}$ является частично упорядоченным множеством относительно порядка включения.

Пусть $\mathcal{T}, \mathcal{O} \in \mathfrak{T}$. Топология $\mathcal{O}$ *сильнее* топологии $\mathcal{T}$ и топология $\mathcal{T}$ *слабее* топологии $\mathcal{O}$, если $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$. Дискретная топология самая сильная, антидискретная топология самая слабая.

Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{T}$.

Топология $\mathcal{T}_{\min} \in \mathfrak{M}$ называется *минимумом* семейства топологий $\mathfrak{M}$ или *слабейшей топологией* в $\mathfrak{M}$, если $\mathcal{T}_{\min} \subset \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$. Если минимум существует, он обозначается как $\min \mathfrak{M}$.

Топология $\mathcal{T}_{\max} \in \mathfrak{M}$ называется *максимумом* семейства топологий $\mathfrak{M}$ или *сильнейшей топологией* из $\mathfrak{M}$, если $\mathcal{T}_{\max} \supset \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$. Если максимум существует, он обозначается как $\max \mathfrak{M}$.

Утверждение 7.1. Семейство $\bigcap \mathfrak{M}$ является топологией на X .

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}_i = \bigcap \mathfrak{M}$. Тогда $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T}_i$. Пусть $\lambda \subset \mathcal{T}_i = \bigcap \mathfrak{M}$.

Так как $\bigcup \lambda \in \mathcal{T}$ для каждого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$, то $\bigcup \lambda \in \mathcal{T}_i$.

Если λ конечно, то $\bigcap \lambda \in \mathcal{T}$ для каждого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\bigcap \lambda \in \mathcal{T}_i$. $\square$

Утверждение 7.2. Пусть $\mathcal{T}_i = \bigcap \mathfrak{M}$. Минимум $\min \mathfrak{M}$ существует если и только если $\mathcal{T}_i \in \mathfrak{M}$. В этом случае $\min \mathfrak{M} = \mathcal{T}_i$.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{T}_i \in \mathfrak{M}$. Так как $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$ для каждого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$, то $\mathcal{T}_i$ является минимумом $\mathfrak{M}$.

Предположим, что минимум $\mathfrak{M}$ существует и $\mathcal{T}_m = \min \mathfrak{M}$. Так как $\mathcal{T}_m \in \mathfrak{M}$ и $\mathcal{T}_m \subset \mathcal{T}$ для каждого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$, то $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_i$. $\square$

7.1.2 Инициальные и финальные топологии

Пусть X множество и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ семейство пространств.

Инициальные топологии

Пусть $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ есть отображения для $\alpha \in A$. Топология $\mathcal{T}_I$ на X , слабейшая среди всех топологий $\mathcal{T}$ на X , относительно которых все отображения $f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \rightarrow X_\alpha$ непрерывны, называется *инициальной топологией* на X относительно семейства отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ множества X в топологические пространства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Проверим корректность определения. Пусть $\mathfrak{M}_I$ есть семейство топологий $\mathcal{T}$ на X , относительно которых все отображения $f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \rightarrow X_\alpha$ непрерывны. Тогда $\mathcal{T}_I = \min \mathfrak{M}_I$. Для корректности определения надо показать, что существует $\min \mathfrak{M}_I$. В силу утверждений 7.2, достаточно показать, что $\mathcal{T}_i = \bigcap \mathfrak{M}_I \in \mathfrak{M}_I$.

Из утверждения 7.1 вытекает, что $\mathcal{T}_i$ топология на X . Пусть $\alpha \in A$ и U открытое подмножество X_α . Тогда $f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$. Следовательно $f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i$. Получаем, каждое f_α непрерывно относительно топологии $\mathcal{T}_i$. Следовательно, $\mathcal{T}_i \in \mathfrak{M}_I$.

Инициальную топологию $\mathcal{T}_I$ называют также *топологией, порожденной семейством отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$* .

Утверждение 7.3. Если на пространстве X топология, порожденная семейством отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$, то каждое отображение f_α непрерывно.

Доказательство. Так как $\mathcal{T}_I \in \mathfrak{M}_I$, то каждое отображение f_α непрерывно. $\square$

Утверждение 7.4. Пусть $\mathcal{P}_\alpha$ есть предбаза пространства X_α для $\alpha \in A$. Тогда семейство $\mathcal{P} = \{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{P}_\alpha\}$ является предбазой инициальной топологии $\mathcal{T}_I$.

Доказательство. Так как каждое отображение f_α относительно топологии $\mathcal{T}_I$ на X непрерывно, то $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}_I$. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, порожденная предбазой $\mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_I$. Так как $f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ для $U \in \mathcal{P}_\alpha$, то отображение f_α непрерывно относительно топологии $\mathcal{T}$ для каждого $\alpha \in A$. Следовательно, $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$. Так как $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_I$, $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$ и $\mathcal{T}_I = \min \mathfrak{M}_I$, то $\mathcal{T} = \mathcal{T}_I$. $\square$

Финальные топологии

Пусть $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ есть отображения для $\alpha \in A$. Топология $\mathcal{T}_F$ на X , сильнейшая среди всех топологий $\mathcal{T}$ на X , относительно которых все отображения $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow (X, \mathcal{T})$ непрерывны, называется *финальной топологией*

на X относительно семейства отображений $\{g_\alpha : \alpha \in A\}$ в множество X из топологических пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Проверим корректность определения. Пусть $\mathfrak{M}_F$ есть семейство топологий $\mathcal{T}$ на X , относительно которых все отображения $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow (X, \mathcal{T})$ непрерывны. Для корректности определения надо показать, что существует $\max \mathfrak{M}_F$.

Утверждение 7.5.

$$\mathcal{T}_F = \{U \subset X : f_\alpha^{-1}(U) \text{ открыто в } X_\alpha \text{ для всех } \alpha \in A\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}'$ есть семейство множеств в правой части равенства из условия. Надо доказать, что $\mathcal{T}'$ является финальной топологией. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{T}'$ является топологией и отображения $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ непрерывны для $\alpha \in A$. Следовательно, $\mathcal{T}' \in \mathfrak{M}_F$. Если $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_F$ и $U \in \mathcal{T}$, то $f_\alpha^{-1}(U)$ открыто в X_α для всех $\alpha \in A$. Тогда $U \in \mathcal{T}'$ и, следовательно, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Следовательно, $\mathcal{T}' = \max \mathfrak{M}_F = \mathcal{T}_F$. $\square$

7.1.3 Сумма пространств

Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и семейство множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ дизъюнктно. Положим $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Определим топологию $\mathcal{T}$ на X : $U \in \mathcal{T}$ если $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для $\alpha \in A$. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется *суммой* пространств и обозначается $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$. Если $A = \{1, 2, \dots, n\}$, то сумма также обозначается как $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$.

Если $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ тождественные отображения для $\alpha \in A$, то топология суммы на X является финальной топологией относительно семейства отображений $\{i_\alpha : \alpha \in A\}$, что вытекает из утверждения 7.5.

Каждое X_α открыто замкнуто в X и i_α является топологическим вложением X_α в X .

Непосредственно проверяется следующие утверждение.

Утверждение 7.6. Пусть Y топологическое пространство. Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно если и только если отображение $f|_{X_\alpha}$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.

7.1.4 Произведение пространств

Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$. Пусть

$$\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\alpha, (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_\alpha$$

проекция произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на сомножитель X_α .

Топологией произведения $\mathcal{T}_P$ на произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ называется инициальная топология на X относительно семейства отображений $\{\pi_\alpha : \alpha \in A\}$ произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ в топологические пространства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Произведение пространств $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ будем рассматривать как топологическое пространство с топологией произведения $\mathcal{T}_P$.

Из утверждения 7.3 вытекает следующие утверждение.

Утверждение 7.7. *Проекции π_α непрерывны на произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Из утверждения 7.4 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.8. *Пусть $\mathcal{P}_\alpha$ есть предбаза пространства X_α для $\alpha \in A$. Тогда семейство $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{P}_\alpha\}$ является предбазой топологии произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Из утверждения 7.8 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.9. *Пусть $\mathcal{B}_\alpha$ есть база пространства X_α для $\alpha \in A$. Тогда семейство*

$$\left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \text{ или } U_\alpha = X_\alpha \text{ для } \alpha \in A \text{ и } |\{\alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\}| < \omega \right\}$$

является базой топологии произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

В случае, когда индексное множество A совпадает с натуральными числами $\mathbb{N}$ (или ω), утверждение 7.9 можно переформулировать следующим образом:

Утверждение 7.10. *Пусть $\mathcal{B}_i$ есть база пространства X_i для $i \in \mathbb{N}$. Тогда семейство*

$$\left\{ \prod_{i=1}^n U_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i : n \in \mathbb{N} \text{ и } U_i \in \mathcal{B}_i \text{ для } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

является базой топологии произведения $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}'$ есть база из утверждения 7.9 для $A = \mathbb{N}$ и $\mathcal{B}''$ есть семейство из текущего утверждения. Тогда $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$. Непосредственно проверяется, что если $x \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ и $x \in U \in \mathcal{B}'$, то существует $V \in \mathcal{B}''$, для которого $x \in V \subset U$. Следовательно, $\mathcal{B}''$ база $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. $\square$

Сформулируем также вариант утверждения 7.10 для случая, когда ω есть индексное множество.

Утверждение 7.11. *Пусть $\mathcal{B}_i$ есть база пространства X_i для $i \in \omega$. Тогда семейство*

$$\left\{ \prod_{i=0}^n U_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i : n \in \mathbb{N} \text{ и } U_i \in \mathcal{B}_i \text{ для } i = 0, 1, \dots, n \right\}$$

является базой топологии произведения $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$.

Пусть Y_α топологическое пространство и $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ отображение для $\alpha \in A$. Определим *прямое произведение отображений* $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$:

$$\prod_{\alpha \in A} f_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha, (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in A}.$$

Если A конечное множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, то также будем обозначать

$$\prod_{\alpha \in A} f_\alpha = f_{\alpha_1} \times f_{\alpha_2} \times \dots \times f_{\alpha_n}.$$

Утверждение 7.12. Если каждое отображение f_α непрерывно, то прямое произведение отображений $\prod_{\alpha \in A} f_\alpha$ непрерывно.

Доказательство. Пусть $\pi_{X,\alpha}$ есть проекция $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на X_α , $\pi_{Y,\alpha}$ есть проекция $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ на Y_α и $f = \prod_{\alpha \in A} f_\alpha$. Множества вида $\pi_{Y,\alpha}^{-1}(U)$ образуют предбазу произведения Y , где $\alpha \in A$ и U открыто в Y_α (утверждение 7.8). Так как $W = f_\alpha^{-1}(U)$ открыто в X_α и

$$f^{-1}(\pi_{Y,\alpha}^{-1}(U)) = \pi_{X,\alpha}^{-1}(W)$$

открыто в произведении X (утверждение 7.7), то отображение f непрерывно (предложение 3.12(3)). $\square$

Из утверждения 7.12 вытекает следующее утверждение.

Предложение 7.13. Пусть $f : X_1 \rightarrow Y_1$ и $g : X_2 \rightarrow Y_2$ непрерывные отображения топологических пространств. Тогда произведение отображений

$$f \times g : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), g(x_2))$$

непрерывно. Если отображения f и g являются гомеоморфизмами, то отображение $f \times g$ является гомеоморфизмом.

7.1.5 Диагональное произведение отображений

Пусть X множество и $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ есть отображения для $\alpha \in A$. Обозначим

$$\Delta f_\alpha : X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha, x \mapsto (f_\alpha(x))_{\alpha \in A}.$$

Отображение $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ называется *диагональным произведением* семейства отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$. Если A конечное множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, то также будем обозначать

$$\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha = f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2} \Delta \dots \Delta f_{\alpha_n}.$$

Утверждение 7.14. Пусть $f = \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$. Тогда

- (1) $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ для каждого $\alpha \in A$;
- (2) $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U)) = f_\alpha^{-1}(U)$ для $\alpha \in A$ и $U \subset X_\alpha$.

Доказательство. Пункт (1) очевиден.

Докажем (2). Из (1) вытекает, что

$$f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U)) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(U) = f_\alpha^{-1}(U).$$

$\square$

Предложение 7.15. Пусть X топологическое пространство и $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ есть непрерывные отображения для $\alpha \in A$. Тогда диагональное произведение $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ непрерывно.

Доказательство. Обозначим $f = \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$. В силу утверждения 7.8, семейство $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \subset X_\alpha \text{ открыто}\}$ предбазы произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. В силу предложения 3.12(3), для непрерывности отображения f достаточно доказать, что если $W \in \mathcal{P}$, то $f^{-1}(W)$ открыто в X . Другими словами, надо доказать, что если $\alpha \in A$ и $U \subset X_\alpha$ открыто, то $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U))$ открыто в X . Из утверждения 7.14(2) вытекает $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U)) = f_\alpha^{-1}(U)$. Так как отображение f_α непрерывно, то множество $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U))$ открыто. $\square$

Лемма 7.16. Пусть X топологическое T_0 -пространство, $f : X \rightarrow Y$ отображение топологических пространств и $\mathcal{P}$ предбаза Y . Следующие условия эквивалентны:

- (1) отображение f является топологическим вложением;
- (2) семейство $\mathcal{W} = \{f^{-1}(W) : W \in \mathcal{P}\}$ является предбазой пространства X .

Доказательство. Семейство $\mathcal{P}' = \{W \cap f(X) : W \in \mathcal{P}\}$ является предбазой $f(X)$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Так как f гомеоморфно отображает X на $f(X)$, то семейство $\{f^{-1}(W') : W' \in \mathcal{P}'\} = \mathcal{W}$ является предбазой X .

Докажем (1) $\Leftarrow$ (2). Так как $f^{-1}(W) \in \mathcal{W}$ открыто для $W \in \mathcal{P}$, то из предложения 3.12(3) вытекает, что отображение f непрерывно.

Докажем, что отображение f инъективно. Пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Так как X T_0 -пространство и $\mathcal{W}$ предбаза X , существует $U \in \mathcal{W}$, для которого либо $x \in U$ и $y \notin U$, либо $x \notin U$ и $y \in U$. Пусть $U = f^{-1}(W)$ для некоторого $W \in \mathcal{P}$. Тогда либо $f(x) \in W$ и $f(y) \notin W$, либо $f(x) \notin W$ и $f(y) \in W$. Следовательно, отображение f инъективно.

Пусть $g : f(X) \rightarrow X$ есть обратное к f отображение: $g \circ f = \text{id}_X$ — тождественное отображение X на себя. Покажем, что g непрерывное отображение. Так как $g^{-1}(U) \in \mathcal{P}'$ открыто в $f(X)$ для $U \in \mathcal{W}$, то из предложения 3.12(3) вытекает, что отображение g непрерывно.

Так как взаимно обратные отображения f и g непрерывны, то f является гомеоморфизмом. $\square$

Теорема 7.17. Пусть X топологическое T_0 -пространство, X_α топологическое пространство и $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ есть отображение для $\alpha \in A$. Пусть

$$f = \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha : X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

есть диагональное произведение. Следующие условия эквивалентны:

- (1) f есть топологическое вложение X в $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$;
- (2) топология X порождается семейством отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}_\alpha$ есть топология X_α для $\alpha \in A$. В силу утверждения 7.8, семейство $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{T}_\alpha\}$ предбазы произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Из утверждения 7.14 вытекает, что $f^{-1}(W) = f_\alpha^{-1}(U)$, где $\alpha \in A, U \subset X_\alpha$ и $W = \pi_\alpha^{-1}(U)$. Следовательно, $\mathcal{W} = \mathcal{U}$, где

$$\mathcal{W} = \{f^{-1}(W) : W \in \mathcal{P}\}, \quad \mathcal{U} = \{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{T}_\alpha\}.$$

Из леммы 7.16 вытекает, что условие (1) эквивалентно тому, что $\mathcal{W}$ является предбазой пространства X . Из утверждения 7.4 вытекает, что условие (2) эквивалентно тому, что $\mathcal{U}$ является предбазой пространства X . Следовательно, из $\mathcal{W} = \mathcal{U}$ вытекает, что (1) $\Leftrightarrow$ (2). $\square$

7.1.6 Компактность произведения пространств

Теорема 7.18 (теорема Тихонова). Пусть X_α компактное пространство для $\alpha \in A$. Тогда произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ компактно.

Доказательство. В силу теоремы 6.18, достаточно доказать, что любой ультрафильтр на $P = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ сходится к некоторой точке P . Пусть $\xi_\alpha = \pi_\alpha(\xi)$ для $\alpha \in A$. Из утверждения 6.10 вытекает, что ξ_α есть ультрафильтр на X_α . Так как X_α компактно, то из теоремы 6.18 вытекает, что ультрафильтр ξ_α сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$.

Покажем, что ультрафильтр ξ сходится к точке $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Из утверждения 7.8 вытекает, что $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \text{ открыто в } X_\alpha\}$ предбаза произведения P . В силу предложения 6.11, достаточно показать, что если $x \in W \in \mathcal{P}$, то $W \in \xi$. Пусть $W = \pi_\alpha^{-1}(U)$, где $\alpha \in A$ и U открыто в X_α . Так как $x \in W$, то $x_\alpha \in U$. Так как ξ_α сходится к x_α , то $U \in \xi_\alpha$. Следовательно $W = \pi_\alpha^{-1}(U) \in \xi$. $\square$

7.1.7 Метрические и метризуемые пространства, IV

Две метрики ρ и d на множестве X называются *эквивалентными*, если топологии на X , порожденные на ρ и d , совпадают. Для $M \subset X$, обозначим

$$\text{diam}_\rho(M) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in M\}$$

– диаметр множества M .

Предложение 7.19. Для метрики ρ на множестве X и $\varepsilon > 0$ существует эквивалентная метрика d на X , для которой $\text{diam}_d(X) \leq \varepsilon$.

Доказательство. Положим $d(x, y) = \min \varepsilon, \rho(x, y)$. $\square$

Предложение 7.20. Пусть (X_n, ρ_n) метрические пространства и $\text{diam}_{\rho_n}(X_n) \leq \frac{1}{n}$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть $P = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Положим

$$\rho(x, y) = \sup\{\rho(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\},$$

для $x = (x_n)_n \in P$ и $y = (y_n)_n \in P$. Тогда ρ метрика на P и топология (X, ρ) совпадает с топологией произведения на P .

Доказательство. Проекция $\pi_n : (P, \rho) \rightarrow (X_n, \rho_n)$ не увеличивают расстояние и поэтому непрерывны. Следовательно, топология (P, ρ) сильнее топологии произведения. Базу в (P, ρ) образуют множества вида $B_\rho(x, \varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$ и $x = (x_n)_n \in P$. Тогда

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \prod_{n=1}^{\infty} B_{\rho_n}(x, \varepsilon)$$

Так как $B_{\rho_n}(x, \varepsilon) = X_n$ для $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то из утверждения 7.9 вытекает, что $B_\rho(x, \varepsilon)$ открыто в топологии произведения. Следовательно, (P, ρ) слабее топологии произведения. $\square$

Из предложений 7.19 и 7.20 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.21. *Счетное произведение метризуемых пространств метризуемо.*

Пространство $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ называется *гильбертов куб* или *гильбертов кирпич*.

Из теоремы 7.21 и теоремы 7.18 Тихонова вытекает следующее утверждение.

Предложение 7.22. *Гильбертов куб $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ является метризуемым компактным пространством.*

Теорема 7.23 (метризационная теорема Урысона). *Пусть X пространство. Следующие условия эквивалентны.*

- (1) X метризуемое сепарабельное пространство.
- (2) X вкладывается в гильбертов куб $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.
- (3) X является регулярным пространством со второй аксиомой счетности.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) вытекает из теоремы 2.17.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Из предложения 7.22 вытекает, что гильбертов куб $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ является метризуемым компактным пространством. Из теоремы 5.41 вытекает, что $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ со второй аксиомой счетности. Так как подпространства метризуемого пространства метризуемы (теорема 2.14), то X метризуемо. Так как подпространства пространства со счетной базой является пространством со счетной базой (предложение 2.4), то X пространство со счетной базой. Итак, X метризуемое пространство со счетной базой. Из теоремы 2.17 вытекает, что X метризуемое сепарабельное пространство.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Из теоремы 5.38 вытекает, что X нормальное пространство. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X . Положим $\mathcal{D} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \bar{V} \subset U\}$. Занумеруем $\mathcal{D} = \{(U_n, V_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что существует непрерывная функция $f_n : X \rightarrow [0, 1]$, так что $f(\bar{V}) = \{0\}$ и $f(X \setminus U_n) = \{1\}$. Так как семейство $\{f^{-1}([0, 1)) : n \in \mathbb{N}\}$ образует базу X , то семейство функций $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ определяют топологию X . Из теоремы 7.17 вытекает, что диагональное произведение $\Delta_{n=1}^{\infty} f_n$ вкладывает X в гильбертов куб $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. $\square$

7.2 Дополнение

7.2.1 Сравнение топологий

Пусть X множество и $\mathfrak{T}$ семейство всех топологий на множестве X . Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{T}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_- &= \{\mathcal{T} \in \mathfrak{T} : \mathcal{T} \subset \mathcal{O} \text{ для } \mathcal{O} \in \mathfrak{M}\} && \text{— множество нижних граней} \\ &&& \text{семейства топологий } \mathfrak{M}, \\ \mathfrak{M}_+ &= \{\mathcal{O} \in \mathfrak{T} : \mathcal{T} \subset \mathcal{O} \text{ для } \mathcal{T} \in \mathfrak{M}\} && \text{— множество верхних граней} \\ &&& \text{семейства топологий } \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Семейства $\mathfrak{M}_-$ и $\mathfrak{M}_+$ не пусты, $\mathfrak{M}_-$ содержит антидискретную топологию и $\mathfrak{M}_+$ содержит дискретную топологию.

Утверждение 7.24. *Существуют $\max \mathfrak{M}_-$ и $\min \mathfrak{M}_+$.*

- (1) $\max \mathfrak{M}_- = \bigcap \mathfrak{M}_-$.
- (2) Семейство $\bigcup \mathfrak{M}_+$ является предбазой топологии $\min \mathfrak{M}_+$. Если $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ есть предбаза топологии $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_+$, то $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_+} \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ является предбазой топологии $\min \mathfrak{M}_+$.

Доказательство. Докажем (1). Семейство $\bigcap \mathfrak{M}_-$ является топологией. Так как $\bigcap \mathfrak{M}_- \subset \mathcal{O}$ для $\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_-$, то $\bigcap \mathfrak{M}_- \in \mathfrak{M}_-$. Если $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_-$, то $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ для всех $\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_-$ и, следовательно, $\mathcal{T} \subset \bigcap \mathfrak{M}_-$. Следовательно, $\bigcap \mathfrak{M}_- = \max \mathfrak{M}_-$.

Докажем (2). Пусть $\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_+$. Тогда $\mathcal{P} \subset \bigcup \mathfrak{M}_+ \subset \mathcal{O}$. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, порожденная предбазой $\mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ и $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_+$. Следовательно, $\mathcal{T} = \min \mathfrak{M}_+$. $\square$

Положим

$$\begin{aligned} \inf \mathfrak{M} &= \max \mathfrak{M}_- && \text{— точная нижняя грань} \\ &&& \text{или инфимум} \\ &&& \text{семейства топологий } \mathfrak{M}, \\ \sup \mathfrak{M} &= \min \mathfrak{M}_+ && \text{— точная верхняя грань} \\ &&& \text{или супремум} \\ &&& \text{семейства топологий } \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Из утверждения 7.24 и того, что семейства $\mathfrak{M}_-$ и $\mathfrak{M}_+$ не пусты, вытекает, что $\inf \mathfrak{M}$ и $\sup \mathfrak{M}$ определены корректно и существуют.

Из утверждения 7.24 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.25. (1) $\inf \mathfrak{M} = \bigcap \mathfrak{M}_-$.

- (2) Семейство $\bigcup \mathfrak{M}_+$ является предбазой топологии $\sup \mathfrak{M}$. Если $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ есть предбаза топологии $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_+$, то $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_+} \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ является предбазой топологии $\sup \mathfrak{M}$.

Из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.26. (1) $\min \mathfrak{M}$ существует если и только если $\inf \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$. В этом случае $\min \mathfrak{M} = \inf \mathfrak{M}$.

- (2) $\max \mathfrak{M}$ существует если и только если $\sup \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$. В этом случае $\max \mathfrak{M} = \sup \mathfrak{M}$.

7.2.2 Инициальные и финальные топологии

Пусть X множество и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ семейство пространств.

Инициальные топологии

Утверждение 7.27. Пусть $\mathcal{T}$ топология на X . Следующие условия эквивалентны.

- (1) $\mathcal{T}$ есть инициальная топология $\mathcal{T}_I$.
- (2) Пусть Y топологическое пространство и $f : Y \rightarrow (X, \mathcal{T})$ отображение. Следующие условия эквивалентны:
 - (a) отображение f непрерывно;
 - (b) отображение $f_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем (a) $\Rightarrow$ (b). Отображение $f_\alpha \circ f$ непрерывно как композиция непрерывных функций.

Докажем (b) $\Rightarrow$ (a). Пусть $\mathcal{T}_\alpha$ есть топология пространства X_α для $\alpha \in A$. В силу утверждения 7.4, семейство $\mathcal{P} = \bigcup \{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{T}_\alpha\}$ является предбазой инициальной топологией $\mathcal{T}_I$. Для доказательства непрерывности отображения f достаточно показать, что $f^{-1}(W)$ открыто для $W \in \mathcal{P}$. Тогда $W = f_\alpha^{-1}(U)$ для некоторых $\alpha \in A$ и $U \in \mathcal{T}_\alpha$. Так как отображение $f_\alpha \circ f$ непрерывно, то $f^{-1}(W) = (f_\alpha \circ f)^{-1}(U)$ открыто.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $Y = (X, \mathcal{T}_I)$ и $f : (X, \mathcal{T}_I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ тождественное отображение. Тогда отображение $f_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$. Из (2)(b) $\Rightarrow$ (a) вытекает, что отображение f непрерывно. Следовательно $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_I$.

Пусть $Y = (X, \mathcal{T})$ и $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ тождественное отображение. Тогда отображение f непрерывно. Из (2)(a) $\Rightarrow$ (b) вытекает, что отображение $f_\alpha = f_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$. Следовательно $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$. Так как $\mathcal{T}_I = \min \mathfrak{M}_I$, то $\mathcal{T}_I \subset \mathcal{T}$.

Так как $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_I$ и $\mathcal{T}_I \subset \mathcal{T}$, то $\mathcal{T}_I = \mathcal{T}$. □

Пусть Y топологическое пространство, $Z \subset Y$, $f : Z \rightarrow Y$ тождественное вложение. Инициальные топологии на Z относительно семейства отображений $\{f\}$ совпадает с топологией на Z индуцируемой на Z из X .

Финальные топологии

Утверждение 7.28. Пусть $\mathcal{T}$ топология на X . Следующие условия эквивалентны.

- (1) $\mathcal{T}$ есть финальная топология $\mathcal{T}_F$.
- (2) Пусть Y топологическое пространство и $g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ отображение. Следующие условия эквивалентны:
 - (a) отображение g непрерывно;
 - (b) отображение $g \circ g_\alpha$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.

7.2.3 Произведение пространств

Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$. Пусть

$$\pi_\alpha : P = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\alpha, (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_\alpha$$

проекция произведения P на сомножитель X_α .

Утверждение 7.29. Пусть $\mathcal{T}$ топология на $P = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Следующие условия эквивалентны.

- (1) $\mathcal{T}$ есть топология произведения.
- (2) Пусть Y топологическое пространство и $f : Y \rightarrow (P, \mathcal{T})$ отображение. Следующие условия эквивалентны:
 - (а) отображение f непрерывно;
 - (б) отображение $\pi_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.

Из утверждения 7.29 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.30. Пусть Y топологическое пространство и $f : Y \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ отображение. Следующие условия эквивалентны:

- (1) отображение f непрерывно;
- (2) отображение $\pi_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.

7.3 Задачи

Глава 8

Конструкции пространств

Темы в этой главе

Тема 21. Фактор топология и факторные отображения.

Тема 22. Замкнутые и открытые отображения. Свойства и примеры замкнутых и открытых отображений.

Тема 23. Топологические свойства сумм и произведений пространств. Прямая Зоргенфрея и ее квадрат.

Тема 24. Конструкция пространств. Приклеивание пространств. Цилиндр пространств и отображений.

8.1 Конструкция топологических пространств

8.1.1 Фактор топология и факторные отображения

Пусть X множество, Y пространство, $f: Y \rightarrow X$ сюръективное отображение. Топологию $\mathcal{T}_F$ на множестве X назовем *фактортопологией* относительно отображения f , если $\mathcal{T}_F$ есть сильнейшая топология на X , относительно которой отображение f непрерывно.

Другими словами, $\mathcal{T}_F$ есть финальная топология относительно семейства отображений $\{f\}$. Из утверждения 7.5 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8.1.

$$\mathcal{T}_F = \{U \subset X : f^{-1}(U) \text{ открыто в } Y\}.$$

Пусть $\sim$ есть отношение эквивалентности на Y . Обозначим $[y]_{\sim} = \{x \in Y : x \sim y\}$ — класс эквивалентности, содержащий $y \in Y$. Множество $Y/\sim = \{[y]_{\sim} : y \in Y\}$ называется *фактормножеством* и отображение

$$q_{\sim} : Y \rightarrow Y/\sim, y \mapsto [y]_{\sim}$$

факторотображением. Фактормножество с фактортопологией относительно факторотображения называется *факторпространством*.

Отображение $f: Y \rightarrow X$ топологических пространств называется *факторным отображением*, если отображение f сюръективно и топология X

совпадает с фактортопологией на множестве X относительно отображения f .

Из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8.2. Факторотображение $q_{\sim} : Y \rightarrow Y/\sim$ пространства Y на факторпространство $Y/\sim$ является факторным отображением.

Утверждение 8.1 можно сформулировать следующим образом.

Предложение 8.3. Пусть $f : Y \rightarrow X$ сюръективное отображение топологических пространств. Следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Отображение f факторно.
- (2) Множество $U \subset X$ открыто в X если и только если $f^{-1}(U)$ открыто в Y .
- (3) Множество $F \subset X$ замкнуто в X если и только если $f^{-1}(F)$ замкнуто в Y .

Из предложения 8.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.4. Пусть $f : X \rightarrow Y$ биективное отображение топологических пространств. Отображение f является гомеоморфизмом, если и только если отображение f факторно.

Предложение 8.5. Факторное отображение непрерывно.

Доказательство. Пусть $f : Y \rightarrow X$ факторное отображение. Пусть $U \subset X$ открытое множество. Из предложения 8.3 вытекает, что $f^{-1}(U)$ открыто в Y . $\square$

Предложение 8.6. Композиция факторных отображений факторна.

Доказательство. Пусть $g : Z \rightarrow Y$ и $f : Y \rightarrow X$ факторные отображения. Так как g и f сюръективны и непрерывны, то композиция $f \circ g : Z \rightarrow X$ сюръективна и непрерывна. Пусть $U \subset X$, $V = f^{-1}(U)$ и $W = g^{-1}(V)$. Так g факторно, то W открыто если и только если V открыто. Так f факторно, то V открыто если и только если U открыто. Тогда $W = (f \circ g)^{-1}(U)$ открыто если и только если U открыто. Следовательно, отображение $f \circ g$ факторно. $\square$

Теорема 8.7. Пусть $f : Y \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Z$ и $h : Z \rightarrow X$ сюръективное отображение топологических пространств и $f = h \circ g$, то то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & Z & \end{array}$$

коммутативна. Тогда

- (1) если отображение f непрерывно и отображение g факторно, то отображение h непрерывно;

- (2) если отображение f факторно и отображение g факторно, то отображение h факторно.

Доказательство. Докажем (1). Пусть $U \subset X$ открытое множество. Так как f непрерывно, то $f^{-1}(U)$ открыто в Y . Так как $g^{-1}(h^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ и отображение g факторно, то $h^{-1}(U)$ открыто (предложение 8.3).

Докажем (2). Из (1) вытекает, что h непрерывно. Пусть $U \subset X$ и $h^{-1}(U)$ открыто. Так как отображение g непрерывно, то множество $g^{-1}(h^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ открыто. Так как отображение f факторно, то множество U открыто (предложение 8.3). Следовательно, отображение h факторно (предложение 8.3). $\square$

Пусть $f : Y \rightarrow X$ есть отображение множеств. Отношение эквивалентности $\sim_f$,

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

на Y называется *отношением эквивалентности, порожденное отображением f* .

Теорема 8.8. Пусть $f : Y \rightarrow X$ отображение топологических пространств. Пусть $h : Y / \sim_f \rightarrow X$ есть такое отображение, что $f = h \circ q_{\sim_f}$, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow q_{\sim_f} & \nearrow h \\ & Y / \sim_f & \end{array}$$

коммутативна. Пространство $Y / \sim_f$ есть факторпространство. Тогда

- (1) отображение h инъективно;
- (2) отображение f сюръективно тогда и только тогда, когда отображение h является биекцией;
- (3) отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда отображение h непрерывно;
- (4) отображение f факторно тогда и только тогда, когда отображение h является гомеоморфизмом.

Доказательство. Отображение $q_{\sim_f}$ факторно и, в силу предложения 8.5, непрерывно. Пункты (1) и (2) очевидны.

Докажем (3). Импликация $(\Rightarrow)$ вытекает из теоремы 8.7(1).

$(\Leftarrow)$ Отображение f непрерывно как композиция непрерывных отображений h и $q_{\sim_f}$.

Докажем (4). $(\Rightarrow)$ Так как f факторно, то f сюръекция. Из теоремы 8.7(2) вытекает, что отображение h факторно. Из (2) вытекает, что h биекция. Из предложения 8.4 вытекает, что h гомеоморфизм.

$(\Leftarrow)$ Гомеоморфизм h является факторным отображением (предложение 8.4). Из предложения 8.6 вытекает, что композиция $h \circ q_{\sim_f} = f$ факторна. $\square$

8.1.2 Замкнутые и открытые отображения

Пусть $f : Y \rightarrow X$ отображение топологических пространств. Отображение f называется *открытым* отображением, если $f(U)$ открыто в X для любого открытого $U \subset Y$. Отображение f называется *замкнутым* отображением, если $f(F)$ замкнуто в X для любого замкнутого $F \subset Y$.

Предложение 8.9. Пусть $f : Y \rightarrow X$ сюръективное непрерывное отображение топологических пространств.

- (1) Если f замкнутое отображение, то f факторно.
- (2) Если f открытое отображение, то f факторно.

Доказательство. Докажем (1). В силу предложения 8.3, достаточно показать, что если $F \subset X$ и $f^{-1}(F)$ замкнуто, то F замкнуто. Так как $f^{-1}(F)$ замкнуто, отображение f замкнуто и $F = f(f^{-1}(F))$, то F замкнуто.

Докажем (2). В силу предложения 8.3, достаточно показать, что если $U \subset X$ и $f^{-1}(U)$ открыто, то U открыто. Так как $f^{-1}(U)$ открыто, отображение f открыто и $U = f(f^{-1}(U))$, то U открыто. $\square$

Из предложений 8.9 и 8.4 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.10. Пусть $f : Y \rightarrow X$ биективное непрерывное отображение топологических пространств.

- (1) Если f замкнутое отображение, то f гомеоморфизм.
- (2) Если f открытое отображение, то f гомеоморфизм.

Из определений непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.11. (1) Композиция замкнутых отображений замкнута.

- (2) Композиция открытых отображений открыта.

Предложение 8.12. Пусть $f : Y \rightarrow X$ непрерывное отображение топологических пространств. Если Y компактное пространство и X хаусдорфово пространство, то f замкнутое отображение.

Доказательство. Пусть F замкнутое подмножество Y . Как замкнутое подмножество компактного пространства Y , в силу предложения 5.1, пространство F компактно. Как непрерывный образ компактного пространства, в силу предложения 5.2, пространство $f(F)$ компактно. Как компактное подмножество хаусдорфова пространства, в силу предложения 5.6, множество $f(F)$ замкнуто в X . $\square$

Из предложений 8.12 и 8.10 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.13. Пусть $f : Y \rightarrow X$ непрерывное биективное отображение топологических пространств. Если Y компактное пространство и X хаусдорфово пространство, то f гомеоморфизм.

Предложение 8.14. Пусть $f : Y \rightarrow X$ непрерывное сюръективное замкнутое отображение топологических пространств.

- (1) Если Y T_1 -пространство, то X T_1 -пространство.
 (2) Если Y нормальное пространство, то X нормальное пространство.

Доказательство. Докажем (1). Пусть $x \in X$ и $y \in f^{-1}(x)$. Так как Y T_1 -пространство, то $\{y\}$ замкнуто в Y . Так как f замкнутое отображение, то $\{x\} = f(\{y\})$ замкнуто в X .

Докажем (2). Из (1) вытекает, что X T_1 -пространство. Пусть P и F замкнутые непересекающиеся подмножества X . Так как $f^{-1}(P)$ и $f^{-1}(F)$ замкнутые непересекающиеся подмножества нормального пространства Y , то существуют открытые непересекающиеся окрестности $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ множеств $f^{-1}(P)$ и $f^{-1}(F)$. Положим

$$U = X \setminus f(Y \setminus \tilde{U}), \quad V = X \setminus f(Y \setminus \tilde{V}).$$

Тогда U и V открытые непересекающиеся окрестности множеств P и F . $\square$

Пусть X_α пространство для $\alpha \in A$ и $B \subset A$. Обозначим

$$\pi_B^A: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in B} X_\alpha, \quad (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha \in B}$$

проекцию произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на $\prod_{\alpha \in B} X_\alpha$.

Предложение 8.15. Пусть X_α пространство для $\alpha \in A$ и $B \subset A$. Тогда проекция $\pi_B^A: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ непрерывна и открыта.

Доказательство. Для $C \subset A$ обозначим

$$\mathcal{B}_C = \left\{ \prod_{\alpha \in C} U_\alpha : U_\alpha \text{ открыто в } X_\alpha \text{ для } \alpha \in C \text{ и } |\{\alpha \in C : U_\alpha \neq X_\alpha\}| < \omega \right\}.$$

В силу утверждения 7.8, семейство $\mathcal{B}_C$ является базой произведения $\prod_{\alpha \in C} X_\alpha$. Пусть $V = \prod_{\alpha \in B} V_\alpha \in \mathcal{B}_B$. Тогда $(\pi_B^A)^{-1}(V) = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{B}_A$, где $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \in A \setminus B$. Тогда $(\pi_B^A)^{-1}(V)$ открыто в $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и, следовательно, проекция π_B^A непрерывна.

Пусть $U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{B}_A$. Тогда $\pi_B^A(U) = \prod_{\alpha \in B} U_\alpha \in \mathcal{B}_B$ открыто в $\prod_{\alpha \in B} X_\alpha$. $\square$

Следствие 8.16. Пусть X и Y пространства. Тогда проекции

$$\begin{aligned} \pi_1: X \times Y &\rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x, \\ \pi_2: X \times Y &\rightarrow Y, \quad (x, y) \mapsto y \end{aligned}$$

непрерывны и открыты.

Предложение 8.17. Пусть X пространство и Y компактное пространство. Тогда проекция

$$\pi_1: X \times Y \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x$$

является замкнутым отображением.

Доказательство. Пусть $F \subset X \times Y$ замкнутое множество. Покажем, что $\pi_1(F)$ замкнуто в X . Для этого проверим, что $X \setminus \pi_1(F)$ открыто. Пусть $x \in X \setminus \pi_1(F)$.

Так как F замкнуто в $X \times Y$ и $(x, y) \notin F$ для $y \in Y$, то существуют открытые окрестности V_y точки y и открытые окрестность U_y точки x , для которых

$$U_y \times V_y \cap F = \emptyset.$$

Так как Y компактно и $\{V_y : y \in Y\}$ является открытым покрытием Y , то существует конечное $L \subset Y$, такое что $\bigcup\{V_y : y \in L\} = Y$. Тогда $U = \bigcap\{U_y : y \in L\}$ является окрестностью точки x и $(U \times Y) \cap F = \emptyset$. Следовательно, $x \in U \subset X \setminus \pi_1(F)$ и x является внутренней точкой множества $X \setminus \pi_1(F)$. $\square$

8.1.3 Топологические свойства сумм и произведений пространств

Из предложений 5.3, 5.18 и 5.33 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.18. Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.

- (1) Если X_α компактно для $\alpha \in A$ и $|A| < \omega$, то X компактно.
- (2) Если X_α счетно компактно для $\alpha \in A$ и $|A| < \omega$, то X счетно компактно.
- (3) Если X_α финально компактно для $\alpha \in A$ и $|A| \leq \omega$, то X финально компактно.

Из определений непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.19. Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$. Если X_α T_i -пространство для $\alpha \in A$, то $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ T_i -пространство.

Из определений непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.20. Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Если X_α T_i -пространство для $\alpha \in A$, то $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ T_i -пространство.

Лемма 8.21. Пусть X пространство, Y компактное пространство, γ открытое покрытие пространства $X \times Y$. Пусть $\gamma^{<\omega}$ множество конечных подмножеств множества γ . Существует семейство $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ открытых подмножеств X , так что выполняются условия:

- (1) семейство $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ является открытым покрытием пространства X ;
- (2) $U_\mu \times Y \subset \bigcup \mu$ для $\mu \in \mathcal{M}$;
- (3) если $\mathcal{M} \subset \gamma^{<\omega}$ и $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ является покрытием пространства X , то $\lambda = \bigcup \mathcal{M}$ является покрытием $X \times Y$.

Доказательство. Пусть $\mu \in \gamma^{<\omega}$. Положим

$$U_\mu = X \setminus \pi_1 \left((X \times Y) \setminus \bigcup \mu \right).$$

Из предложения 8.17 вытекает, что множество $\pi_1((X \times Y) \setminus \bigcup \mu)$ замкнуто в X . Следовательно, U_μ открыто.

Докажем (1). Пусть $x \in X$. Пространство $\{x\} \times Y$ компактно. Следовательно, существует $\mu \in \gamma^{<\omega}$, для которого $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mu$. Тогда $x \in U_\mu$.

Пункт (2) вытекает из построения.

Пункт (3) вытекает из (2). $\square$

Предложение 8.22. Пусть X счетно компактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ счетно компактное пространство.

Доказательство. Пусть γ счетное открытое покрытие пространства $X \times Y$. Пусть $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ семейство из леммы 8.21. Из леммы 8.21(1) вытекает, что $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ является открытым покрытием пространства X . Так как $|\gamma^{<\omega}| \leq \omega$, то $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ открытое не более чем счетное покрытие счетно компактного пространства X . Следовательно, существует конечное $\mathcal{M} \subset \gamma^{<\omega}$, такое что $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ является открытым покрытием X . Из леммы 8.21(3) вытекает, что конечное семейство $\lambda = \bigcup \mathcal{M} \subset \gamma$ является покрытием пространства $X \times Y$. $\square$

Предложение 8.23. Пусть X финально компактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ финально компактное пространство.

Доказательство. Пусть γ открытое покрытие пространства X . Пусть $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ семейство из леммы 8.21. Из леммы 8.21(1) вытекает, что $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ является открытым покрытием пространства X . Так как X финально компактно, то существует не более чем счетное $\mathcal{M} \subset \gamma^{<\omega}$, для которого семейство $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ является открытым покрытием X . Из леммы 8.21(3) вытекает, что $\lambda = \bigcup \mathcal{M} \subset \gamma$ является покрытием пространства $X \times Y$. Семейство λ не более чем счетно. $\square$

Предложение 8.24. Пусть X линделефовое пространство и Y компактное хаусдорфова пространство. Тогда $X \times Y$ линделефовое пространство.

Доказательство. Из предложения 8.24 вытекает, что $X \times Y$ финально компактное пространство. Из теоремы 5.7 вытекает, что Y нормальное и, следовательно, регулярно. Пространство X регулярно. Из предложения 8.20 вытекает, что $X \times Y$ регулярно. $\square$

Теорема 8.25 (лемма Джонса). Пусть X сепарабельное нормальное пространство. Тогда $|D| < 2^\omega$ для любого дискретное замкнутого подмножества D пространства X .

Доказательство. Пусть S счетное всюду плотное подмножество X . Для каждого $M \subset D$ зафиксируем открытое U_M , для которого

$$M \subset U_M \subset \overline{U_M} \subset X \setminus (D \setminus M).$$

Положим $S_M = U_M \cap S$. Тогда $M = \overline{S_M} \cap D$. Следовательно, отображение

$$\varphi : \text{Exp}(D) \rightarrow \text{Exp}(S), \quad M \mapsto S_M$$

является инъективным. Следовательно, $2^{|D|} \leq 2^\omega$. Из теоремы Кантора получаем $|D| < 2^\omega$. $\square$

Предложение 8.26. *Прямая Зоргенфрея S (пример 2.23) является линделефовым пространством.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что S регулярное пространство. Проверим, что S финально компактно. Пусть γ открытое покрытие S , состоящее из базисных множеств вида $[a, b)$. Положим $\gamma^* = \{(a, b) : [a, b) \in \gamma\}$ и $U = \bigcup \gamma^*$. Семейство γ^* состоит из открытых интервалов. Так как для $\mathbb{R}$ и U , в топологии индуцированной из $\mathbb{R}$, линделефовы, то существует счетное $\mu \subset \gamma^*$, для которого $\bigcup \mu = U$. Положим $F = \mathbb{R} \setminus U$.

Для $x \in F$ зафиксируем $V_x \in \gamma$, для которой $x \in V_x$. Так как $x \notin U$, то x является левым концом полунтервала V_x . Пусть $y \in F \setminus \{x\}$. Так как $x, y \notin U$, то $x \notin V_y$ и $y \notin V_x$. Следовательно $V_x \cap V_y = \emptyset$. Так как семейство $\{V_x : x \in F\}$ дизъюнктно, то $|F| \leq \omega$. Семейство

$$\lambda = \{[a, b) : (a, b) \in \mu\} \cup \{V_x : x \in F\} \subset \gamma$$

является счетным подпокрытием. $\square$

Предложение 8.27. *Квадрат S^2 прямой Зоргенфрея не нормален.*

Доказательство. Так как прямая Зоргенфрея сепарабельна, то S^2 сепарабельно. Множество

$$L = \{(x, y) \in S^2 : x + 1 = 0\}$$

является дискретным замкнутым подмножеством мощности континуум. Из леммы Джонса (теорема 8.25) вытекает, что S^2 не нормально. $\square$

8.1.4 Конструкция пространств

Для отношения эквивалентности $\sim$ на множестве X обозначаем $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ — класс эквивалентности, содержащий x .

Из предложения 8.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.28. *Пусть $f : X \rightarrow Y$ факторное отображение топологических пространств. Отображение f замкнуто если и только если $f^{-1}(f(F))$ замкнуто в X для любого замкнутого F в X множества.*

Стягивание множества в точку

Пусть X пространство и $F \subset X$. Пусть $\sim$ отношение эквивалентности на X , такое что $[x] = \{x\}$ для $x \in X \setminus F$ и $[x] = F$ для $x \in F$. Фактор множество $X/\sim$ обозначим как X/F и фактор отображение $q_\sim: X \rightarrow X/F$ обозначим как q_F . Факторпространство X/F это пространство X после стягивания множества F в точку.

Еще говорят, что X/F есть результат факторизации X по F .

Предложение 8.29. Пусть F замкнутое множество пространства X . Тогда

- (1) факторотображение $q_F: X \rightarrow X/F$ замкнуто;
- (2) если X нормальное пространство, то X/F нормальное пространство.

Доказательство. Докажем (1). Пусть P замкнуто в X . Если $P \cap F = \emptyset$, то $q_F^{-1}(q_F(P)) = P$ замкнуто в X . Если $P \cap F \neq \emptyset$, то $q_F^{-1}(q_F(P)) = P \cup F$ замкнуто в X . Из предложения 8.28 вытекает, что q_F замкнутое отображение.

Докажем (2). Так как q_F замкнутое отображение, то из предложения 8.14 вытекает, что X/F нормально. $\square$

Приклеивание пространств

Пусть X, Y – топологические пространства, F – подмножество пространства X , $f: F \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Пусть $\sim$ отношение эквивалентности на $X \oplus Y$, такое что $[x] = \{x\}$ для $x \in X \oplus Y \setminus (F \cup f(F))$ и $[y] = \{y\} \cup f^{-1}(y)$ для $y \in f(F)$. Фактор множество $(X \oplus Y)/\sim$ обозначим как $X \cup_f Y$ и факторотображение $q_\sim: X \oplus Y \rightarrow X \cup_f Y$ обозначим как q_f . Факторпространство $X \cup_f Y$ это $X \oplus Y$ после приклеивания X к Y посредством отображения f .

Предложение 8.30. Пусть X, Y – топологические пространства, F – замкнутое подмножество пространства X , $f: F \rightarrow Y$ – непрерывное замкнутое отображение. Тогда

- (1) факторотображение $q_f: X \oplus Y \rightarrow X \cup_f Y$ замкнуто;
- (2) если X и Y нормальные пространства, то $X \cup_f Y$ нормальное пространство.

Доказательство. Докажем (1). Пусть P замкнуто в $X \oplus Y$. Тогда множество

$$q_f^{-1}(q_f(P)) = P \cup f^{-1}(P \cap f(F)) \cup f^{-1}(f(F \cap P))$$

замкнуто в $X \oplus Y$. Из предложения 8.28 вытекает, что q_f замкнутое отображение.

Докажем (2). Из предложения 8.20 вытекает, что $X \oplus Y$ нормальное пространство. Так как q_f замкнутое отображение, то из предложения 8.14 вытекает, что $X \cup_f Y$ нормально. $\square$

Цилиндр пространств и отображений

Пространство $X \times [0, 1]$ называется *цилиндром* пространства X . Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Результат приклеивания цилиндра $X \times [0, 1]$ к Y посредством отображения

$$f_0: X \times \{0\} \rightarrow Y, (0, x) \mapsto f(x)$$

называется *цилиндром отображения* f и обозначается через $\text{Cyl}(f)$.

Из предложения 8.30 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.31. Пусть X, Y – топологические пространства, $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное замкнутое отображение. Тогда

- (1) факторотображение $q_{f_0}: (X \times [0, 1]) \oplus Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$ замкнуто;
- (2) если $X \times [0, 1]$ нормальное пространство, то $\text{Cyl}(f)$ нормальное пространство.

Конусы

Если профакторизовать $X \times [0, 1]$ по $X \times \{1\}$, то получится *конус* $\text{Con}(X) = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$ над X .

Из предложения 8.29 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.32. Пусть X пространства. Тогда

- (1) факторотображение $q_{X \times \{1\}}: X \times [0, 1] \rightarrow \text{Con}(X)$ замкнуто;
- (2) если $X \times [0, 1]$ нормальное пространство, то $\text{Con}(X)$ нормальное пространство.

8.2 Дополнение

8.3 Задачи

Задача 8.1. Пусть X множество, X_α пространство и $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$ для $\alpha \in A$, $\bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha(X_\alpha) = X$. Пусть $Y = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ и $f: Y \rightarrow X$ отображение, для которого $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$. Доказать, что финальная топология на X относительно семейства $\{f_\alpha: \alpha \in A\}$ совпадает с фактортопологией относительно отображения f .

8.3.1 Произведения пространств

Задача 8.2. Построить два счетнокомпактных пространства X и Y , для которых произведение не счетнокомпактно.

Задача 8.3. Пусть $(X_n)_n$ секвенциально компактные пространства. Доказать, что $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ секвенциально компактно.

Задача 8.4. Пусть X секвенциально компактное пространство и Y счетнокомпактное пространство. Доказать, что $X \times Y$ счетно компактно.

Задача 8.5. Привести пример компактного не секвенциально компактного пространства.

Задача 8.6. Привести пример нормально пространства X , для которого $X \times [0, 1]$ не нормально.

Такие примеры сложны, это пространства Доукера (Dowker space).

8.3.2 Конструкция пространств

Задача 8.7. Доказать, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ без первой аксиомы счетности.

Задача 8.8. Доказать, что $\text{Con}(\mathbb{R})$ без первой аксиомы счетности.

Задача 8.9. Доказать, что если X метризуемое пространство и $F \subset X$ компактно, то X/F с первой аксиомы счетности.

Задача 8.10. Доказать, что если X метризуемое пространство и $F \subset X$ компактно, то X/F метризуемо.

Задача 8.11. Доказать, что X/F хаусдорфово, если X регулярно и F замкнуто в X .

Задача 8.12. Привести пример регулярного пространства X и замкнутого $F \subset X$, для которых X/F не регулярно.

Задача 8.13. Привести пример хаусдорфового пространства X и замкнутого $F \subset X$, для которых X/F не хаусдорфово.

8.3.3 Совершенные отображения

Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *совершенным* отображением, если отображение f замкнуто и $f^{-1}(y)$ компактно для каждого $y \in Y$.

Задача 8.14. Доказать, что если $f: X \rightarrow Y$ совершенное сюръективное отображение и Y компактно, то X компактно.

Задача 8.15. Доказать, что если $f: X \rightarrow Y$ совершенное сюръективное отображение и Y счетно компактно, то X счетно компактно.

Задача 8.16. Доказать, что если $f: X \rightarrow Y$ совершенное сюръективное отображение и Y финально компактно, то X финально компактно.

Задача 8.17. Доказать, что если $f: X \rightarrow Y$ совершенное сюръективное отображение и X метризуемо, то Y метризуемо.

8.3.4 Замкнутые образы метризуемых пространств

Пусть $S_{FU} = \{(n, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : n, m \in \mathbb{N}\}$, $F_{FU} = \{(n, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, $X_{FU} = S_{FU} \cup F_{FU}$. Пространство $V_{FU} = X_{FU}/F_{FU}$ называется *веером Фреше–Урысона*.

Задача 8.18. Доказать, что веер Фреше–Урысона V_{FU} без первой аксиомы счетности.

Задача 8.19. Доказать, что веер Фреше–Урысона V_{FU} вкладывается в пространства $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $\text{Con}(\mathbb{R})$.

Задача 8.20. Пусть X метризуемое пространство, Y пространство, $f : X \rightarrow Y$ непрерывное сюръективное замкнутое отображение и $y \in Y$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

- (1) в точке y выполняется первая аксиома счетности;
- (2) граница $\text{Fr } f^{-1}(y)$ компактна;
- (3) веер Фреше–Урысона не вкладывается в Y таким образом, что y единственная неизолированная точка веера Фреше–Урысона.

Задача 8.21. Доказать, что если $f : X \rightarrow Y$ замкнутое непрерывное сюръективное отображение, X метризуемо и Y с первой аксиомой счетности, то Y метризуемо.

Глава 9

Функции на пространствах, паракомпактность

Темы в этой главе

Тема 25. Операции над непрерывными функциями. Пространство непрерывных ограниченных функций. Равномерная сходимость.

Тема 26. Продолжение непрерывных функций. Теорема Брауэра-Титце-Урысона.

Тема 27. Паракомпактные пространства. Нормальность хаусдорфовых паракомпактных пространств. Паракомпактность линделефовых пространств. Операции, сохраняющие паракомпактность.

Тема 28. Разбиение единицы. Разбиение единицы, подчиненное конечному покрытию, в нормальных пространствах. Разбиение единицы в паракомпактных пространствах.

9.1 Функции на пространствах, разбиение единицы, паракомпактность

9.1.1 Непрерывные отображения, III

Положим

$$\begin{aligned}o_+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y, \\o_* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy, \\o_{\max} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \max(x, y), \\o_{\min} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \min(x, y), \\o_- : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x, \\o_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Из математического анализа известно

Предложение 9.1. *Функции o_+ , o_* , $o_{\max}$, $o_{\min}$, o_- , o_i непрерывны.*

Пусть X множество, f и g функции на X . Положим

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \\ \max(f, g)(x) &= \max(f(x), g(x)), \\ \min(f, g)(x) &= \min(f(x), g(x)), \\ (-f)(x) &= -f(x).\end{aligned}$$

Если $f(x) \neq 0$ для всех x , то

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Определим также $f - g = f + (-g)$ и $f/g = f \cdot \frac{1}{g}$ если $g(x) \neq 0$ для всех x .

Предложение 9.2. Топология евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ совпадает с топологией произведения.

Доказательство. Базу обеих топологий образуют множества вида $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$. $\square$

Предложение 9.3. Пусть X пространство, f и g непрерывные функции на X . Тогда функции $f + g$, fg , $f - g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ непрерывны. Если $g(x) \neq 0$ для всех x , то функции $\frac{1}{g}$ и $\frac{f}{g}$ непрерывны.

Доказательство. Из предложений 9.2 и 7.15 вытекает, что отображение

$$f \triangle g : X \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (f(x), g(x))$$

непрерывно. Из предложений 9.1 и непрерывности композиции непрерывных функций (предложение 4.20) и перечисленных ниже формул вытекает доказываемое утверждение.

$$\begin{aligned}(f + g) &= o_+ \circ (f \triangle g), \\ fg &= o_{\cdot} \circ (f \triangle g), \\ \max(f, g) &= o_{\max} \circ (f \triangle g), \\ \min(f, g) &= o_{\min} \circ (f \triangle g), \\ -f &= o_- \circ f, \\ \frac{1}{f} &= o_i \circ f.\end{aligned}$$

$\square$

9.1.2 Пространство непрерывных функций

Пусть V линейное пространство над $\mathbb{R}$. Функция

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

называется *нормой* если $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$, $\| -v \| = \|v\| \geq 0$ и $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ для $u, v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пара $(V, \| \cdot \|)$ называется *нормированным* пространством. Функция $d(v, u) = \|v - u\|$ определяет метрику на V , которая определяет топологию V .

Последовательность $(x_n)_n$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$, так что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для $n, m > N$. Другими словами, последовательность

$$d_n = \text{diam}_\rho(\{x_n, x_{n+1}, \dots\})$$

сходится к 0.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Нормируемое пространство V называется *банаховым* пространством, если метрическое пространство V полно.

Пусть X множество. Множество ограниченных функций на X обозначим $B(X)$. Ясно, $B(X)$ – линейное пространство. Положим

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

для $f \in B(X)$. Несложно проверяется, что $\|\cdot\|$ является нормой. Норма $\|\cdot\|$ называется *суп-нормой*. Сходимость функций в $(B(X), \|\cdot\|)$ называется *равномерной* сходимостью. Топология на $B(X)$, которая определяется с помощью суп-нормы, называется *топологией равномерной сходимости*.

Предложение 9.4. Пусть X множество. Нормируемое пространство $(B(X), \|\cdot\|)$ является банаховым.

Доказательство. Пусть $(f_n)_n$ фундаментальная последовательность в $B(X)$. Пусть $x \in X$. Последовательность $(f_n(x))_n$ фундаментальна и поэтому сходится к некоторому $f(x)$.

Для $\varepsilon > 0$ обозначим через N_ε такое число, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ для $n, m > N_\varepsilon$.

Лемма 1. $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ для $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и $n > N_\varepsilon$.

Доказательство. Так $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$, то

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)|.$$

Так как $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\| < \varepsilon$ для $n > N_\varepsilon$, то $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. $\square$

Покажем, что f ограниченная функция. Если $n > N_1$, то из леммы вытекает, что $\|f - f_n\| \leq 1$ и, следовательно $\|f\| \leq \|f_n\| + 1 < \infty$.

Из леммы вытекает, что $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$ для $n > N_\varepsilon$. Следовательно, последовательность $(f_n)_n$ сходится к f . $\square$

Пусть X топологическое пространство.

Обозначим через $C^*(X)$ все непрерывные ограниченные функции на X . Из предложения 9.3 вытекает, что $C^*(X)$ является линейным пространством. Будем рассматривать на $C^*(X)$ суп-норму $\|\cdot\|$.

Теорема 9.5. Пусть X топологическое пространство. Нормируемое пространство $(C^*(X), \|\cdot\|)$ является банаховым.

Доказательство. Пусть $(f_n)_n$ фундаментальная последовательность в $C^*(X)$. Из предложения 9.4 вытекает, что последовательность $(f_n)_n$ равномерно сходится к некоторой ограниченной функции f .

Осталось показать, что функция f непрерывна. Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $(f_n)_n$ сходится к f , то существует n , такое что $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Так как функция f_n непрерывна, то существует окрестность U точки x , такая что $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $y \in U$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

для всех $y \in U$. □

Предложение 9.6. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ банахово пространство, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходящийся ряд с положительными членами, $v_n \in V$, $\|v_n\| \leq c_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится в V .

Доказательство. Обозначим $u_n = \sum_{i=1}^n v_i$ и $s_n = \sum_{i=1}^n c_i$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(s_n)_n$ является фундаментальной, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что $|s_n - s_m| < \varepsilon$ для $n, m > N_\varepsilon$. Тогда

$$\|u_n - u_m\| = \left\| \sum_{i=n}^m v_i \right\| \leq \sum_{i=n}^m \|v_i\| \leq \sum_{i=n}^m c_i = s_m - s_n < \varepsilon$$

для $m > n > N_\varepsilon$. Следовательно, последовательность $(u_n)_n$ является фундаментальной и сходится к некоторой точке $u \in V$. Тогда $u = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. □

9.1.3 Продолжение непрерывных функций

Теорема 9.7 (теорема Брауэра-Титце-Урысона). Пусть X нормальное топологическое пространство, F замкнутое подмножество X и f непрерывная функция на F . Тогда f продолжается до непрерывной функции g на X (т.е. $f = g|_F$).

Кроме того,

$$a = \inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in X} g(x), \quad b = \sup_{x \in F} f(x) = \sup_{x \in X} g(x),$$

если f не достигает a , то g не достигает a и если f не достигает b , то g не достигает b .

Доказательство. Случай $a = b$, то есть f константа, тривиален. Далее $a < b$.

Рассмотрим случай $a = 0$ и $b = 1$. Построим индукцией по n последовательности непрерывных функций $(f_n)_n$ на F и $(h_n)_n$ на X , так что бы выполнялись условия:

$$(A_1) \quad f = f_1;$$

$$(B_n) \quad 0 \leq f_n(x) \leq (2/3)^{n-1} \text{ для } x \in F;$$

$$(C_n) \quad 0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{3} (2/3)^{n-1} \text{ для } x \in X;$$

$$(D_n) \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) - h_n(x) \text{ для } x \in F.$$

Положим $f_1 = f$. Предположим, что непрерывная функция f_n на F построена и для нее выполняются условие (B_n) . Определим непрерывную функцию h_n на X таким образом, что для h_n выполняется условие (C_n) и для функции $f_{n+1} = f_n - h_n|_F$ выполняется условие

$$(B_{n+1}) \quad 0 \leq f_{n+1}(x) \leq (2/3)^n \text{ для } x \in F.$$

Отметим, из определения f_{n+1} вытекает (D_n) .

Пусть

$$\begin{aligned} A &= f_n^{-1}([0, \frac{1}{3} (2/3)^{n-1}]), \\ B &= f_n^{-1}([\frac{2}{3} (2/3)^{n-1}, (2/3)^{n-1}]). \end{aligned}$$

Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что существует непрерывная функция $h : X \rightarrow [0, 1]$, для которой $h(A) = \{0\}$ и $h(B) = \{1\}$. Положим $h_n = \frac{1}{3} (2/3)^{n-1} h$. Условие (C_n) выполняется. Положим $C = F \setminus (A \cup B)$. Семейство $\{A, B, C\}$ является разбиением множества F .

Проверим условие (B_{n+1}) . Пусть $x \in F$. Рассмотрим три случая.

Случай $x \in A$. Тогда $h_n(x) = 0$ и $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{3} (2/3)^{n-1}$. Следовательно $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ и

$$0 \leq f_{n+1}(x) \leq \frac{1}{3} (2/3)^{n-1} \leq (2/3)^n.$$

Случай $x \in B$. Тогда $h_n(x) = \frac{1}{3} (2/3)^{n-1}$ и $\frac{2}{3} (2/3)^{n-1} \leq f_n(x) \leq (2/3)^{n-1}$. Следовательно $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{1}{3} (2/3)^{n-1}$ и

$$0 \leq \frac{1}{3} (2/3)^{n-1} \leq f_{n+1}(x) \leq (1 - \frac{1}{3}) (2/3)^{n-1} = (2/3)^n.$$

Случай $x \in C$. Тогда $0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{3} (2/3)^{n-1}$ и $\frac{1}{3} (2/3)^{n-1} < f_n(x) \leq \frac{2}{3} (2/3)^{n-1}$. Следовательно

$$0 \leq f_{n+1}(x) \leq \frac{2}{3} (2/3)^{n-1} = (2/3)^n.$$

Последовательности функций $(f_n)_n$ и $(h_n)_n$, для которых выполняются условия (A_1) , (B_n) , (C_n) и (D_n) , построены.

Из (A_1) и (D_n) вытекает, что $f = f_1$ и $f_i = h_i|_F + f_{i+1}$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно,

$$f = \sum_{i=1}^n h_i \Big|_F + f_{n+1}. \quad (9.1)$$

Из (B_n) и (C_n) вытекает, что $\|h_n\| \leq (2/3)^n$ и $\|f_n\| \leq (2/3)^n$, где $\|\cdot\|$ суп-норма на $C^*(X)$ и $C^*(F)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$ сходится, то из теоремы 9.5 и предложения 9.6 вытекает, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$ сходится в $C_*(X)$ в топологии равномерной сходимости.

Положим $g_1 = \sum_{i=1}^{\infty} h_i$. Функция g_1 непрерывна. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0$, то из равенства (9.1) вытекает, что $g_1|_F = f$. Положим

$$g_2 = \min(1, \max(0, g_1)).$$

Тогда $g_2(X) \subset [0, 1]$, $g_2|_F = f$ и из предложения 9.3 вытекает, что g_2 непрерывно.

Если f достигает своего инфимума (то есть $f(x) = 0$ для некоторого $x \in F$), то положим $g_3 = g_2$. Определим g_3 в противном случае. Положим $Q = g_2^{-1}((-\infty, 0])$. Тогда Q замкнуто и $Q \cap F = \emptyset$. Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что существует непрерывная функция $q : X \rightarrow [0, 1]$, для которой $q(Q) = \{0\}$ и $q(F) = \{1\}$. Положим $g_3 = qg_2$. Тогда g_3 непрерывна, $g_3|_F = f$ и $g(X) \subset (0, 1]$.

Если f достигает своего супремума (то есть $f(x) = 1$ для некоторого $x \in F$), то положим $g = g_3$. Определим g в противном случае. Положим $Q = g_3^{-1}([1, +\infty))$. Тогда Q замкнуто и $Q \cap F = \emptyset$. Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что существует непрерывная функция $q : X \rightarrow [0, 1]$, для которой $q(Q) = \{0\}$ и $q(F) = \{1\}$. Положим $g = qg_3$. Тогда g непрерывна, $g|_F = f$ и $g(X) \subset [0, 1)$.

По построению, функция g является искомой.

Рассмотрим случай $-\infty < a < b < +\infty$. Положим $\tilde{f} = (f - a)/(b - a)$. Тогда $\inf \tilde{f} = 0$ и $\sup \tilde{f} = 1$. Из случая $a = 0$ и $b = 1$ вытекает, что существует непрерывная функция $\tilde{g}$ на X , для которой $\tilde{f} = \tilde{g}|_F$, $\inf \tilde{g} = 0$ и $\sup \tilde{g} = 1$, кроме того, если $\tilde{f}$ не достигает 0, то $\tilde{g}$ не достигает 0 и если $\tilde{f}$ не достигает 1, то $\tilde{g}$ не достигает 1. Положим $g = a + (b - a)\tilde{g}$. Функция g является искомой.

Рассмотрим общий случай. Из математического анализа известно, что функции $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ возрастающие, непрерывны и взаимно обратные. Положим $\tilde{f} = \operatorname{arctg} \circ f$. Тогда $\tilde{f}$ непрерывная ограниченная функция. Из случая $-\infty < a < b < +\infty$ вытекает, что существует непрерывная функция $\tilde{g}$ на X , для которой $\tilde{f} = \tilde{g}|_F$, $\inf \tilde{g} = \inf \tilde{f}$ и $\sup \tilde{g} = \sup \tilde{f}$, кроме того, если $\tilde{f}$ не достигает $\inf \tilde{f}$, то $\tilde{g}$ не достигает $\inf \tilde{f}$ и если $\tilde{f}$ не достигает $\sup \tilde{f}$, то $\tilde{g}$ не достигает $\sup \tilde{f}$. Тогда $\tilde{g}(X) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Положим $g = \operatorname{tg} \circ \tilde{g}$. Функция g является искомой. $\square$

9.1.4 Паракомпактные пространства

Семейство множеств λ пространства X называется *локально конечным*, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U точки x , такая что $|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \emptyset\}| < \omega$.

Пусть γ семейство подмножеств пространства X . Семейство λ *вписано* в семейство γ , если для любого $M \in \lambda$ существует $L \in \gamma$, такое что $M \subset L$.

Пространство X называется *паракомпактным* пространством, если для любого открытого покрытия γ пространства X существует локально конечное покрытие λ , такое что λ вписано в покрытие γ .

Конечное семейство является локально конечным, так что верно следующие утверждение.

Предложение 9.8. *Компактные пространства паракомпактны.*

Это утверждение можно усилить следующим образом.

Предложение 9.9. *Пусть X паракомпактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ паракомпактное пространство.*

Доказательство. Пусть γ открытое покрытие пространства $X \times Y$. Пусть $\gamma^{<\omega}$ множество конечных подмножеств множества γ . В силу леммы 8.21, существует семейство $\mathcal{U} = \{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ подмножеств X , так что выполняются условия:

- (1) семейство $\mathcal{U}$ является открытым покрытием пространства X ;
- (2) $U_\mu \times Y \subset \bigcup \mu$ для $\mu \in \mathcal{M}$.

Так как X паракомпактное пространство, то существует локально конечное покрытие $\tilde{\lambda}$ пространства X , такое что $\tilde{\lambda}$ вписано в покрытие $\mathcal{U}$. Так как $\tilde{\lambda}$ вписано в $\mathcal{U}$, то для каждого $V \in \tilde{\lambda}$ существует $\mu_V \in \gamma^{<\omega}$, такое что $V \subset U_{\mu_V}$. Положим

$$\lambda = \{(V \times Y) \cap U : V \in \tilde{\lambda}, U \in \mu_V\}.$$

Так как $\tilde{\lambda}$ локально конечно и μ_V конечно для $V \in \tilde{\lambda}$, то семейство λ локально конечно. Очевидно, λ вписано в γ и состоит из открытых множеств. Так как $\tilde{\lambda}$ покрытие X , $V \subset U_{\mu_V}$ и, в силу условия (2), $U_{\mu_V} \times Y \subset \bigcup \mu_V$ для $V \in \tilde{\lambda}$ то λ покрытие $X \times Y$. $\square$

Предложение 9.10. *Замкнутое подпространство паракомпактного пространства паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X паракомпактное пространство и $F \subset X$ замкнутое множества. Пусть γ открытое в топологии подпространства покрытие пространства F .

Положим $\tilde{\gamma} = \{U \cap (X \setminus F) : U \in \gamma\}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ открытое покрытие X . Так как X паракомпактно, то существует локально конечное покрытие $\tilde{\lambda}$ пространства X , вписанное в покрытие $\tilde{\gamma}$.

Положим $\lambda = \{V \cap F : V \in \tilde{\lambda}\}$. Семейство λ является локально конечным открытым в F покрытием пространства F , вписанным в γ . $\square$

Лемма 9.11. *Пусть λ локально конечное семейство в пространстве X . Тогда*

$$\bigcup_{U \in \lambda} \overline{U} = \overline{\bigcup_{U \in \lambda} U}.$$

Доказательство. Включение $\bigcup_{U \in \lambda} \overline{U} \subset \overline{\bigcup_{U \in \lambda} U}$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $x \in \overline{\bigcup_{U \in \lambda} U}$. Так как λ локально конечно, то семейство $\mu = \{U \in \gamma : U \cap V \neq \emptyset\}$ конечно для некоторой окрестности V точки x . Тогда $x \in \overline{\bigcup \mu}$. Так как μ конечно, то $\overline{\bigcup \mu} = \bigcup_{U \in \mu} \overline{U}$. Тогда $x \in \overline{U}$ для некоторого $U \in \mu$ и, следовательно, $x \in \bigcup_{U \in \lambda} \overline{U}$. $\square$

Лемма 9.12. *Пусть X паракомпактное пространство, $P, F \subset X$ замкнутые непересекающиеся множества. Предположим, что для каждого $y \in F$ существует окрестность $U_y \supset P$ множества P и окрестность V_y точки y , такие что $U_y \cap V_y = \emptyset$. Тогда существуют непересекающиеся окрестности множеств P и F .*

Доказательство. Пусть λ есть локально конечное открытое покрытие пространства X , вписанное в открытое покрытие $\gamma = \{X \setminus F\} \cup \{V_y : x \in F\}$. Положим $\lambda_F = \{W \in \lambda : W \cap F \neq \emptyset\}$ и $V = \bigcap \lambda_F$. Так как λ покрытие, то $F \subset V$.

Покажем, что $\bar{V} \cap P = \emptyset$. Так как семейство λ_F локально конечно, то, в силу леммы 9.12, $\bar{V} = \bigcup_{W \in \lambda_F} \bar{W}$. Покажем, что если $W \in \lambda_F$, то $\bar{W} \cap P = \emptyset$. Так как λ вписано в γ и $W \cap F \neq \emptyset$, то $W \subset V_y$ для некоторого $y \in F$. Тогда $\bar{W} \subset X \setminus V_y \subset X \setminus P$. Следовательно, $\bar{W} \cap P = \emptyset$.

Положим $U = X \setminus \bar{V}$. Тогда $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Теорема 9.13. *Паракомпактное хаусдорфовое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X паракомпактное хаусдорфовое пространство.

Покажем, что X регулярное пространство. Пусть $x \in X$, $F \subset X$ замкнутое множество и $x \notin F$. Надо найти у x и F непересекающиеся окрестности. Положим $P = \bar{x}$. Так как X хаусдорфово пространство, то X является T_1 -пространством и множество P замкнуто в X . Так как X хаусдорфово пространство, то для каждого $y \in F$ существуют открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y точек x и y , соответственно. Из леммы 9.12 вытекает, что существуют непересекающиеся окрестности множеств $P = \{x\}$ и F .

Покажем, что X нормальное пространство. Пусть $P, F \subset X$ замкнутые непересекающиеся множества. Надо найти у P и F непересекающиеся окрестности. Так как X регулярное пространство, то для каждого $y \in F$ существуют открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y множества P и точки y . Из леммы 9.12 вытекает, что существуют непересекающиеся окрестности у множеств P и F . $\square$

Теорема 9.14. *Линделефово пространство паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X линделефово пространство. Пусть γ открытое покрытие X . Так как X регулярно, то

$$\gamma_1 = \{V \subset X : V \text{ открыто в } X \text{ и } \bar{V} \subset U \text{ для некоторого } U \in \gamma\}$$

есть открытое покрытие, вписанное в γ . Так как X финально компактно, то существует счетное подпокрытие $\gamma_2 \subset \gamma_1$ покрытия γ_1 . Занумеруем элементы γ_2 : $\gamma_2 = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как γ_2 вписано в γ , то существует $U_n \in \gamma$, такой что $\bar{V}_n \subset U_n$. Положим

$$W_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \bar{V}_i.$$

Семейство $\lambda = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ состоит из открытых множеств и вписано в γ .

Покажем, что λ покрытие X . Пусть $x \in X$. Положим $m = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in U_n\}$. Так как $\bar{V}_i \subset U_i$ для $i < m$, то $x \notin \bigcup_{i=1}^{m-1} \bar{V}_i$. Так как $x \in U_m$, то $x \in W_m$.

Покажем, что λ локально конечно. Пусть $x \in X$. Положим $k = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in V_n\}$. Тогда V_k окрестность точки x и $x \notin W_n$ для $n > k$. Следовательно, $|\{W \in \lambda : W \cap V_k \neq \emptyset\}| \leq k < \omega$. $\square$

9.1.5 Разбиение единицы

Пусть X пространство и f функция на X . Множество

$$\text{supp } f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

называется *носителем* функции f .

Пусть $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ семейство непрерывных функций на пространстве X . Если семейство $\{\text{supp } f_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно, то определим сумму

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = \sum \{f_\alpha : \alpha \in A, f_\alpha \neq 0\}.$$

Правая часть этого равенства является конечной суммой и поэтому определена корректно.

Утверждение 9.15. *Если семейство носителей $\{\text{supp } f_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно, то сумма $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha$ непрерывна.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Так как $\{\text{supp } f_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно, то $B = \{\alpha \in A : \text{supp } f_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ конечно для некоторой открытой окрестности точки x . Положим $f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha$ и $g = \sum_{\alpha \in B} f_\alpha$. Тогда $f|_U = g|_U$. Так как g непрерывно то f непрерывно в точке x . $\square$

Семейство непрерывных функций $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ назовем *разбиением единицы*, если семейство носителей $\{\text{supp } f_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно, $f_\alpha \geq 0$ для $\alpha \in A$ и $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha \equiv 1$.

Разбиение единицы *подчинено* покрытию γ пространства X , если семейство носителей $\{\text{supp } f_\alpha : \alpha \in A\}$ вписано в покрытие γ .

Семейство носителей $\{\text{supp } f_\alpha : \alpha \in A\}$ является покрытием для разбиения единицы. Ясно, $f_\alpha(X) \subset [0, 1]$ и $\text{supp } f_\alpha = f^{-1}((0, 1])$ для функций из разбиения единицы.

Семейство множеств $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ *комбинаторно вписано* в семейство $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$, если $S_\alpha \subset T_\alpha$ для $\alpha \in A$.

Покрытие пространства, состоящее из замкнутых множеств, будем называть *замкнутым покрытием*.

Предложение 9.16 (лемма об ужатии). *В конечное открытое покрытие $\{U_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ нормального пространства X можно комбинаторно вписать замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1, 2, \dots, n\}$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n . Если $n = 1$, от $U_1 = X$ и $F_1 = X$. Пусть $n > 1$ и утверждение доказано для $n - 1$. Пусть $F = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$. Пусть U есть окрестность F , такая что $\bar{U} \subset U_n$. Положим $Y = X \setminus U$. Так как Y замкнуто в X , то Y нормальное пространство (предложение 4.28). Семейство $\{U_i \cap Y : i = 1, 2, \dots, n - 1\}$ является открытым в Y покрытием нормального пространства Y . Из предположения индукции вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1, 2, \dots, n - 1\}$ пространства Y , комбинаторно вписанное в $\{U_i \cap Y : i = 1, 2, \dots, n - 1\}$. Положим $F_n = \bar{U}$. Семейство $\{F_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ является искомым. $\square$

Теорема 9.17. *Если X нормальное пространство, то для любого конечного открытого покрытия γ существует разбиение единицы, подчиненное покрытию γ .*

Доказательство. Пусть $\gamma = \{U_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Из леммы об ужатии (предложение 9.17) вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1, 2, \dots, n\}$, комбинаторно вписанное в γ . Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что, для $i = 1, 2, \dots, n$, существует непрерывная функция $g_i : X \rightarrow [0, 1]$, такая что $g_i(F_i) = \{1\}$ и $g_i(X \setminus F_i) = \{0\}$. Положим $g = \sum_{i=1}^n g_i$. Так как $\{F_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ покрытие, то $g \geq 1 > 0$. Положим $f_i = g_i/g$. Разбиение единицы $\{f_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ подчиненно покрытию γ . $\square$

Предложение 9.18 (лемма об ужатии для паракомпактных пространств). *В открытое покрытие $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ хаусдорфова паракомпактного пространства X можно комбинаторно вписать замкнутое покрытие $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$.*

Доказательство. Положим

$$\lambda = \{V \subset X : V \text{ открыто в } X \text{ и } \overline{V} \subset U_\alpha \text{ для некоторого } \alpha \in A\}.$$

Так как X нормально (теорема 9.13), то семейство λ является открытым покрытием X . Так как X паракомпактно, то существует открытое локально конечное покрытие λ , вписанное в γ . Положим $\lambda_\alpha = \{U \in \lambda : \overline{U} \subset U_\alpha\}$ и $F_\alpha = \bigcup \{\overline{U} : U \in \lambda_\alpha\} \subset U_\alpha$ для $\alpha \in A$. Так как λ вписано в γ , то $\bigcup_{\alpha \in A} \lambda_\alpha = \lambda$. Следовательно, $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ покрытие X , комбинаторно вписанное в $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Так как семейство λ_α локально конечно, то, в силу леммы 9.12, $F_\alpha = \bigcup \lambda_\alpha$ и, следовательно, F_α замкнуто для $\alpha \in A$. $\square$

Теорема 9.19. *Если X хаусдорфова паракомпактное пространство, то для любого открытого покрытия γ существует разбиение единицы, подчиненное покрытию γ .*

Доказательство. Так как X паракомпактно, то существует открытое локально конечное покрытие $\lambda = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, вписанное в γ . Из леммы об ужатии для паракомпактных пространств (предложение 9.19) вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$, комбинаторно вписанное в λ . Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что, для $\alpha \in A$, существует непрерывная функция $g_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$, такая что $g_\alpha(F_\alpha) = \{1\}$ и $g_\alpha(X \setminus F_\alpha) = \{0\}$. Отметим, $\text{supp } g_\alpha \subset U_\alpha$ и, следовательно, семейство носителей $\{\text{supp } g_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно. Из утверждения 9.15 вытекает, что функция $g = \sum_{i=1}^n g_i$ непрерывна. Так как $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ покрытие, то $g \geq 1 > 0$. Положим $f_\alpha = g_\alpha/g$. Разбиение единицы $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ подчиненно покрытию γ . $\square$

9.2 Дополнение

9.2.1 Метрические и метризуемые пространства, V

Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Для $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$ обозначим

$$B_\rho(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B_\rho(x, \varepsilon).$$

Семейство подмножеств λ пространства X называется *дискретным*, то если для каждого $x \in X$ существует окрестность U точки x , такая что

$$|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

Ясно, дискретное семейство является локально конечным.

Теорема 9.20 (теорема Стоуна). *Метризуемое пространство паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X есть метризуемое пространство и ρ метрика на X , которая определяет топологию X . Пусть γ открытое покрытие X и $\tau = |\gamma|$. Занумеруем γ ординалами до τ : $\gamma = \{U_\alpha : \alpha < \tau\}$. Для $\alpha < \tau$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$F_{\alpha,n} = \{x \in U_\alpha : B_\rho(x, \frac{3}{n}) \subset U_\alpha\}. \quad (9.2)$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \tau$ построим

$$C_{\alpha,n} \subset U_{\alpha,n} \subset W_{\alpha,n} \subset U_\alpha, \quad (9.3)$$

так чтобы выполнялись условия:

$$(C) \quad C_{\alpha,n} = (F_{\alpha,n} \setminus U_n) \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} W_{\beta,n};$$

$$(U) \quad U_{\alpha,n} = B_\rho(C_{\alpha,n}, \frac{1}{n});$$

$$(W) \quad W_{\alpha,n} = B_\rho(C_{\alpha,n}, \frac{3}{n});$$

где

$$U_n = \bigcup \{U_{i,\alpha} : i < n, \alpha < \tau\}. \quad (9.4)$$

Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ построим последовательность семейств

$$\Lambda_n = \{C_{\alpha,n}, U_{\alpha,n}, W_{\alpha,n} : \alpha < \tau\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

каждое семейство Λ_n построим по трансфинитной индукцией по $\alpha < \tau$.

Предположим, что для $i < n$ семейства Λ_i построены. Определим U_n по формуле (9.4). Пусть $\alpha < \tau$ и для $\beta < \alpha$ построены $C_{\beta,n}$, $U_{\beta,n}$ и $W_{\beta,n}$. Определим $C_{\alpha,n}$ формулой (C), $U_{\alpha,n}$ формулой (U), $W_{\alpha,n}$ формулой (W). Построение завершено.

Так как $C_{\alpha,n} \subset F_{\alpha,n}$, то из формул (9.2), (U) и (W) вытекает включение (9.3).

Для $n \in \mathbb{N}$, положим $\lambda_n = \{U_{\alpha,n} : \alpha < \tau\}$. Положим $\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$.

Лемма 1. *Семейство λ состоит из открытых множеств и вписано в γ .*

Доказательство. Пусть $U_{\alpha,n} \in \lambda$. Из (U) вытекает, что $U_{\alpha,n}$ открыто. Из (9.3) вытекает $U_{\alpha,n} \subset U_\alpha \in \gamma$. $\square$

Лемма 2. *λ покрытие X .*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Так как γ покрытие X , то $A = \{\beta < \tau : x \in U_\beta\} \neq \emptyset$. Положим $\alpha = \min A$. Возьмем $n \in \mathbb{N}$ такое что $B_\rho(x, \frac{3}{n}) \subset U_\alpha$. Тогда $x \in F_{\alpha,n}$. Если $x \in U_n$, то $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup \lambda$. Рассмотрим случай $x \notin U_n$. Так как $x \notin U_\beta \supset W_{\beta,n}$ для $\beta < \alpha$, то $x \notin \bigcup_{\beta < \alpha} W_{\beta,n}$. Тогда

$$x \in C_{\alpha,n} \subset U_{\alpha,n} \subset \bigcup \lambda.$$

В любом случае, $x \in \bigcup \lambda$. □

Лемма 3. λ_n дискретно для $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Если $\beta < \alpha < \tau$, то из (C) вытекает, что $W_{\beta,n} \cap C_{\alpha,n} = \emptyset$. Из (W) вытекает $\rho(C_{\beta,n}, C_{\alpha,n}) \geq \frac{3}{n}$. Из (U) вытекает, что $\rho(U_{\beta,n}, U_{\alpha,n}) \geq \frac{1}{n}$. Отсюда вытекает, что

$$|\{\alpha < \tau : U_{\alpha,n} \cap B_\rho(x, \frac{1}{2n})\}| \leq 1.$$

□

Лемма 4. Для $x \in X$ существует $m \in \mathbb{N}$ и окрестность W точки x , такое что $W \cap \bigcup \lambda_n = \emptyset$ для $n > m$.

Доказательство. Так как λ покрытие X , то $x \in U_{\kappa,k}$ для некоторых $\kappa < \tau$ и $k \in \mathbb{N}$. Существует $m \geq k$, такое что $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \subset U_{\kappa,k}$. Положим $W = B_\rho(x, \frac{1}{m})$.

Покажем, что $W \cap \bigcup \lambda_n = \emptyset$ для $n > m$. Достаточно показать, что $W \cap U_{\alpha,n} = \emptyset$ для $\alpha < \tau$. Так как $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \subset U_{\kappa,k} \subset U_n$ и, в силу (C), $C_{\alpha,n} \cap U_n = \emptyset$, то $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \cap C_{\alpha,n} = \emptyset$. Следовательно, $\rho(W, C_{\alpha,n}) \geq \frac{2}{m}$. Так как $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$, то из (C) вытекает $\rho(W, U_{\alpha,n}) \geq \frac{1}{m}$. Следовательно, $W \cap U_{\alpha,n} = \emptyset$. □

Лемма 5. λ локально конечно.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Из леммы 4 вытекает, что существует $m \in \mathbb{N}$ и окрестность W точки x , такое что $W \cap \bigcup \lambda_n = \emptyset$ для $n > m$. Для $i \leq m$, в силу леммы 3, семейство λ_i дискретно. Следовательно, существует окрестность U_i точки x , такая что $|\{V \in \lambda_i : V \cap U_i \neq \emptyset\}| \leq 1$. Положим

$$U = W \cap \bigcap_{i=1}^m U_i.$$

Тогда

$$|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \emptyset\}| \leq m < \omega.$$

□

Из лемм 1, 2 и 5 вытекает, что λ есть локально конечное открытое покрытие пространства X , вписанное в покрытие γ . □

9.3 Задачи

Глава 10

Связность и нульмерность

Темы в этой главе

Тема 29. Связные пространства. Связность отрезка. Сохранение связности и линейной связности непрерывными образами и произведениями. Связность замыкания связного множества.

Тема 30. Компоненты и квазикомпоненты связности. Совпадение компоненты и квазикомпоненты связности в компактных хаусдорфовых пространствах и локально связных пространствах. Пример пространства, в котором компоненты и квазикомпоненты связности отличаются.

Тема 31. Линейно связные пространства. Компоненты линейной связности. Компоненты линейной связности в локально линейно связных пространствах.

Тема 32. Вполне не связные и нульмерные пространства. Совпадение нульмерности и вполне не связности в компактных хаусдорфовых пространствах.

10.1 Связные и нульмерные пространства

10.1.1 Связные пространства

Пространство X называется *связным*, если не существует разбиения $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ пространства X на два непустых открытых подмножества A и B . В противном случае пространство X называется *несвязным*.

Соответственно, пространство X является несвязным, если существует разбиения $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ пространства X на два непустых открытых подмножества A и B .

Множество A является дополнением до открытого множества B и, следовательно, замкнуто. Множество A является открытым и замкнутым, то есть *открыто-замкнутым*. Дополнение до открыто-замкнутого множества открыто-замкнуто, то есть множество B тоже открыто-замкнуто.

Предложение 10.1. Пространство X связно если и только если любое открыто-замкнутое непустое подмножество U пространства X совпадает с X .

Пустое пространство и одноточечное связны. Среди двоеточий, связны андидискретное двоеточие и связное двоеточие.

Теорема 10.2. *Непрерывный образ связного пространства связан.*

Доказательство. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывное сюръективное отображение пространств и X связно. Пусть U есть открыто замкнутое непустое подмножество Y . Тогда $f^{-1}(U)$ является открыто-замкнутым непустым подмножеством X . Из предложения 10.1 вытекает, что $f^{-1}(U)$ совпадает с X . Тогда U совпадает с Y . Из предложения 10.1 вытекает, что Y связно. $\square$

Предложение 10.3. *Пусть X пространство, $Y \subset X$ связное подпространство и U открыто-замкнутое подмножество X . Тогда либо $Y \subset U$ либо $Y \cap U = \emptyset$.*

Доказательство. Предположим противное, то есть то что $V = Y \cap U \neq \emptyset$ и $Y \setminus U \neq \emptyset$. Тогда V непустое открыто-замкнутое в Y подмножество. Следовательно, в силу предложения 10.1, $V = Y$ и $Y \subset U$. Противоречие с $Y \setminus U \neq \emptyset$. $\square$

Предложение 10.4. *Пусть X пространство, $X = A \cup B$, $A \cap B \neq \emptyset$ и подпространства A и B связны. Тогда X связно.*

Доказательство. Пусть U непустое открыто замкнутое подмножество X . Так как $X = A \cup B$, то либо $A \cap U \neq \emptyset$, либо $B \cap U \neq \emptyset$. Для определенности, пусть $A \cap U \neq \emptyset$. Из предложения 10.3 вытекает, что $A \subset U$. Так как $A \cap B \neq \emptyset$, то $B \cap U \neq \emptyset$. Из предложения 10.3 вытекает, что $B \subset U$. Следовательно, $X = A \cup B \subset U$. $\square$

Предложение 10.5. *Пусть X пространство и для любых $x, y \in X$ существует связное $C \subset X$, такое что $x, y \in C$. Тогда X связно.*

Доказательство. Пусть U непустое открыто-замкнутое подмножество X . Пусть $x \in U$. Для любого $y \in X$ существует связное $C \subset X$, для которого $x, y \in C$. Тогда $V = U \cap C$ открыто-замкнуто в связном пространстве C и $x \in V \neq \emptyset$. Следовательно, $V = C$ и $y \in V \subset U$. Получаем, что $U = X$. $\square$

Предложение 10.6. *Пусть X пространство и $\mathcal{C}$ есть некоторое семейство связных подмножеств X . Если $A \cap B \neq \emptyset$ для $A, B \in \mathcal{C}$, то множество $\bigcup \mathcal{C}$ связно.*

Доказательство. Пусть $x, y \in C = \bigcup \mathcal{C}$. Тогда $x \in A$ и $y \in B$ для некоторых $A, B \in \mathcal{C}$. Из предложения 10.4 вытекает, что $D = A \cup B$ связно. По построению, $x, y \in D$. Из предложения 10.5 вытекает, что X связно. $\square$

Теорема 10.7. *Пусть X пространство и $Y \subset X = \bar{Y}$ всюду плотное связное подпространство. Тогда X связно.*

Доказательство. Пусть U непустое открыто-замкнутое подмножество X . Так как Y всюду плотно, то $V = Y \cap U \neq \emptyset$ непусто. Так как V непусто и открыто-замкнуто в Y , то из связности Y , в силу предложения 10.1, вытекает, что $V = Y$. Следовательно, $Y \subset U$. Так как U замкнуто и Y всюду плотно, то $U = X$. Из предложения 10.1 вытекает, что X связно. $\square$

Теорема 10.8. Пусть X и Y связные пространства. Тогда произведение $X \times Y$ связно.

Доказательство. Пусть $x = (a, b) \in X \times Y$ и $y = (c, d) \in X \times Y$. Положим $A = \{a\} \times Y$, $B = X \times \{d\}$ и $C = A \cup B$. Так как A и B связны и $A \cup B \neq \emptyset$, то, в силу предложения 10.4, C связно. Так как $x, y \in C$, то из предложения 10.5 вытекает, что $X \times Y$ связно. $\square$

Теорема 10.9. Отрезок вещественной прямой связан.

Доказательство. Предположим, что отрезок $[a, b]$ несвязен. Пусть $[a, b] = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ есть разбиения отрезка $[a, b]$ на два непустых открыто-замкнутых в $[a, b]$ подмножества A и B . Пусть $a' \in A$ и $b' \in B$.

Будем считать $a' < b'$, случай $b' < a'$ вытекает из случая $a' < b'$. Положим $A' = [a', b'] \cap A$ и $B' = [a', b'] \cap B$. Тогда $a' \in A'$, $b' \in B'$, A' и B' есть разбиение отрезка $[a', b']$ на два непустых открыто-замкнутых в $[a', b']$ множества. Пусть $m = \inf B'$. Тогда $m \in B'$ и $a' < m$. Так как $[a', m) \subset A'$ и A' замкнуто, то $m \in A'$. Получаем $m \in A' \cap B' \neq \emptyset$. Противоречие. $\square$

10.1.2 Компоненты и квазикомпоненты связности

Пусть X пространство. Определим два отношения эквивалентности $\sim_c$ и $\sim_q$ на пространстве X . Пусть $x, y \in X$.

Положим $x \sim_c y$ если существует связное $C \subset X$, для которого $x, y \in C$. Так как одноточечное пространство связно, то отношение $\sim_c$ рефлексивно, то есть $x \sim_c x$. Ясно, отношение $\sim_c$ симметрично. Транзитивность $\sim_c$ вытекает из предложения 10.4. Класс эквивалентности по отношению $\sim_c$, содержащий точку x , обозначим через C_x . Множество C_x называется *компонентой связности* точки x .

Положим $x \sim_q y$ если выполняется условие: если U открыто-замкнутое подмножество X и $x \in U$, то $y \in U$. Непосредственно проверяется, что $\sim_q$ является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности по отношению $\sim_q$, содержащий точку x , обозначим через Q_x . Множество Q_x называется *квазикомпонентой связности* точки x .

Утверждение 10.10. Компонента связности C_x является наибольшим связным множеством, содержащим x . Компонента связности C_x замкнута.

Доказательство. Положим $\mathcal{C} = \{C \subset X : x \in C \text{ и } C \text{ связно}\}$. Тогда $C_x = \bigcup \mathcal{C}$. Из предложения 10.6 вытекает, что C_x связно и, следовательно, $C_x \in \mathcal{C}$. Получаем, что C_x является наибольшим связным множеством, содержащим x . Из теоремы 10.7 вытекает, что $\overline{C_x}$ связно и $\overline{C_x} \in \mathcal{C}$. Следовательно $\overline{C_x} = C_x$ и C_x связно. $\square$

Утверждение 10.11. Компонента квазисвязности Q_x является пересечением открыто-замкнутых множеств, содержащим x . Квазикомпонента связности Q_x замкнута.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ есть семейство открыто-замкнутых множеств, содержащим x . Положим $Q = \bigcap \mathcal{U}$. Если $y \in Q$, то $x \sim_q y$. Следовательно, $y \in Q_x$. Получаем $Q \subset Q_x$. Пусть $y \notin Q$. Тогда $x \in U \not\supset y$ для некоторого

$U \in \mathcal{U}$. Следовательно, $x \not\vdash_q y$. Получаем $Q_x \subset Q$. Следовательно, $Q = Q_x$. Как пересечение замкнутых множеств, Q замкнуто. $\square$

Утверждение 10.12. $C_x \subset Q_x$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ есть семейство открыто-замкнутых множеств, содержащим x . Тогда, в силу утверждения 10.11, $Q_x = \bigcap \mathcal{U}$. Из утверждения 10.10 вытекает, что C_x связно. Пусть $U \in \mathcal{U}$. Из предложения 10.8 вытекает, что $C_x \subset U$. Следовательно $C_x \subset Q_x$. $\square$

Пространство X называется *локально связным*, если во всякой окрестности произвольной точки $x \in X$ содержится связная окрестность.

Теорема 10.13. Пусть X топологическая пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X локально связное пространство;
- (2) для любой точки $x \in X$ компонента связности C_x открыто-замкнута и совпадает с квазикомпонентой Q_x ;
- (3) существует база X , состоящая из связных множеств.

Доказательство. Докажем $(1) \Rightarrow (2)$. В силу утверждения 10.10, компонента связности C_x замкнута и связна.

Пусть $y \in C_x$. Так как X локально связно, то существует связная окрестность V точки y . Из предложения 10.4 вытекает, что $C_x \cup V$ связно. Тогда, в силу утверждения 10.10, $C_x \cup V \subset C_x$, то есть $V \subset C_x$. Следовательно, y внутренняя точка множества C_x . Мы доказали, что C_x открыто.

Компонента связности C_x открыто-замкнута. Из утверждения 10.11 вытекает $Q_x \subset C_x$. Из утверждения 10.12 вытекает $C_x \subset Q_x$. Следовательно, $C_x = Q_x$.

Докажем $(2) \Rightarrow (3)$. Докажем, что все открытые связные подмножества X образуют базу X . Пусть $x \in X$ и U окрестность x . Пусть $V \subset U$ открытая окрестность x . Подпространство V локально связно, поэтому, в силу (2), компонента связности C точки x в V открыта в V и связна. Тогда V открытая связная окрестность точки x , для которой $V \subset U$.

Импликация $(3) \Rightarrow (1)$ очевидна. $\square$

Теорема 10.14. Пусть X хаусдорфово компактное пространство. Тогда $C_x = Q_x$ для любого $x \in X$.

Доказательство. В силу утверждений 10.10 и 10.12, достаточно показать, что Q_x связно. Предположим противное. Квазикомпонента связности Q_x замкнута (утверждение 10.11). Пусть $Q_x = P \cup F$, $P \cap F = \emptyset$ и $x \in P$ для некоторых замкнутых непустых $P, F \subset X$.

Так как X нормальное пространство (теорема 5.7), то существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V множеств P и F . Множества $W = U \cup V$ является открытой окрестностью множества Q_x .

Лемма 1. Существует открыто-замкнутое $O \subset X$, такое что $Q_x \subset O \subset W$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ есть семейство открыто-замкнутых множеств, содержащим x . Семейство $\mathcal{U}$ является базой фильтра и, в силу утверждения 10.11, $Q_x = \bigcap \mathcal{U} \subset W$. Из предложения 6.17 вытекает, что $Q_x \subset O \subset W$ для некоторого $O \in \mathcal{U}$. $\square$

Множество $S = O \cap U$ открыто. Так как $S = O \cap \overline{U}$, то S замкнуто. Тогда множество S открыто замкнуто и

$$x \in P \subset S \subset U \subset X \setminus F.$$

Из утверждения 10.11 вытекает, что $Q_x \subset S$. Противоречие с $\emptyset \neq F \subset Q_x$. $\square$

Пример 10.15. Определим пространство X как подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$. Прямая l_0 — прямая $x = 0$. Прямая l_1 — прямая $x = 1$. Для целых $n \geq 3$, обозначим через P_n прямоугольник (периметр прямоугольника) со сторонами на прямых: $x = \frac{1}{n}$, $x = 1 - \frac{1}{n}$, $y = n$, $y = -n$. Положим

$$X = l_0 \cup l_1 \cup \bigcup_{n=3}^{\infty} P_n.$$

Пространство X локально компактно.

Найдем квазикомпоненту Q_O точки $O = (0, 0)$. Пусть U открыто-замкнутое подмножество X , содержащие O . Тогда существует $m \in \mathbb{N}$, такое что $P_n \cap U \neq \emptyset$ для $n > m$. Так как множества l_0 и P_n связны, то $l_0 \subset U$ и $P_n \subset U$ для $n > m$. Положим $M = l_0 \cup \bigcup_{n=m+1}^{\infty} P_n$. Тогда

$$U_m = \overline{M} = l_0 \cup l_1 \cup \bigcup_{n=m+1}^{\infty} P_n \subset U.$$

Множество U_m открыто-замкнуто. Следовательно,

$$Q_O = \bigcap_{m=4}^{\infty} U_m = l_0 \cup l_1.$$

Квазикомпонента Q_O отличается от компоненты точки O , так как Q_O несвязно.

10.1.3 Линейно связные пространства

Пусть X пространство. Обозначим через $\mathbb{I}$ отрезок $[0, 1]$.

Непрерывное отображение $\varphi: \mathbb{I} \rightarrow X$ называется *путём* в пространстве X . Точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются соответственно *началом* и *концом* пути φ . Если начало и конец пути φ совпадают, то путь φ называется *петлёй*. Будем говорить, что путь φ *соединяет точки* $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$.

Пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путём.

Предложение 10.16. *Линейно связное пространство связно.*

Доказательство. Пусть X линейно связное пространство и $x, y \in X$. Существует путь $\varphi: \mathbb{I} \rightarrow X$, для которого $x = \varphi(0)$ и $y = \varphi(1)$. Отрезок $\mathbb{I}$ связан (теорема 10.9). Так как φ непрерывное отображение, то $\varphi(\mathbb{I})$ связно (теорема 10.2) и $x, y \in \varphi(\mathbb{I})$. Из предложения 10.5 вытекает, что X связно. $\square$

Введем отношение $\sim_l$ на пространстве X . Пусть $x, y \in X$. Положим $x \sim_l y$ если существует путь φ в пространстве X , такое что x начало пути φ и y конец пути φ .

Утверждение 10.17. *Отношение $\sim_l$ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $x, y, z \in X$.

Проверим рефлексивность $\sim_l$: $x \sim_l x$. Положим $\varphi(t) = x$ для $t \in \mathbb{I}$. Так как φ постоянное отображение, то φ непрерывно. Путь φ соединяет x с x .

Проверим симметричность $\sim_l$: если $x \sim_l y$, то $y \sim_l x$. Пусть φ есть путь, который соединяет x и y . Положим $\psi(t) = \varphi(1 - t)$ для $t \in \mathbb{I}$. Как композиция непрерывных отображений $t \mapsto 1 - t$ и φ , отображение ψ непрерывно (предложение 4.20). Путь ψ соединяет y и x .

Проверим транзитивность $\sim_l$: если $x \sim_l y$ и $y \sim_l z$, то $x \sim_l z$. Пусть путь φ соединяет x с y и путь ψ соединяет y с z . Положим

$$\theta(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & \text{для } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \psi(2(t - \frac{1}{2})), & \text{для } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

для $t \in \mathbb{I}$. Положим

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta|_{[0, \frac{1}{2}]} : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow X, \quad t \mapsto \varphi(2t), \\ \theta_2 &= \theta|_{[\frac{1}{2}, 1]} : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \psi(2(t - \frac{1}{2})). \end{aligned}$$

Как композиция непрерывных отображений $t \mapsto 2t$ и φ , отображение θ_1 непрерывно (предложение 4.20). Как композиция непрерывных отображений $t \mapsto 2(t - \frac{1}{2})$ и ψ , отображение θ_2 непрерывно (предложение 4.20). Из предложения 3.13 вытекает, что θ непрерывно. Путь θ соединяет x с z . $\square$

Класс эквивалентности по отношению эквивалентности $\sim_l$ называется *компонентой линейной связности*. Компонента линейной связности, содержащая точку x , обозначим L_x .

Утверждение 10.18. *Компонента линейной связности L_x линейно связна.*

Доказательство. Пусть $u, v \in L_x$. Тогда $u \sim_l v$. То есть существует путь, соединяющий точки u и v . $\square$

Утверждение 10.19. $L_x \subset C_x$

Доказательство. Так как L_x связно и $x \in L_x$, то $L_x \subset C_x$. $\square$

Пространство X назовем *локально линейно связным*, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки x существует линейно связная окрестность V , такая что $x \in V \subset U$.

Теорема 10.20. Пусть X топологическое пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (1) X локально линейно связное пространство;
- (2) для любой точки $x \in X$ компонента линейной связности L_x открыто-замкнута и совпадает с компонентой C_x и квазикомпонентой Q_x ;
- (3) существует база X , состоящая из линейно связных множеств.

Доказательство. Докажем $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $y \in L_x$. Так как X локально линейно связно, то существует линейно связная окрестность V точки y . Тогда $L_x \cup V$ линейно связно. Тогда $L_x \cup V \subset L_x$, то есть $V \subset L_x$. Следовательно, y внутренняя точка множества L_x . Мы доказали, что L_x открыто. Каждый класс эквивалентности $\sim_l$ открыт. Следовательно, множество $L_x = X \setminus \bigcup \{L_y : y \in X \setminus L_x\}$ замкнуто.

Компонента линейной связности L_x открыто-замкнута. Из утверждения 10.11 вытекает $Q_x \subset L_x$. Из утверждений 10.12 и 10.19 вытекает $L_x \subset C_x \subset Q_x$. Следовательно, $L_x = C_x = Q_x$.

Докажем $(2) \Rightarrow (3)$. Докажем, что все открытые линейно связные подмножества X образуют базу X . Пусть $x \in X$ и U окрестность x . Пусть $V \subset U$ открытая окрестность x . Подпространство V локально линейно связно, поэтому, в силу (2), компонента линейной связности L точки x в V открыта в V и линейно связна. Тогда V открытая линейно связная окрестность точки x , для которой $V \subset U$.

Импликация $(3) \Rightarrow (1)$ очевидна. □

10.1.4 Вполне не связные и нульмерные пространства

T_1 -Пространство X называется *нульмерным*, если оно имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств.

Пространство X называется *вполне несвязным*, если несвязно всякое его подпространство, содержащее более одной точки.

Предложение 10.21. Если у T_1 -пространства X есть предбаза, состоящая из открыто-замкнутых множеств, то X нульмерно.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ предбаза, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Тогда семейство $\{\bigcap \mu : \mu \subset \mathcal{P}, |\mu| < \omega\}$ является базой, состоящей из открыто-замкнутых множеств. □

Предложение 10.22. Нульмерное пространство вполне регулярно.

Доказательство. Пусть X нульмерное пространство, $\mathcal{B}$ база X , состоящая из открыто-замкнутых множеств, $x \in X$ и $U \ni x$ окрестность точки x . Тогда $x \in V \subset U$ для некоторого $V \in \mathcal{B}$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in V, \\ 1, & \text{если } x \in X \setminus V \end{cases}$$

для $x \in X$. Функция f непрерывна, $f(x) = 0$ и $f(X \setminus U) = \{1\}$. □

Предложение 10.23. Нульмерное пространство вполне несвязно.

Доказательство. Пусть X нульмерное пространство и $\mathcal{B}$ база X , состоящая из открыто-замкнутых множеств. Предположим противное, то есть существует связное $Y \subset X$, для которого $|Y| > 1$. Пусть x и y есть различные элементы Y . Так как X нульмерно, то X T_1 -пространство. Так как множество $Y \setminus \{y\}$ является окрестностью точки x . Так как $\mathcal{B}$ база пространства X , то $x \in U$ и $y \notin U$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$. Положим $Y_1 = Y \cap U$ и $Y_2 = Y \setminus U$. Тогда $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $Y_1 \cup Y_2 = Y$ и множества Y_1 и Y_2 открыто замкнуты в Y . Противоречие со связностью Y . $\square$

Предложение 10.24. (1) *Подпространство нульмерного пространства нульмерно.*

(2) *Подпространство вполне несвязного пространства вполне несвязно.*

(3) *Произведение нульмерных пространств нульмерно.*

(4) *Произведение вполне несвязных пространств вполне несвязно.*

Доказательство. Докажем (1). Пусть X нульмерное пространство и $\mathcal{B}$ база X , состоящая из открыто-замкнутых множеств. Пусть $Y \subset X$. Тогда $\{Y \cap U : U \in \mathcal{B}\}$ открыто-замкнутая база Y .

Докажем (2). Пусть X вполне несвязное пространство и $Y \subset X$. Если $C \subset Y$ связное подмножество, то C связное подмножество X . Следовательно, $|C| = 1$.

Докажем (3). Пусть $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ произведение нульмерных пространств и $\mathcal{B}_\alpha$ база X_α , состоящая из открыто-замкнутых множеств. Пространство X является T_1 -пространством, как произведение T_1 -пространств (предложение 8.20). Семейство $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{B}_\alpha\}$ является предбазой X (утверждение 7.8), состоящая из открыто-замкнутых множеств. Из предложения 10.21 вытекает, что X нульмерно.

Докажем (4). Пусть $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ произведение вполне несвязных пространств. Пусть $C \subset X$ связное подмножество. Так как проекции $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ непрерывны (утверждение 7.7) и X_α вполне несвязно, то $|\pi_\alpha(C)| = 1$. Следовательно, $|C| = 1$. $\square$

Предложение 10.25. *Пространство X вполне несвязно если и только если $C_x = \{x\}$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Докажем $(\Rightarrow)$. Так как C_x связно (утверждение 10.10), то $|C_x| = 1$. Докажем $(\Leftarrow)$. Пусть $C \subset X$ связно. Возьмем $x \in C$. Тогда $C \subset C_x$. Следовательно, $|C| = 1$. $\square$

Теорема 10.26. *Вполне несвязное компактное хаусдорфово пространство нульмерно.*

Доказательство. Из предложения 10.25 и теоремы 10.14 вытекает, что $Q_x = \{x\}$ для всех $x \in X$.

Пусть $x \in X$ и U окрестность x . Пусть $\mathcal{B}_x$ есть семейство открытых-замкнутых множеств, содержащих точку x . Тогда $\{x\} = Q_x = \bigcap \mathcal{B}_x$. Семейство $\mathcal{B}_x$ является базой фильтра, состоящей замкнутых множеств. Из предложения 6.17 вытекает, что $O \subset U$ для некоторого $O \in \mathcal{B}_x$. $\square$

10.2 Дополнение

10.3 Задачи

Глава 11

Пространство Бэра и канторово множество

Темы в этой главе

Тема 33. Деревья. Тело дескриптивного дерева. Пространство Бэра.

Тема 34. A -системы и их ядра.

Тема 35. Канторово множество и его непрерывные образы. Гомеоморфность нульмерных метризуемых компактных пространств без изолированных точек.

11.1 Деревья, пространство Бэра и канторово множество и их непрерывные образы

11.1.1 Деревья

Частично упорядоченное множество $(T, <)$ называется *деревом*, если для каждого $x \in T$ множество

$$\text{pr}(x, T) = \{y \in T : y < x\}$$

всех *предшественников* элемента x является вполне упорядоченной цепью. Элементы дерева называются *узлами*. Минимальные элементы T называются *корнями*. Максимальные элементы T называются *терминальным* узлами, то есть x терминальный узел, если $\{y \in T : x < y\} = \emptyset$.

Два узла $x, y \in T$ называются *сравнимыми* если либо $x < y$, либо $x = y$, либо $y < x$.

Порядковый тип $\text{Ord}(\text{pr}(x, T))$ предшественников $\text{pr}(x, T)$ узла x называется *высотой* x . Для ординала α , обозначим через $\text{Lv}_\alpha(T)$ множество всех узлов в T высоты α . Множество $\text{Lv}_\alpha(T)$ называется α -*уровень* дерева T . *Высотой* дерева T называется минимальный ординал α , для которого α -уровень $\text{Lv}_\alpha(T)$ пуст.

Понятие дерева встречается в разных разделах математики, информатики и программировании. Терминология в разных разделах и в работах раз-

ных авторов отличается. В теории графов узлы называются вершинами, а терминальные узлы листьями.

Подмножество $S \subset T$ называется *поддеревом*, если $\text{pr}(x, T) \subset S$ для $x \in S$. Отметим, что $\text{pr}(x, T) = \text{pr}(x, S)$ и высота узла x в T и S совпадают для $x \in S$.

Полные M -арные деревья

Пусть M есть множество. Обозначим

$$M^{<\omega} = \bigcup_{n=0}^{\infty} M^n.$$

Множество $M^{<\omega}$ состоит из конечных последовательностей элементов из M . Обозначим через $\text{lt}(x)$ длину n последовательности $u \in M^n$. Нулевая степень M^0 состоит из пустой последовательности длины ноль — $\emptyset$.

Пусть $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in M^n \subset M^{<\omega}$. Обозначим

$$u \upharpoonright m = (u_0, \dots, u_{m-1})$$

для $m \leq n$ — *начальный сегмент* последовательности u длины m .

Введем частичный порядок на множестве $M^{<\omega}$. Пусть $v, u \in M^{<\omega}$. Положим $v < u$, если v является начальным сегментом u и $\text{lt}(v) < \text{lt}(u)$. Другими словами, $v < u$, если $v = u \upharpoonright n$ для некоторого $n < \text{lt}(u)$.

Если $v < u$, то будем также говорить, что u *продолжает* v .

Множество $\{v \in M^{<\omega} : v < u\}$ является конечной цепью для $u \in M^{<\omega}$. Следовательно, $M^{<\omega}$ является деревом. Высота дерева $M^{<\omega}$ равна ω .

Дерево $M^{<\omega}$ называется *полным M -арным деревом*. В дереве $M^{<\omega}$ есть единственный корень, пустая последовательность $() = \emptyset \in M^0$. Высота узла из $M^{<\omega}$ совпадает с длиной. Для $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in M^n$ и $x \in M$ обозначим

$$u \frown x = (u_0, \dots, u_{n-1}, x) \in M^{n+1}.$$

Бесконечная последовательность $s = (s_0, s_1, \dots) \in M^\omega$ называется *бесконечной ветвью* дерева T , если $s \upharpoonright n = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \in T$ для всех $n \in \omega$. Множество всех бесконечных ветвей называется *телом* дерева T и обозначается как $[T]$.

Для $s \in [T]$ и $u \in T$, будем говорить u *является начальным сегментом* s или s *продолжает* u , если $u = s \upharpoonright n$ для $n = \text{lt}(u)$.

Продолжим частичный порядок с T на $T \cup [T]$. Различные элементы из $[T]$ попарно не сравнимы. Если $u \in T$ и $s \in [T]$, то $u < s$ если s продолжает u . Относительно этого порядка, множество $T \cup [T]$ является деревом, в котором T поддерево $T \cup [T]$ и $[T]$ является ω -уровнем дерева $T \cup [T]$.

Данное определение ветвей дерева соответствует использованию деревьев в дескриптивной теории множеств. В других разделах математики, ветвь дерева — максимальная цепь в дереве. Бесконечные ветви в нашем контексте также называются ветвь сквозь дерево или путь сквозь дерево. *Ветвь сквозь дерево* — это ветвь, длина (порядковый тип) которой совпадает с высотой дерева.

Индукция по дереву

Метод индукции построения и доказательства распространяется на случай, когда индексное множество является деревом.

Пусть T поддереву полного M -арного дерева $M^{<\omega}$ и $P(t)$ есть некоторое утверждение для каждого $t \in T$.

Предположим мы доказали:

- База индукция. $P(\emptyset)$ верно.
- Шаг индукция. Если $u \in T$ и $P(u)$ верно, то $P(u \frown x)$ верно для каждого $x \in \text{suc}(u, T)$.

Тогда $P(u)$ верно для каждого $u \in T$.

Аналогично определяется построение индукцией по T .

Предположим мы построили:

- База индукция. Строим множество $M_\emptyset$;
- Шаг индукция. Если $u \in T$ и построено M_u , то тогда определяем $M_{u \frown x}$ для каждого $x \in \text{suc}(u, T)$.

Тогда мы построили M_u для каждого $u \in T$.

11.1.2 Пространство Бэра

Поддеревья полного ω -арного дерева $\omega^{<\omega}$ назовем *дескриптивными деревьями*.

Пусть T есть дескриптивное дерево. Для $u \in T$, обозначим

$$W(u, T) = \{s \in [T] : u < s\}.$$

Несложно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 11.1. Пусть $v, u \in T$. Тогда

- (1) если $v < u$, то $W(v, T) \supset W(u, T)$;
- (2) если v и u несравнимы, то $W(v, T) \cap W(u, T) = \emptyset$.

Обозначим

$$\mathcal{B}_T = \{W(u, T) : u \in T\}.$$

Семейство $\mathcal{M}$ подмножеств множества X называется *неархимедовым*, если для любых $U, V \in \mathcal{M}$, либо $U \cap V = \emptyset$, либо $U \subset V$, либо $V \subset U$.

Утверждение 11.2. Семейство $\mathcal{B}_T$ является неархимедовым семейством.

Семейство $\mathcal{B}_T$ является базой топологии.

Доказательство. Из утверждения 11.1 вытекает, что $\mathcal{B}_T$ является неархимедовым семейством.

Так как $W(\emptyset, T) = T$, то $\mathcal{B}_T$ покрытие $[T]$. Пусть $U, V \in \mathcal{B}_T$ и $U \cap V \neq \emptyset$. Так как $\mathcal{B}_T$ неархимедово семейство, то либо $U \subset V$, либо $V \subset U$. Следовательно, $U \cap V \in \mathcal{B}_T$. $\square$

На множестве $[T]$ будем рассматривать топологию, которая определяется с помощью базы топологии $\mathcal{B}_T$.

Утверждение 11.3. *Пространство $[T]$ нульмерно.*

Доказательство. Ясно, $[T]$ T_1 -пространство. Покажем, что непустое $U \in \mathcal{B}_T$ открыто-замкнуто. Так как $\mathcal{B}_T$ база топологии, то U открыто. Пусть $x \in U$. Покажем, что $X \setminus U$ открыто. Пусть $y \in X \setminus U$. Существует $V \in \mathcal{B}_T$, такое что $y \in V$ и $x \notin V$. Тогда $U \not\subset V$ и $V \not\subset U$. Так как семейство $\mathcal{B}_T$ неархимедово, то $U \cap V = \emptyset$. Следовательно, $X \setminus U$ открыто и U замкнуто. $\square$

Предложение 11.4. *Топология пространства Бэра ω^ω является топологией произведения ω^ω , где на ω рассматривается дискретная топология.*

Доказательство. Пусть $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in \omega^{<\omega}$. Тогда базисная окрестность $W(u, \omega^{<\omega})$ пространства Бэра совпадает с базисной окрестностью $\prod_{i=0}^{\infty} U_i$ произведения ω^ω с топологией произведения, где $U_i = \{u_i\}$ для $i < n$ и $U_i = X$ для $i \geq n$. $\square$

Утверждение 11.5. *Пространство $[T]$ замкнуто в ω^ω .*

Доказательство. Пусть $s \in \omega^\omega \setminus [T]$. Тогда $u = s \upharpoonright n \notin T$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда $W(u, \omega^{<\omega}) \cap T = \emptyset$. Следовательно, $s \in \text{Int}(\omega^\omega \setminus [T])$. $\square$

Дерево без терминальных узлов называется *обрезанным*. Обозначим

$$\text{suc}(u, T) = \{x \in \omega : u \frown x \in T\}$$

для $u \in T$. Дерево T является *обрезанным*, если $\text{suc}(u, T) \neq \emptyset$ для $u \in T$.

Предложение 11.6. *Если T обрезанное дескриптивное дерево, то $W(u, T) \neq \emptyset$ для всех $u \in T$.*

Доказательство. Пусть $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in T$. Пусть $(u_i)_{i \geq n}$ последовательность, такая что

$$u_i \in \text{suc}((u_0, \dots, u_{i-1}), T)$$

для $i \geq n$ и $s = (u_i)_i$. Тогда $s \in W(u, T)$. $\square$

Дерево T называется *совершенным*, если для любого $x \in T$ существуют несравнимые $u, v \in T$, для которых $x < u$ и $x < v$. Пространство X называется *совершенным*, если в X нет изолированных точек.

Из определений вытекает следующие утверждение.

Предложение 11.7. *Совершенное дескриптивное дерево является обрезанным.*

Предложение 11.8. *Если T совершенное дескриптивное дерево, то $[T]$ совершенное пространство.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $|W(u, T)| > 1$ для $u \in T$. Пусть $a, b \in T$ больше u и несравнимы. Тогда $W(a, T), W(b, T) \subset W(u, T)$, $W(a, T)$ и $W(b, T)$ не пусты (предложение 11.6), $W(a, T) \cap W(b, T) = \emptyset$ (утверждение 11.1). $\square$

Дерево T называется *компактным*, если T обрезаемое дерево и для любого $u \in T$ множество $\text{suc}(u, T)$ конечно. Дерево T компактно если и только если T обрезаемое дерево и каждый уровень в T конечен.

Предложение 11.9. *Если дескриптивное дерево T компактно, то тело дерева $[T]$ компактно.*

Доказательство. Пусть π_n есть проекция ω^ω на n -ю копию ω . Положим $L_n = \pi_n([T])$. Дескриптивное обрезаемое дерево T компактно если и только если каждое L_n конечно. Так как $[T] \subset \prod_{n \in \omega} L_n$, все L_n конечны и $[T]$ замкнуто в ω^ω (утверждение 11.5), то $[T]$ замкнутое подпространство компактного пространства $\prod_{n \in \omega} L_n$. Следовательно, $[T]$ компактно. $\square$

11.1.3 A -системы

Пусть T есть дескриптивное дерево и X топологическое пространство. Отображение $\Phi : T \rightarrow \text{Exp}(X)$ называется *A -системой*.

Стандартное определение A -системы: отображение из $\omega^{<\omega}$ в $\text{Exp}(X)$. Отображение $\Phi : T \rightarrow \text{Exp}(X)$ можно продолжить до $\omega^{<\omega}$ в $\text{Exp}(X)$: $\Phi(u) = \emptyset$ для $u \in \omega^{<\omega} \setminus T$.

Множество

$$\ker \Phi = \bigcup_{s \in [T]} \bigcap_{n \in \omega} \Phi(s \upharpoonright n)$$

называется *ядром A -системы Φ* .

Будем говорить, что *последовательность множеств $(M_n)_n$ сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует N , такое что $M_n \subset U$ для $n > N$.

Рассмотрим условия на Φ :

(A₁) $\Phi(v) \subset \Phi(u)$ для $v, u \in T$ и $v < u$;

(A₂) $\Phi(u)$ замкнуто в X для $u \in T$;

(A₃) для $s \in [T]$, пересечение $\bigcap_{n \in \omega} \Phi(s \upharpoonright n)$ состоит из одной точки $\hat{\Phi}(s)$ и последовательность множеств $(\Phi(s \upharpoonright n))_{n \in \omega}$ сходится к точке $\hat{\Phi}(s)$;

A -систему Φ назовем *непрерывной*, если выполняются условия (A₁), (A₂) и (A₃). Для $s \in [T]$, единственный элемент $\bigcap_{n \in \omega} \Phi(s \upharpoonright n)$ обозначим через $\hat{\Phi}(s)$. Отметим, что $\ker \Phi = \hat{\Phi}([T])$. Отображение $\hat{\Phi}$ назовем *предельным отображением* для A -системы Φ .

Утверждение 11.10. *Если A -система Φ непрерывна, то отображение $\hat{\Phi} : [T] \rightarrow X$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $s \in [T]$ и U окрестность точки $\hat{\Phi}(s)$. Из (A₃) вытекает, что $\Phi(s \upharpoonright n) \subset U$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда $V = W(s \upharpoonright n, T)$ является окрестностью s и

$$\hat{\Phi}(V) \subset \Phi(s \upharpoonright n) \subset U.$$

$\square$

Утверждение 11.11. *Предположим, что X хаусдорфово пространство, A -система Φ непрерывна и $u, v \in [T]$. Следующие условия эквивалентны.*

- (1) $\hat{\Phi}(u) = \hat{\Phi}(v)$;
- (2) $\Phi(u \upharpoonright n) \cap \Phi(v \upharpoonright n) \neq \emptyset$ для всех $n \in \omega$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из того, что $\hat{\Phi}(u) \in \Phi(u \upharpoonright n)$ и $\hat{\Phi}(v) \in \Phi(v \upharpoonright n)$ для всех $n \in \omega$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, то есть $\hat{\Phi}(u) \neq \hat{\Phi}(v)$. Пусть U и V непересекающиеся окрестности точек $\hat{\Phi}(u)$ и $\hat{\Phi}(v)$. Из непрерывности Φ вытекает, что существует $N \in \omega$, такое что $\Phi(u \upharpoonright n) \subset U$ и $\Phi(v \upharpoonright n) \subset V$ для $n > N$. Тогда $\Phi(u \upharpoonright n) \cap \Phi(v \upharpoonright n) = \emptyset$. Противоречие. $\square$

Утверждение 11.12. *Предположим, что для A -системы Φ выполняются условия (A_1) , (A_2) и следующие условие:*

- (A_3^m) *существует полная метрика ρ на X , которая порождает топологию X , последовательность $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ положительных чисел, сходящаяся к 0, такие что*

$$\text{diam}_\rho(\Phi(u)) \leq \varepsilon_n$$

для $u \in T$ и $n = \text{lt}(u)$.

Тогда Φ непрерывно.

Доказательство. Покажем, что выполняется (A_3) . Из (A_3^m) вытекает, что $|\bigcap_{n \in \omega} \Phi(s \upharpoonright n)| = 1$ для $s \in [T]$, то есть отображение $\hat{\Phi}$ определено. Покажем, что $(\Phi(s \upharpoonright n))_{n \in \omega}$ сходится к точке $x = \hat{\Phi}(s)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\varepsilon_n < \varepsilon$ для некоторого $n \in \omega$. Из (A_3^m) вытекает, что $\Phi(s \upharpoonright n) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$. $\square$

Утверждение 11.13. *Предположим, что для A -системы Φ выполняются условия (A_1) , (A_2) и следующие условие:*

- (A_3^c) *пространство X является хаусдорфовым компактом и $\bigcap_{n \in \omega} \Phi(s \upharpoonright n)$ состоит не более чем из одной точки.*

Тогда Φ непрерывно.

Доказательство. Проверим условие (A_3) . Из (A_3^c) вытекает, что $|\bigcap_{n \in \omega} \Phi(s \upharpoonright n)| = 1$ для $s \in [T]$, то есть отображение $\hat{\Phi}$ определено. Покажем, что $(\Phi(s \upharpoonright n))_{n \in \omega}$ сходится к точке $x = \hat{\Phi}(s)$. Пусть U есть окрестность точки x . Семейство $\mathcal{F} = \{\Phi(s \upharpoonright n) : n \in \omega\}$ является базой фильтра, состоящим из замкнутых множеств, в компактном хаусдорфовом пространстве и $\{x\} = \bigcap \mathcal{F}$. Из предложения 6.17 вытекает, что $\Phi(s \upharpoonright N) \subset U$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $(\Phi(s \upharpoonright n))_{n \in \omega}$ убывающая, то $\Phi(s \upharpoonright n) \subset U$ для $n > N$. $\square$

Предложение 11.14. *Пусть T есть обрезанное дискриптивное дерево, X пространство и $\Phi : [T] \rightarrow \text{Exp}(X)$ есть непрерывная A -операция и выполняется следующее условие:*

- (A_4) *для $u \in T$, $\Phi(u) = \bigcup \{\Phi(u \cap l) : l \in \text{suc}(u, T)\}$.*

Тогда $\hat{\Phi}([T]) = \Phi(\emptyset)$.

Доказательство. Очевидно, $\hat{\Phi}([T]) \subset \Phi(\emptyset)$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in \Phi(\emptyset)$. Из (A₄) вытекает, что существует последовательность $s = (x_n)_n \in \omega^\omega$, такая что $u_n = s \upharpoonright n \in T$ и $x \in \Phi(u_n)$ для $n \in \omega$. Тогда $s \in [T]$ и $\hat{\Phi}(s) = x$. $\square$

Напомним, семейство множеств $\mathcal{F}$ в пространстве X называется *дискретным семейством*, если для любого $x \in X$ существует окрестность U точки x , такая что $|\{F \in \mathcal{F} : F \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1$.

Предложение 11.15. Пусть T есть обрезанное дискриптивное дерево, X пространство и $\Phi : [T] \rightarrow \text{Exp}(X)$ есть непрерывная A -операция и выполняется следующее условие:

(A₅) для $u \in T$, семейство $\{\Phi(u \frown l) : l \in \text{suc}(u, T)\}$ является дизъюнктным семейством.

Тогда отображение $\hat{\Phi}$ инъективно.

Доказательство. Пусть $u, v \in [T]$, $u = (u_i)_i$, $v = (v_i)_i$ и $u \neq v$. Положим $n = \min\{i \in \omega : u \upharpoonright i \neq v \upharpoonright i\} - 1 = \max\{j \in \omega : u \upharpoonright j = v \upharpoonright j\}$. Положим $w = u \upharpoonright n = v \upharpoonright n$. Тогда $w \frown u_n = u \upharpoonright n + 1 \neq w \frown v_n = v \upharpoonright n + 1$ и $u_n \neq v_n$. Из (A₅) вытекает, что $\Phi(w \frown u_n) \cap \Phi(w \frown v_n) = \emptyset$. Так как $\hat{\Phi}(u) \in \Phi(u \upharpoonright n + 1) = \Phi(w \frown u_n)$ и $\hat{\Phi}(v) \in \Phi(v \upharpoonright n + 1) = \Phi(w \frown v_n)$, то $\hat{\Phi}(u) \neq \hat{\Phi}(v)$. $\square$

11.1.4 Канторово множество и его непрерывные образы

Обозначим $\mathbf{2} = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ — дискретное двоичное. Полное $\mathbf{2}$ -арное дерево $\mathbf{2}^{<\omega}$ называется *канторовым деревом*.

Лемма 11.16. В метризуемом компактном пространстве семейство открыто-замкнутых множеств не более чем счетно.

Доказательство. Пусть X есть метризуемое компактное пространство и $\mathcal{O}$ есть семейство открыто-замкнутых подмножеств X . Из теоремы 5.41 вытекает, что в X со второй аксиомой счетности. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X . Так как X компактно, то для каждого $O \in \mathcal{O}$ существует конечное $\mu_O \subset \mathcal{B}$, такое что $\bigcup \mu_O = O$. Так как семейство конечных подмножеств счетного множества счетно, то $|\mathcal{O}| \leq \omega$. $\square$

Теорема 11.17. Любое метризуемое совершенное нульмерное компактное пространство X гомеоморфно $\mathbf{2}^\omega$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ все открыто-замкнутые подмножества X . Из леммы 11.16 вытекает, что $\mathcal{B}$ счетно. Пусть $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$.

Определим A -систему $\Phi : \mathbf{2}^{<\omega} \rightarrow \text{Exp}(X)$. Положим $\Phi(\emptyset) = X$. Предположим, что построено открыто-замкнутое непустое $\Phi(u) \subset X$ для $u \in \mathbf{2}^{<\omega}$. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(u) &= \{n \in \omega : \Phi(u) \cap U_n \neq \emptyset \text{ и } \Phi(u) \setminus U_n \neq \emptyset\}, \\ \varphi(u) &= \min \mathcal{N}(u). \end{aligned}$$

Положим $\Phi(u \smallfrown 0) = F(u) \cap U_{\varphi(u)}$ и $\Phi(u \smallfrown 0) = F(u) \setminus U_{\varphi(u)}$. Построение завершено.

Пусть $s \in 2^\omega$. По построению, последовательность $((\varphi(s \smallfrown n)))_n$ строго возрастающая. Следовательно,

$$\bigcap_{n \in \omega} \mathcal{N}(s \smallfrown n) = \emptyset. \quad (11.1)$$

Проверим, что Φ непрерывно. Условия (A_1) и (A_2) очевидны. Проверим условие (A_3^c) утверждения 11.13. Предположим противное. Тогда для некоторого $s \in 2^\omega = [2^{<\omega}]$, $F = \bigcap_{n \in \omega} \Phi(s \smallfrown n)$ содержит некоторые различные точки x и y . Так как $\mathcal{B}$ база пространства X , то $x \in U_m$ и $y \notin U_m$ для некоторого $m \in \omega$. Тогда $m \in \mathcal{N}(s \smallfrown n)$ для всех n . Противоречие с (11.1).

Из утверждения 11.13 вытекает, что Φ непрерывно. По построению, для Φ выполняется условия (A_4) и (A_5) предложений 11.14 и 11.15. Из этих утверждений вытекает, что $\hat{\Phi} : 2^\omega \rightarrow X$ является биективным непрерывным отображением. Из предложения 8.13 вытекает, что $\hat{\Phi}$ гомеоморфизм. $\square$

В частности, 2^ω гомеоморфно канторовому множеству. Часто пространство 2^ω также называют канторовым множеством.

Лемма 11.18. Пусть (X, ρ) метрическое пространство и $M \subset X$. Тогда $\text{diam}_\rho(M) = \text{diam}_\rho(\overline{M})$.

Доказательство. Ясно, $\text{diam}_\rho(M) \leq \text{diam}_\rho(\overline{M})$. Покажем $\text{diam}_\rho(M) \geq \text{diam}_\rho(\overline{M})$. Пусть $x, y \in \overline{M}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $x, y \in \overline{M}$, то существуют $x', y' \in M$, такие что $\rho(x, x') < \varepsilon$ и $\rho(y, y') < \varepsilon$. Тогда

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x') + \rho(x', y') + \rho(y', y) \leq \text{diam}_\rho(M) + 2\varepsilon.$$

Так как мы выбирали $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\rho(x, y) \leq \text{diam}_\rho(M)$. $\square$

Лемма 11.19. Пусть (X, ρ) метрическое компактное пространство. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ и семейство замкнутых множеств $\{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}$, такое что $\bigcup_{i=0}^{n-1} F_i = X$ и $\text{diam}_\rho(F_i) < \varepsilon$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Доказательство. Пусть γ открытое покрытие X множествами, диаметр которых не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$. В силу компактности X , существует $\{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}\} \subset \gamma$ конечное подпокрытие. Положим $F_i = \overline{U_i}$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$. Из леммы 11.18 вытекает, что $\text{diam}_\rho(F_i) < \varepsilon$. $\square$

Теорема 11.20. Любое метризуемое компактное пространство X является непрерывным образом 2^ω .

Доказательство. Пусть ρ есть метрика на X , определяющая топологию X .

Лемма 1. Построим совершенное компактное дискриптивное дерево T и непрерывную A -систему $\Phi : T \rightarrow \text{Exp}(X)$ таким образом, что ядро $\ker \Phi = \hat{\Phi}([T])$ A -системы Φ совпадает с X .

Доказательство. База индукции. Добавим $\emptyset$ в T и положим $\Phi(\emptyset) = X$.

Шаг индукции. Пусть построено $u \in T$, $l = \text{lt}(u)$ и $\Phi(u) \subset X$ замкнутое непустое множество. Из леммы 11.19 вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}$ множества $\Phi(u)$, такое что $\text{diam}_\rho(F_i) < \frac{1}{2^i}$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$. Можно считать, что $n > 1$ — если $n = 1$, то семейство $\{F_0\}$ заменим на $\{F_0, F_1\}$, где $F_1 = F_0$. Для $i = 0, 1, \dots, n-1$, добавим $u \frown i$ в дерево T и положим $\Phi(u \frown i) = F_i$.

Построение завершено.

По построению, $1 < |\text{suc}(u, T)| < \omega$ для $u \in T$. Следовательно, дерево T совершенно и компактно. По построению, для $\mathcal{F}$ выполняются (A_1) , (A_2) , (A_3^m) утверждения 11.12 и (A_4) предложения 11.14. Из утверждения 11.13 вытекает, что Φ непрерывно. Из предложения 11.14 вытекает, что $\hat{\Phi}([T]) = \Phi(\emptyset) = X$. $\square$

Пространство X является непрерывным образом тела $[T]$. Так как T совершенно и компактно, то $[T]$ совершенно, компактно и нульмерно (предложения 11.7, 11.8 и 11.9, утверждение 11.3). Из теоремы 11.17 вытекает, что $[T]$ гомеоморфно 2^ω . $\square$

11.2 Дополнение

11.2.1 A -системы

Предложение 11.21. Пусть T есть обрезанное дискриптивное дерево, X пространство и $\Phi : [T] \rightarrow \text{Exp}(X)$ есть непрерывная A -операция и выполняется следующие условие:

(A_5^+) для $u \in T$, семейство $\{\Phi(u \frown l) : l \in \text{suc}(u, T)\}$ является дискретным семейством;

Тогда $F = \hat{\Phi}([T])$ замкнуто в X и отображение $\hat{\Phi} : [T] \rightarrow F$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. Из (A_5^+) вытекает, что семейство $\mathcal{F}_n = \{\Phi(u) : u \in T, \text{lt}(u) = n\}$ является дискретным семейством, $F = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{F}_n$ и отображение $\hat{\Phi}$ инъективно (предложение 11.15). Так $\mathcal{F}_n$ дискретное семейство замкнутых множеств, то $\bigcup \mathcal{F}_n$ замкнуто. Следовательно ядро F A -системы Φ замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

Докажем, что отображение $\hat{\Phi}$ гомеоморфно отображает $[T]$ на F . Отображение $\hat{\Phi}$ непрерывно и инъективно. Достаточно показать, что $\hat{\Phi} : [T] \rightarrow F$ открыто. Пусть $u \in T$ и $n = \text{lt}(u)$. Так как $\Phi(u)$ открыто замкнуто в $\bigcup \mathcal{F}_n$ и $\hat{\Phi}(W(u, T)) = \Phi(u) \cap \hat{\Phi}([T])$, то $\hat{\Phi}(W(u, T))$ открыто замкнуто в F . $\square$

11.2.2 Пространство Бэра

Поддеревья полного ω -арного дерева $\omega^{<\omega}$ назовем *дескриптивными деревьями*.

Метрика ρ на множестве X называется *неархимедовой*, если

$$\rho(x, z) \leq \max \rho(x, y), \rho(y, z)$$

для любых $x, y, z \in X$. Метрика ρ является неархимедовой если и только если семейство всех шаров является неархимедовым.

Определим на множестве $[T]$ неархимедову метрику ρ_T . Пусть $s = (s_n)_n \in [T]$ и $q = (q_n)_n \in [T]$. Положим $\rho_T(s, q) = 0$ если $s = q$. Если $s \neq q$ и $n = \min\{i \in \omega : s_i \neq q_i\}$, то положим

$$\rho_T(s, q) = \frac{1}{2^n}.$$

Утверждение 11.22. ρ_T является неархимедовой метрикой, которая задает топологию $[T]$.

Доказательство. Так как

$$B_{\rho_T}(s, \frac{1}{2^n}) = W(s \upharpoonright n + 1, T)$$

для $s \in [T]$, то семейство всех шаров относительно ρ_T совпадает с неархимедовым семейством $\mathcal{B}_T$. Следовательно, ρ_T является неархимедовой метрикой, которая задает топологию $[T]$. $\square$

Из определения метрики ρ_T вытекает следующее утверждение.

Утверждение 11.23. $\rho_T = \rho_B|_{[T]}$. Топология $[T]$ является топологией подпространства пространства Бэра ω^ω .

Обозначим

$$\tilde{T} = \{s \upharpoonright n : s \in [T], n \in \omega\}.$$

Дерево $\tilde{T}$ называется *усечением* дерева T .

Утверждение 11.24. $[T] = [\tilde{T}]$.

Доказательство. Так как $\tilde{T} \subset T$, то $[\tilde{T}] \subset [T]$. Докажем обратное включение. Пусть $s \in [T]$. Тогда $s \upharpoonright n \in \tilde{T}$ для $n \in \omega$. Следовательно $s \in [\tilde{T}]$. $\square$

Предложение 11.25. Пусть T дескриптивное дерево. Следующие условия эквивалентны:

- (1) T обрезанное дерево;
- (2) $\text{suc}(u, T) \neq \emptyset$ для всех $u \in T$;
- (3) $W(u, T) \neq \emptyset$ для всех $u \in T$;
- (4) $T = \tilde{T}$.

Доказательство. Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (2) вытекает из того, что узел $u \in T$ является терминальным, если и только если $\text{suc}(u, T) = \emptyset$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in T$. Из (2) вытекает, что существует последовательность $u_n, u_{n+1}, \dots$, такая что $s_m = (u_0, \dots, u_{m-1}) \in T$ и $u_m \in \text{suc}(s_m, T)$ для $m \geq n$. Тогда $s = (u_0, u_1, \dots) \in [T]$ и $s \in W(u, T)$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in T$ и $s = (u_m)_m \in W(u, T)$. Тогда $u_n \in \text{suc}(u, T)$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (4). По построению $T \supset \tilde{T}$. Докажем $T \subset \tilde{T}$. Пусть $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in T$. Из (3) вытекает, что $W(u, T) \neq \emptyset$. Пусть $s \in W(u, T) \subset [T]$. Тогда $u = s \upharpoonright n$. Следовательно $u \in \tilde{T}$.

Докажем (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in T$. Из (4) вытекает, что $u \in \tilde{T}$. Следовательно, $u = s \upharpoonright n$ для некоторого $s \in [T]$. Следовательно $s \in W(u, T)$. $\square$

Предложение 11.26. Пусть T обрезанное дескриптивное дерево. Тело $[T]$ дерева T совершенно если и только если дерево T совершенно.

Доказательство. Докажем ($\Rightarrow$). Пусть $u \in T$. Так как T обрезано (предложение 11.7), то из предложения 11.25 вытекает, что $W(u, T) \neq \emptyset$. Так как $[T]$ совершенное пространство, то $|W(u, T)| > 1$. Пусть $s, q \in W(u, T)$ различные элементы. У s и q есть непересекающиеся окрестности $W(s', T)$ и $W(q', T)$, лежащие в $W(u, T)$. Тогда s' и q' больше u и несравнимы.

Докажем ($\Leftarrow$). Достаточно доказать, что $|W(u, T)| > 1$ для $u \in T$. Пусть $a, b \in T$ больше u и несравнимы. Тогда $W(a, T), W(b, T) \subset W(u, T)$, $W(a, T)$ и $W(b, T)$ не пусты (предложение 11.25), $W(a, T) \cap W(b, T) = \emptyset$ (утверждение 11.1). $\square$

Предложение 11.27. Пусть T обрезанное дескриптивное дерево. Тело $[T]$ дерева T компактно если и только если дерево T компактно.

Доказательство. Пусть π_n есть проекция ω^ω на n -ю копию ω . Положим $L_n = \pi_n([T])$. Дескриптивное обрезанное дерево T компактно если и только если каждое L_n конечно.

Докажем ($\Rightarrow$). Так как проекция π_n непрерывна и $[T]$ компактно, то L_n конечно.

Докажем ($\Leftarrow$). Так как $[T] \subset \prod_{n \in \omega} L_n$, все L_n конечны и $[T]$ замкнуто в ω^ω (утверждение 11.24), то $[T]$ замкнутое подпространство компактного пространства $\prod_{n \in \omega} L_n$. Следовательно, $[T]$ компактно. $\square$

11.3 Задачи

Глава 12

Кривые

Темы в этой главе

Тема 36. Непрерывное отображения тела дерева на отрезок.

Тема 37. Построение непрерывного отображения отрезка в топологическое пространство.

Тема 38. Фракталы.

Тема 39. Канторово множество и кривая Пеано.

12.1 Кривые

12.1.1 Непрерывные образы отрезка

Отображение тела дерева на отрезок

Пусть T компактное совершенное дискриптивное дерево.

Линейно упорядочим n -ый уровень $Lv_n(T)$ дерева T . Пусть $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ и $v = (v_0, \dots, v_{n-1})$ различные элементы $Lv_n(T)$. Положим $u <_n v$ если $u_k < v_k$, где $k = \min\{i \in \{0, \dots, n-1\} : u_i \neq v_i\}$.

Линейно упорядочим тело $[T]$ дерева T . Пусть $u = (u_n)_n$ и $v = (v_n)_n$ различные элементы $[T]$. Положим $u <_\omega v$ если $u_k < v_k$, где $k = \min\{i \in \omega : u_i \neq v_i\}$.

Отметим, что топология линейного порядка на $([T], <_\omega)$ совпадает с топологией $[T]$.

Для $n \in \omega$ обозначим

$$\pi_n^\omega : [T] \rightarrow Lv_n(T), \quad u \mapsto u \upharpoonright n.$$

Из определений вытекает следующие утверждение.

Утверждение 12.1. Пусть $u, v \in [T]$ и $u \neq v$. Следующие условия эквивалентны.

- (1) $u <_\omega v$;
- (2) $u \upharpoonright n <_n v \upharpoonright n$ для некоторого $n \in \omega$;
- (3) $u \upharpoonright n <_n v \upharpoonright n$ для $n \in \omega$, таких что $u \upharpoonright \neq v \upharpoonright n$.

Утверждение 12.2. *Отображение π_n^ω сюръективное и возрастающее.*

Доказательство. Докажем, что отображение π_n^ω сюръективно. Пусть $w \in \text{Lv}_n(T)$. Так как дерево T совершенное, то оно является обрезанным (предложение 11.7). Следовательно (предложение 11.6), $W(w, T) \neq \emptyset$. Пусть $u \in W(w, T)$. Тогда $\pi_n^\omega(u) = w$.

Из утверждения 12.1 вытекает, что отображение π_n^ω возрастающее. $\square$

Два элемента a и b линейно упорядоченного множества L назовем *соседними*, если между a и b нет других элементов L .

Утверждение 12.3. *Пусть u и v различные элементы $[T]$ и $u <_\omega v$. Следующие условия эквивалентны:*

- (1) *элементы u и v соседние в $([T], <_\omega)$;*
- (2) *для каждого $n \in \omega$, либо $u \upharpoonright n = v \upharpoonright n$, либо $u \upharpoonright n$ и $v \upharpoonright n$ соседние элементы в $(\text{Lv}_n(T), <_n)$.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из утверждения 12.2 и того факта, что если $f : X \rightarrow Y$ возрастающее сюръективное отображение линейно упорядоченных пространств и $x, y \in X$ соседние элементы, то либо $f(x) = f(y)$, либо $f(x)$ и $f(y)$ соседние элементы.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное. Тогда $u <_\omega s <_\omega v$ для некоторого $s \in [T]$. Существует $n \in \omega$, такое что элементы $u \upharpoonright n$, $s \upharpoonright n$ и $v \upharpoonright n$ попарно различны. Из утверждения 12.2 вытекает, что $u \upharpoonright n <_n s \upharpoonright n <_n v \upharpoonright n$. Противоречие с тем, что $u \upharpoonright n$ и $v \upharpoonright n$ соседние элементы. $\square$

Построим отображение $f_T : [T] \rightarrow \mathbb{I}$.

Определим A -систему $\Phi : T \rightarrow \text{Exp}(\mathbb{I})$, таким образом, что $\Phi(u)$ является некоторым отрезком $[l_u, r_u]$.

База индукции. Положим $\Phi(\emptyset) = [l_\emptyset, r_\emptyset] = \mathbb{I}$.

Шаг индукции. Пусть построено $u \in T$, $l = \text{lt}(u)$ и $\Phi(u) = [l_u, r_u]$. Пусть $n = |\text{suc}(u, T)|$ и $\text{suc}(u, T) = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, где $(x_i)_{i < n}$ возрастающая последовательность. Положим

$$l_{u \frown x_i} = l_u + i \frac{r_u - l_u}{n},$$

$$r_{u \frown x_i} = l_u + (i + 1) \frac{r_u - l_u}{n}.$$

По построению,

$$(U_1) \quad r_{u \frown x} - l_{u \frown x} = \frac{1}{|\text{suc}(u, T)|} (r_u - l_u), \text{ для } u \in T \text{ и } x \in \text{suc}(u, T);$$

$$(U_2) \text{ если } u, v \in \text{Lv}_n(T) \text{ и } u <_n v, \text{ то } l_u \leq r_v;$$

$$(U_3) \text{ если } u, v \in \text{Lv}_n(T) \text{ и } u <_n v, \text{ то } \Phi(u) \cap \Phi(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow l_u = r_v \Leftrightarrow u \text{ и } v \text{ соседние элементы в } \text{Lv}_n(T).$$

Утверждение 12.4. *Отображение $f_T : [T] \rightarrow \mathbb{I}$ является возрастающим непрерывным сюръективным отображением. Для различных $a, b \in [T]$, $f_T(a) = f_T(b)$ если и только если a и b соседние точки в $([T], <_\omega)$.*

Доказательство. Покажем, что A -система непрерывна. Условия (A_1) и (A_2) очевидны. Проверим условие (A_3^c) из утверждения 11.13, то есть $|\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi(u \upharpoonright n)| \leq 1$. Положим $M = \{n \in \omega : |\text{suc}(u \upharpoonright n, T)| > 1\}$.

Покажем, что множество M бесконечно. Предположим противное. Пусть $m = 1 + \max M$. Тогда $|\text{suc}(u \upharpoonright n, T)| = 1$ для $n \geq m$ и множество $\{v \in T : u \upharpoonright m < n\} = \{u \upharpoonright n : n > m\}$ является цепью. Противоречие с тем что T совершенное дерево.

Из (U_1) вытекает, что для каждого $n \in M$, $r_{u \upharpoonright n+1} - l_{u \upharpoonright n+1} \leq \frac{1}{2}(r_{u \upharpoonright n} - l_{u \upharpoonright n})$. Так как множество M бесконечно, то $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{u \upharpoonright n} - l_{u \upharpoonright n} = 0$. Следовательно, $|\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi(u \upharpoonright n)| \leq 1$.

Из утверждения 11.13 вытекает, что Φ непрерывная A -система. Отображение $f_T = \hat{\Phi}$ непрерывно (утверждение 11.10). Из построения вытекает, что выполняется условие (A_4) предложения 11.14. Следовательно, $f_T([T]) = \Phi(\emptyset) = \mathbb{I}$.

Из (U_2) и утверждения 12.1 вытекает, что отображение f_T возрастающее.

Из (U_3) , утверждений 11.11 и 12.3 вытекает, что $f_T(a) = f_T(b)$ для различных $a, b \in [T]$ если и только если a и b соседние точки в $([T], <_{\omega})$. $\square$

Отображение f_T назовем *стандартным отображением тела дерева $[T]$ на отрезок $\mathbb{I}$* .

Пусть $\sim_{\mathfrak{N}}$ есть такое отношение эквивалентности, что $a \sim_{\mathfrak{N}} b$ для различных $a, b \in [T]$ если и только если a и b соседи в $([T], <_{\omega})$. Фактор пространство $[T]/\sim_{\mathfrak{N}}$ обозначим как $[T]_{\mathfrak{N}}$ и назовем *связным телом* дерева T . Фактор отображение $q_{\mathfrak{N}} : [T] \rightarrow [T]_{\mathfrak{N}}$ обозначим как q_T .

Отношение $\sim_{\mathfrak{N}}$ совпадает с отношением эквивалентности $\sim_{f_T}$, порожденное отображением (см. раздел 8.1.1) стандартным отображением f_T . Существует отображение $h_T : [T]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathbb{I}$, так что $f_T = h_T \circ q_T$, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} [T] & \xrightarrow{f_T} & \mathbb{I} \\ & \searrow q_T & \nearrow h_T \\ & [T]_{\mathfrak{N}} & \end{array}$$

Утверждение 12.5. *Отображение $h_T : [T]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathbb{I}$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Отображение f_T является непрерывным сюръективным отображением компакта $[T]$ на отрезок $\mathbb{I}$. Из предложения 8.12 вытекает, что отображение f_T замкнуто. Из предложения 8.9 вытекает, что отображение f_T факторно. Так как отображение f_T факторно, отображение q_T есть факторотображение по отношению эквивалентности $\sim_{f_T} = \sim_{\mathfrak{N}}$ и $f_T = h_T \circ q_T$, то отображение h_T является гомеоморфизмом (теорема 8.8(4)). $\square$

Отображение $h_T : [T]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathbb{I}$ назовем *стандартным гомеоморфизмом связанного тела $[T]_{\mathfrak{N}}$ на отрезок $\mathbb{I}$* .

Построение непрерывного отображения отрезка в топологическое пространство

Теорема 12.6. Пусть T компактное дескриптивное совершенное дерево, X пространство, $\Phi : T \rightarrow \text{Exp}(X)$ непрерывная A -система, для которой выполняется условие:

$$(A_6) \text{ для } n \in \omega, \Phi(u) \cap \Phi(v) \neq \emptyset \text{ для любых соседних } u, v \in \text{Lv}_n(T).$$

Тогда существуют непрерывное отображение $h : [T]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \ker \Phi$, такое что $\hat{\Phi} = h \circ q_T$.

Доказательство. Пусть $u, v \in [T]$ соседние элементы. Для $n \in \omega$, в силу утверждения 12.3, либо $u \upharpoonright n = v \upharpoonright n$, либо $u \upharpoonright n$ и $v \upharpoonright n$ соседние элементы в $\text{Lv}_n(T)$. Из (A_6) вытекает, что $\Phi(u \upharpoonright n) \cap \Phi(v \upharpoonright n) \neq \emptyset$ для $n \in \omega$. Из утверждения 11.11 вытекает, что $\hat{\Phi}(u) = \hat{\Phi}(v)$. Получаем, что если $u \sim_{\mathfrak{N}} v$, то $\hat{\Phi}(u) = \hat{\Phi}(v)$. Следовательно, отображение

$$h : [T] / \sim_{\mathfrak{N}} = [T]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \hat{\Phi}([T]) = \ker \Phi, [u]_{\sim_{\mathfrak{N}}} \mapsto \hat{\Phi}(u)$$

определено корректно и $\hat{\Phi} = h \circ q_T$.

Проверим, что отображение h непрерывно. Так как A -система Φ непрерывна, то отображение $\hat{\Phi}$ непрерывно (утверждение 11.10). Отображение q_T факторно. Так как отображения $\hat{\Phi} : [T] \rightarrow \ker \Phi$ и $q_T : [T] \rightarrow [T]_{\mathfrak{N}}$ сюръективны, отображение $\hat{\Phi}$ непрерывно, отображение q_T факторно и $\hat{\Phi} = h \circ q_T$, то отображение h непрерывно (теорема 8.7(1)). $\square$

Из определения порядка на $\text{Lv}_n(T)$ вытекают следующие утверждения.

Утверждение 12.7. Пусть $n \in \omega$, $u, v \in \text{Lv}_n(T)$, $x \in \text{suc}(u, T)$, $y \in \text{suc}(v, T)$ и $u \frown_{n+1} v \frown y$. Если $u \frown x$ и $v \frown y$ соседние элементы в $\text{Lv}_{n+1}(T)$, то выполняется одна из возможностей:

- (1) если $u = v$, то $x < y$, x и y соседние элементы в $\text{suc}(u, T)$;
- (2) если $u \neq v$, то $u <_n v$, u и v соседние элементы в $\text{Lv}_n(T)$, $x = \max \text{suc}(u, T)$ и $y = \min \text{suc}(v, T)$.

Теорема 12.8. Пусть T компактное дескриптивное совершенное дерево, X пространство, $\Phi : T \rightarrow \text{Exp}(X)$ непрерывная A -система, для которой выполняется условие:

$$(A_7) \text{ Для каждого } u \in T, \text{ можно выбрать } l_u, r_u \in \Phi(u) \text{ таким образом, что выполняются условия:}$$

- (а) если $x, y \in \text{suc}(u, T)$, $x < y$, x и y соседние элементы в $\text{suc}(u, T)$, то $r_{u \frown x} = l_{u \frown y}$;
- (б) если $x = \min \text{suc}(u, T)$, то $l_u = l_{u \frown x}$;
- (в) если $y = \max \text{suc}(u, T)$, то $r_u = r_{u \frown y}$.

Тогда существуют непрерывное отображение $h : [T]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \ker \Phi$, такое что $\hat{\Phi} = h \circ q_T$.

Доказательство. Индукцией по $n \in \omega$ докажем утверждение:

(C_n) если $u, v \in \text{Lv}_n(T)$, $u <_n v$, u и v соседние элементы, то $r_u = l_v$.

Утверждение (C_0) очевидно. Предположим, верно (C_n) . Докажем (C_{n+1}) . Пусть $u = u_* \frown x$ и $v = v_* \frown y$, где $u_*, v_* \in \text{Lv}_n(T)$, $x \in \text{suc}(u_*, T)$ и $y \in \text{suc}(v_*, T)$. Рассмотрим два случая.

Рассмотрим случай $u_* = v_*$. Из утверждения 12.7 вытекает, что x и y соседние элементы в $\text{suc}(u_*, T)$ и из условия (а) в (A_7) вытекает, что $r_u = r_{u_* \frown x} = l_{u_* \frown y} = l_v$.

Рассмотрим случай $u_* \neq v_*$. Из утверждения 12.7 вытекает, что $u_* <_n v_*$, u_* и v_* соседние элементы в $\text{Lv}_n(T)$, $x = \max \text{suc}(u_*, T)$ и $y = \min \text{suc}(v_*, T)$. Из предположения индукции (C_n) вытекает, что $r_{u_*} = l_{v_*}$. Из условия (с) в (A_7) вытекает, что $r_u = r_{u_* \frown x} = r_{u_*}$. Из условия (b) в (A_7) вытекает, что $l_v = l_{v_* \frown y} = l_{v_*}$. Из полученных равенств получаем $r_u = l_v$.

Утверждение (C_n) доказано для всех n . Так как $r_u \in \Phi(u)$ и $l_v \in \Phi(v)$, то из (C_n) вытекает, что $\Phi(u) \cap \Phi(v) \neq \emptyset$ для соседних $u, v \in \text{Lv}_n(T)$. Следовательно, условие (A_6) теоремы 12.13 выполняется. Из теоремы 12.13 вытекает, что существуют непрерывное отображение $h: [T]_{\aleph} \rightarrow \ker \Phi$, такое что $\hat{\Phi} = h \circ q_T$. $\square$

12.1.2 Фракталы

Пусть (X, ρ) компактное метрическое пространство.

Пусть $f_0, f_1, \dots, f_{n-1} : X \rightarrow X$ непрерывные отображения. Обозначим $\mathbf{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Определим A -систему $\Phi : \mathbf{n}^{<\omega} \rightarrow \text{Exp}(X)$ и семейство отображений $f_u : X \rightarrow X$ для $u \in \mathbf{n}^{<\omega}$.

База индукции. $\Phi(\emptyset) = X$ и $f_\emptyset : X \rightarrow X$ тождественное отображение.

Шаг индукции. Пусть $u \in \mathbf{n}^{<\omega}$, $l = \text{lt}(u)$ и построены $\Phi(u) \subset X$ и $f_u : X \rightarrow X$. Для $i \in \mathbf{n} = \text{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega})$ положим

$$f_{u \frown i} = f_u \circ f_i, \quad \Phi_{u \frown i} = f_{u \frown i}(X) = f_u(f_i(X)).$$

Отметим, что $f_{(i)} = f_i$, где (i) последовательность длины 1.

Ядро $\ker \Phi$ A -системы Φ является частным важным случаем *фракталов*.

Особенно наглядная картина получается в случае, когда f_i являются подобиями.

Пусть $\lambda > 0$. Отображение $f : X \rightarrow X$ называется λ -сжимающим, если $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$ для $x, y \in X$. Ясно, λ -сжимающие отображения непрерывны.

Утверждение 12.9. Если $\lambda < 1$, отображения f_i являются λ -сжимающими, то A -система непрерывна.

Доказательство. Так как $\text{diam}_\rho(\Phi(u)) \leq \text{diam}_\rho(X) \lambda^{\text{lt}(u)}$, то, в силу утверждения 11.12, A -система Φ непрерывна. $\square$

Из предложения 11.15 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 12.10. Если Φ непрерывная A -система, отображения f_i инъективны и $f_i(X) \cap f_j(X) = \emptyset$ для различных $i, j \in \mathbf{n}$, то отображение $\hat{\Phi}$ гомеоморфно отображает $\mathbf{n}^\omega$ на $\ker \Phi$.

Доказательство. Из того, что каждое f_i инъективно для $i \in \mathbf{n}$, вытекает, что f_u как композиция инъективных отображений инъективно для $u \in T$. Проверим условие (A₅) предложения 11.15. Так как отображение f_u инъективно, семейство $\{f_i(X) : i \in \mathbf{n}\}$ дизъюнктно, $\text{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega}) = \mathbf{n}$ и $\Phi(u \frown i) = f_u(f_i(X))$, то семейство $\{\Phi(u \frown x) : x \in \text{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega})\}$ дизъюнктно. Из предложения 11.15 вытекает, что $\hat{\Phi}$ является непрерывным биективным отображением $\mathbf{n}^\omega$ на $\ker \Phi$. Из предложения 8.13 вытекает, что $\hat{\Phi}$ гомеоморфно отображает $\mathbf{n}^\omega$ на $\ker \Phi$. $\square$

Утверждение 12.11. Пусть Φ непрерывная A -система, $l, r \in X$ и выполняются условия:

- (1) $f_i(r) = f_{i+1}(l)$ для $i = 0, 1, \dots, n-2$;
- (2) $l = f_0(l)$;
- (3) $r = f_{n-1}(r)$.

Тогда существуют непрерывное отображение $h: [T]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \hat{\Phi}([T])$, такое что $\hat{\Phi} = h \circ q_T$.

Доказательство. Для $u \in \mathbf{n}^{<\omega}$, положим $l_u = f_u(l)$ и $r_u = f_u(r)$. Проверим условие (A₇) теоремы 12.8. Пусть $u \in \mathbf{n}^{<\omega}$.

Докажем (а) условия (A₇). Пусть $x, y \in \text{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega}) = \mathbf{n}$, $x < y$, x и y соседние элементы в $\mathbf{n}$, то есть $y = x + 1$. Так как

$$\begin{aligned} r_{u \frown x} &= f_{u \frown x}(r) = f_u(f_x(r)), \\ l_{u \frown y} &= f_{u \frown y}(l) = f_u(f_{x+1}(l)) \end{aligned}$$

и выполняется пункт (1) условия, то $r_{u \frown x} = l_{u \frown y}$.

Докажем (b) условия (A₇). Пусть $x = \min \text{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega}) = \min \mathbf{n} = 0$. Так как $l_u = f_u(l)$, $l_{u \frown x} = f_{u \frown x}(l) = f_u(f_0(l))$ и $l = f_0(l)$ (пункт (2) условия), то $l_u = l_{u \frown x}$.

Докажем (c) условия (A₇). Пусть $y = \max \text{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega}) = \max \mathbf{n} = n-1$. Так как $r_u = f_u(r)$, $r_{u \frown y} = f_{u \frown y}(r) = f_u(f_{n-1}(r))$ и $r = f_{n-1}(r)$ (пункт (3) условия), то $r_u = r_{u \frown y}$.

Из теоремы 12.8 вытекает, что существуют непрерывное отображение $h: [T]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \hat{\Phi}([T])$, такое что $\hat{\Phi} = h \circ q_T$. $\square$

Утверждение 12.12. Пусть Φ непрерывная A -система и $X = \bigcup_{i=0}^{n-1} f_i(X)$. Тогда ядро $\ker \Phi$ совпадает с X .

Доказательство. Проверим условие (A₄) предложения 11.14. Пусть $u \in \mathbf{n}^{<\omega}$. Так как $X = \bigcup_{i=0}^{n-1} f_i(X)$ и $\Phi(u \frown i) = f_{u \frown i}(X) = f_u(f_i(X))$ для $i \in \mathbf{n} = \text{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega})$, то

$$\begin{aligned} \bigcup \{\Phi(u \frown i) : i \in \text{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega})\} &= \bigcup \{f_u(f_i(X)) : i \in \mathbf{n}\} \\ &= f_u\left(\bigcup \{f_i(X) : i \in \mathbf{n}\}\right) = f_u(X) \\ &= \Phi(u). \end{aligned}$$

Из предложения 11.14 вытекает, что $\ker \Phi = \Phi(\emptyset) = X$. $\square$

Канторово множество

Пусть $X = \mathbb{I}$, $n = 2$,

$$\begin{aligned} f_0: \mathbb{I} &\rightarrow [0, \tfrac{1}{3}], \quad x \mapsto \tfrac{1}{3}x, \\ f_1: \mathbb{I} &\rightarrow [\tfrac{2}{3}, 1], \quad x \mapsto \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x \end{aligned}$$

возрастающие линейные сюръективные функции.

Ядром этой A -системы получаем *канторово множество* C . Отображения f_0 и f_1 являются $\frac{1}{3}$ -сжимающим. Из утверждения 12.9 вытекает, что A -система непрерывна. Так как $f_0(X) \cap f_1(X) = \emptyset$, то из утверждения 12.10 вытекает, что отображение $\hat{\Phi}: 2^\omega \rightarrow C$ является гомеоморфизмом. Отображение $\hat{\Phi}$ является порядковым изоморфизмом $(2^\omega, <_\omega)$ на C .

Отображение $f_{2^{<\omega}}: 2^\omega \rightarrow \mathbb{I}$ есть стандартное отображение тела канторова дерева $[2^{<\omega}] = 2^\omega$ на отрезок $\mathbb{I}$. Отображение

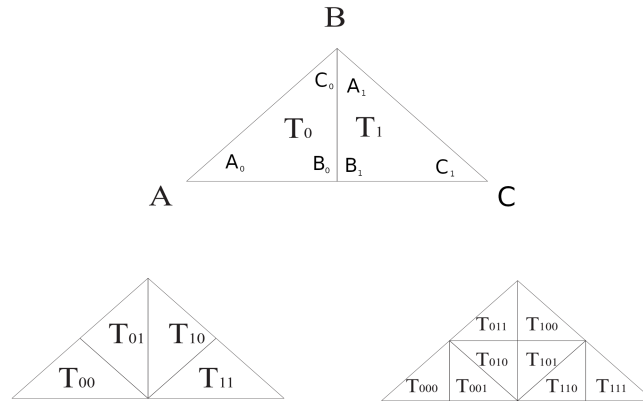
$$\psi = f_{2^{<\omega}} \circ \hat{\Phi}^{-1}: C \rightarrow \mathbb{I}$$

является непрерывным возрастающим отображением. При этом, если a и b соседние точки в канторовом множестве C , то $\psi(a) = \psi(b)$. Функция ψ однозначно продолжается до монотонной функции $g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$: если $a < b$ соседние точки в C и $a < x < b$, то $g(x) = \psi(a) = \psi(b)$. Функция g является *канторовой лестницей*.

Кривая Пеано

Пусть $X = T$ это прямоугольный равносторонний треугольник ABC , B прямой угол. Пусть $T_0 = A_0B_0C_0$ и $T_1 = A_1B_1C_1$ разбиение T на два треугольника высотой $C_0B_0 = A_1B_1$. При этом $A = A_0$, $B = C_0 = A_1$, $C = C_1$.

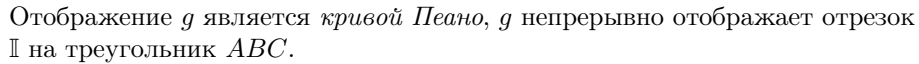
Пусть $f_0: T \rightarrow T_0$ и $f_1: T \rightarrow T_1$ аффинные отображения, для которых $f_0(A) = A_0$, $f_0(B) = B_0$, $f_0(C) = C_0$ и $f_1(A) = A_1$, $f_1(B) = B_1$, $f_1(C) = C_1$.



На рисунке, $T_u = \Phi(u)$.

Положим $l = A$ и $r = C$. Тогда (а) $f_0(r) = f_1(l) = C_0 = A_1 = B$, (б) $l = f_0(l) = A = A_0$, (с) $r = f_1(r) = C = C_1$. Из утверждения 12.11 вытекает, что существует непрерывное отображение $h : [2^{<\omega}]_{\aleph_1} \rightarrow \ker \Phi = T$, такое что $\hat{\Phi} = h \circ q_{2^{<\omega}}$. Положим

где $h_{\mathbf{2}^{<\omega}} : [\mathbf{2}^{<\omega}]_{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathbb{I}$ стандартный изоморфизм.



12.2.1 Непрерывные образы отрезка

(A₈) для $n \in \omega$ и $u, v \in \text{Lv}_n(T)$, $\Phi(u) \cap \Phi(v) \neq \emptyset$ если и только если u и v соседние элементы в $\text{Lv}_n(T)$.

12.2.2 Локально связные полные метрические пространства

Теорема 12.15 (Теорема Мазуркевича). Пусть X полное метризуемое связное локально связное пространство. Тогда X линейно связно.

Предложение 12.16. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывное сюръективное отображение хаусдорфовых компактов и X локально связно. Тогда Y локально связно.

Лемма 12.17. Пусть X локально компактное связное локально связное хаусдорфово пространство. Любое компактное $K \subset X$ содержится в связном компактном $F \subset X$.

Лемма 12.18. Пусть (X, ρ) компактное связное локально связное метрическое пространство, $\varepsilon > 0$, $K \subset U \subset X$ связные подмножества, K компактно, U открыто и $a, b \in K$. Существует $n \in \mathbb{N}$, связные подмножества $K_i \subset U_i \subset U$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$, так что

- (1) K_i компактно, U_i открыто, $\text{diam}_\rho(U_i) \leq \varepsilon$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$;
- (2) $a \in K_0$ и $b \in K_{n-1}$;
- (3) $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ для $i = 0, 1, \dots, n-2$.

Теорема 12.19 (Теорема Хана-Мазуркевича). Метризуемый компакт X является непрерывным образом отрезка если и только если X связен и локально связен.

Доказательство. ($\Rightarrow$) вытекает из предложения 12.16. Докажем ($\Leftarrow$). Пусть ρ метрика X . Построим компактное дескриптивное совершенное дерево T , a_u, b_u, K_u, U_u для $u \in T$ таким образом, что выполняются условия:

- (1) $a_u, b_u \in K_u \subset U_u \subset X$, K_u компактное связное, U_u открытое связное для $u \in T$;
- (2) $a_\emptyset, b_\emptyset \in K_\emptyset = U_\emptyset = X$;
- (3)

$$K_u \subset \bigcup \{K_{u \frown x} : x \in \text{suc}(u, T)\} \subset \bigcup \{U_{u \frown x} : x \in \text{suc}(u, T)\} \subset U_u$$

для $u \in T$;

- (4) $\text{diam}_\rho(U_u) \leq \frac{1}{n}$ если $n > 0$ и $u \in \text{Lv}_n(T)$;
- (5) если $u \in T$, $x, y \in \text{suc}(u, T)$, $x < y$, x и y соседние элементы в $\text{suc}(u, T)$, то

$$b_{u \frown x} = a_{u \frown y};$$

- (6) если $n \in \omega$, $u, v \in \text{Lv}_n(T)$, $u <_n v$, u и v соседние элементы в $(\text{Lv}_n(T), <_n)$, $x = \max \text{suc}(u, T)$ и $y = \min \text{suc}(v, T)$, то

$$b_{u \frown x} = a_{v \frown y}.$$

Определим A -систему $\Phi : T \rightarrow \text{Exp}(X)$. Положим $\Phi(u) = \overline{U_u}$ для $u \in T$.

A -система Φ непрерывна. Из (2), (3) и предложения 11.14 вытекает, что $\ker \Phi = X$. Из (4), (5) и теорема 12.8 вытекает, что существуют непрерывное отображение $h : [T]_{\text{nt}} \rightarrow \ker \Phi$, такое что $\hat{\Phi} = h \circ q_T$. Так как $\ker \Phi = X$ и $[T]_{\text{nt}}$ гомеоморфно $\mathbb{I}$, то X является непрерывным образом $\mathbb{I}$. $\square$

12.3 Задачи

Привести пример связного локально связного компактного пространства, которое не является линейно связным.

Глава 13

Гомотопия

Темы в этой главе

Тема 40. Гомотопия.

Тема 41. Гомотопическая эквивалентность отображений.

Тема 42. Гомотопическая эквивалентность пространств. Стягиваемые пространства.

13.1 Гомотопия. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства.

13.1.1 Гомотопия

Непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ называются гомотопными, $(f \sim g)$ если существует такое непрерывное отображение $\Phi: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$, что $\Phi(x, 0) = f(x)$, $\Phi(x, 1) = g(x)$ для каждого $x \in X$. Всякое такое отображение Φ называется *гомотопией*, связывающей f с g . Оно называется также гомотопией отображения f . Иногда отображение Φ заменяется семейством отображений

$$f_t: X \rightarrow Y, \quad t \in \mathbb{I}, \quad f_t(x) = \Phi(x, t).$$

Пусть A — подмножество пространства X . Гомотопия $F: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ называется *связанной на A* , или *A -гомотопией*, если $F(x, t) = F(x, 0)$ при $x \in A$, $t \in \mathbb{I}$. Два отображения, которые можно соединить A -гомотопией называются A -гомотопными $(f \sim_A g)$.

Гомотопия является $\emptyset$ -гомотопией.

Лемма 13.1. Пусть X и Y пространства, $\Phi: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ отображение, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ и для $i = 1, 2, \dots, n$ существует гомеоморфизм $f_i: \mathbb{I} \rightarrow [x_{i-1}, x_i]$, такой что отображение

$$\Phi \circ (\text{id}_X \times f_i): X \times \mathbb{I} \rightarrow Y, \quad (x, t) \mapsto \Phi(x, f_i(t))$$

непрерывно. Тогда отображение Φ непрерывно.

Доказательство. Положим $F_i = X \times [x_{i-1}, x_i]$. Тогда F_i замкнуты в $X \times \mathbb{I}$ и $X \times \mathbb{I} = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Из предложения 7.13 вытекает, что отображение $h_i =$

$\text{id}_X \times f_i : X \times I \rightarrow F_i$ является гомеоморфизмом. Так как отображение $\Phi \circ h_i$ непрерывно, то отображение $\Phi|_{F_i} = (\Phi \circ h_i) \circ h_i^{-1}$ непрерывно для $i = 1, \dots, n$. Из предложения 3.13 вытекает, что отображение Φ непрерывно. $\square$

Теорема 13.2. Пусть X и Y пространства и $A \subset X$. Отношение $\sim_A$ A -гомотопности является отношением эквивалентности на множестве $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y .

Доказательство. Пусть $f, g, h \in C(X, Y)$.

Проверим рефлексивность $\sim_A$: $f \sim_A f$. Положим $\Phi : X \times \mathbb{I}, (x, t) \mapsto f(x)$. Так как $\Phi = f \circ \pi$, где π проекция из $X \times \mathbb{I}$ на X , отображения π и f непрерывны, то Φ непрерывно (предложение 4.20). Отображение Φ является A -гомотопией, связывающей f с f , следовательно $f \sim_A f$.

Проверим симметричность $\sim_A$: если $f \sim_A g$, то $g \sim_A f$. Пусть Ψ есть A -гомотопия, который связывает f и g . Положим $\Phi(x, t) = \Psi(x, 1 - t)$ для $x \in X$ и $t \in \mathbb{I}$. Тогда $\Phi(x, 1 - t) = \Psi(x, t)$ для $x \in X$ и $t \in \mathbb{I}$. Из леммы 13.1 вытекает, что Φ непрерывно. Отображение Φ является A -гомотопией, связывающей g с f , следовательно $g \sim_A f$.

Проверим транзитивность $\sim_A$: если $f \sim_A g$ и $g \sim_A h$, то $f \sim_A h$. Пусть A -гомотопия Ψ связывает f и g , A -гомотопия Θ связывает g и h . Так как $\Psi(x, 1) = g(x) = \Theta(x, 0)$, то существует отображение $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$, такое что $\Phi(x, \frac{1}{2}t) = \Psi(x, t)$ и $\Phi(x, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t) = \Theta(x, t)$ для $x \in X$ и $t \in \mathbb{I}$. Из леммы 13.1 вытекает, что Φ непрерывно. Так как

$$\Phi(x, 0) = \Psi(x, 0) = f(x), \quad \Phi(x, 1) = \Theta(x, 1) = h(x)$$

для $x \in X$, то отображение Φ является A -гомотопией, связывающей f с h и, следовательно, $f \sim_A h$. $\square$

Для $A = \emptyset$ из теоремы 13.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 13.3. Пусть X и Y пространства. Отношение $\sim$ гомотопности является отношением эквивалентности на множестве $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y .

13.1.2 Гомотопическая эквивалентность отображений

Классы эквивалентности гомотопных отображений называются *гомотопическими классами*. Множество гомотопических классов отображений $X \rightarrow Y$ обозначается через $\pi(X, Y)$. Гомотопический класс отображения $f : X \rightarrow Y$ будем обозначать через $[f]$.

Классы эквивалентности A -гомотопных отображений назовем *A -гомотопическими классами*. Множество гомотопических классов отображений $X \rightarrow Y$ обозначим через $\pi(X, Y; A)$. A -Гомотопический класс отображения $f : X \rightarrow Y$ будем обозначать через $[f]_A$.

А вообще, элементы множества $\pi(X, Y)$ и $\pi(X, Y; A)$ будут обозначаться греческими буквами α, β и т.д. Отображение f , для которого $\alpha = [f]$ (или $\alpha = [f]_A$) или $f \in \alpha$, называется представителем класса α в $C(X, Y)$. Как правило представитель определён неоднозначно.

Пусть X, Y_1, Y_2 — пространства и $h : Y_1 \rightarrow Y_2$ — непрерывное отображение.

Утверждение 13.4. Если $f, g \in C(X, Y_1)$ и $f \sim_A g$, то $h \circ f \sim_A h \circ g$.

Доказательство. Пусть $\Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y_1$ есть A -гомотопия, связывающая f с g . Тогда отображение $h \circ \Phi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y_2$ непрерывно и является A -гомотопией, связывающая $h \circ f$ с $h \circ g$. $\square$

Из утверждения вытекает, что отображение

$$h_{A,*} : \pi(X, Y_1; A) \rightarrow \pi(X, Y_2; A), [f]_A \mapsto [h \circ f]_A$$

определено корректно. Будем писать h_* вместо $h_{\emptyset,*}$.

Предложение 13.5. Пусть даны пространства X, Y_1, Y_2 и непрерывные отображения $g : Y_1 \rightarrow Y_2, h : Y_1 \rightarrow Y_2$. Если отображение g гомотопически эквивалентно отображению h , то $g_* = h_*$, где $g_*, h_* : \pi(X, Y_1) \rightarrow \pi(X, Y_2)$.

Доказательство. Пусть $f \in C(X, Y_1)$. Пусть $\Phi : Y_1 \times \mathbb{I} \rightarrow Y_2$ есть гомотопия, которая связывает g и h . Положим

$$\Psi = \Phi \circ (f \times \text{id}_{\mathbb{I}}) : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y_2, (x, t) \mapsto \Phi(f(x), t).$$

Как произведение непрерывных отображений, отображение $f \times \text{id}_{\mathbb{I}}$ непрерывно (предложение 7.13). Отображение Ψ непрерывно, как композиция непрерывных отображений (предложение 4.20). Так как

$$\begin{aligned} \Psi(x, 0) &= \Phi(f(x), 0) = g(f(x)) = (g \circ f)(x), \\ \Psi(x, 1) &= \Phi(f(x), 1) = h(f(x)) = (h \circ f)(x) \end{aligned}$$

для $x \in X$, то отображение Ψ является гомотопией, соединяющей $f \circ g$ и $f \circ h$. Следовательно, $g_*([f]) = [f \circ g] = [f \circ h] = h_*([f])$, то есть $g_* = h_*$. $\square$

13.1.3 Гомотопическая эквивалентность пространств

Предложение 13.6. Пусть даны пространства X_1, X_2, X_3 и непрерывные отображения $f_1, g_1 : X_1 \rightarrow X_2, f_2, g_2 : X_2 \rightarrow X_3$. Если $f_1 \sim g_1$ и $f_1 \sim g_1$, то $f_2 \circ f_1 \sim g_2 \circ g_1$.

Доказательство. Из предложения 13.5 вытекает, что $(f_2)_* = (g_2)_*$, где $(f_2)_*, (g_2)_* : \pi(X_1, X_2) \rightarrow \pi(X_1, X_3)$. Так как $f_1 \sim g_1$, то $[f_1] = [g_1]$ и

$$[f_2 \circ f_1] = (f_2)_*([f_1]) = (g_2)_*([f_1]) = (g_2)_*([g_1]) = [g_2 \circ g_1],$$

то есть $f_2 \circ f_1 \sim g_2 \circ g_1$. $\square$

Из предложения 13.7 вытекают следующие утверждение.

Предложение 13.7. Пусть даны пространства $X_1, X_2, \dots, X_n$ и непрерывные отображения $f_i, g_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ для $i = 1, \dots, n-1$. Если $f_i \sim g_i$ для $i = 1, \dots, n-1$, то

$$f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 \sim g_{n-1} \circ \dots \circ g_2 \circ g_1.$$

Пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными* ($X_1 \sim X_2$), если существуют такие непрерывные отображения $f: X_1 \rightarrow X_2$, $g: X_2 \rightarrow X_1$, что композиции $g \circ f: X_1 \rightarrow X_1$ и $f \circ g: X_2 \rightarrow X_2$ гомотопны тождественным отображениям $\text{id}_{X_1}: X_1 \rightarrow X_1$ и $\text{id}_{X_2}: X_2 \rightarrow X_2$.

Отношение гомотопической эквивалентности является обобщением отношения гомеоморфности. Если X_1 и X_2 гомеоморфны, то X_1 и X_2 гомотопически эквивалентны.

Теорема 13.8. *Отношение гомотопической эквивалентности является отношением эквивалентности на классе Top всех топологических пространств.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность $\sim$ очевидны. Пусть X_1, X_2 и X_3 пространства. Проверим транзитивность $\sim$: если $X_1 \sim X_2$ и $X_2 \sim X_3$, то $X_1 \sim X_3$. Пусть

$$f_1: X_1 \rightarrow X_2, \quad f_2: X_2 \rightarrow X_3, \quad g_1: X_2 \rightarrow X_1, \quad g_2: X_3 \rightarrow X_2$$

есть непрерывные отображения, для которых

$$g_1 \circ f_1 \sim \text{id}_{X_1}, \quad f_1 \circ g_1 \sim \text{id}_{X_2}, \quad g_2 \circ f_2 \sim \text{id}_{X_2}, \quad f_2 \circ g_2 \sim \text{id}_{X_3}. \quad (13.1)$$

Положим $f = f_2 \circ f_1: X_1 \rightarrow X_3$ и $g = g_1 \circ g_2: X_3 \rightarrow X_1$. Нам достаточно доказать, что $g \circ f \sim \text{id}_{X_1}$ и $f \circ g \sim \text{id}_{X_3}$.

Докажем $g \circ f \sim \text{id}_{X_1}$, случай $f \circ g \sim \text{id}_{X_3}$ разбирается аналогично. Из равенств (13.1) и предложения 13.7 вытекает, что

$$\begin{aligned} g \circ f &= g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 = g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \\ &\sim g_1 \circ \text{id}_{X_2} \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \sim \text{id}_{X_1}. \end{aligned}$$

□

Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом*.

13.1.4 Стягиваемые пространства

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $\text{id}_X: X \rightarrow X$ гомотопно постоянному отображению $\text{const}_{x_0}: X \rightarrow X$, переводящему все X в точку $x_0 \in X$.

- (1) Пространство стягиваемо тогда и только тогда когда оно имеет гомотопический тип точки.
- (2) Конус над любым пространством стягиваем.
- (3) Цилиндр отображения $f: X \rightarrow Y$ гомотопически эквивалентен пространству Y .

Гомотопически эквивалентные пространства не обязаны быть гомеоморфными.

13.2 Дополнение

13.2.1 Отображение гомотопических классов при непрерывных отображениях

Теорема 13.9. Пусть даны пространства $X, Y_1, Y_2, Y_3, A \subset X$, и непрерывные отображения $g: Y_1 \rightarrow Y_2, h: Y_2 \rightarrow Y_3$. Тогда следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, Y_1; A) & \xrightarrow{g_{A,*}} & \pi(X, Y_2; A) \\ & \searrow (h \circ g)_{A,*} & \swarrow h_{A,*} \\ & \pi(X, Y_3; A) & \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть $f \in C(X, Y_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} h_{A,*}(g_{A,*}([f]_A)) &= h_{A,*}([g \circ f]_A) = [h \circ (g \circ f)]_A = [(h \circ g) \circ f]_A \\ &= (h \circ g)_{A,*}([f]_A). \end{aligned}$$

□

Для $A = \emptyset$ из теоремы 13.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 13.10. Пусть даны пространства X, Y_1, Y_2, Y_3 и непрерывные отображения $g: Y_1 \rightarrow Y_2, h: Y_2 \rightarrow Y_3$. Тогда следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, Y_1) & \xrightarrow{g_*} & \pi(X, Y_2) \\ & \searrow (h \circ g)_* & \swarrow h_* \\ & \pi(X, Y_3) & \end{array}$$

коммутативна.

13.3 Задачи

Глава 14

Фундаментальная группа. Накрытия.

Темы в этой главе

Тема 43. Операции с путями.

Тема 44. Фундаментальная группа. Зависимость от отмеченной точки. Односвязные пространства.

Тема 45. Накрытия. Лемма о поднятии пути.

Тема 46. Теорема о поднятии гомотопии.

14.1 Фундаментальная группа. Накрытия.

14.1.1 Фундаментальная группа.

Обозначим $\mathbb{D} = \{0, 1\} \subset \mathbb{I}$.

Операции с путями

Пусть X пространство. Напомним, путь в X это непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow X$.

Утверждение 14.1. Пусть $h, g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ непрерывные отображения, для которого $h(0) = g(0)$, $h(1) = g(1)$ и $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow X$ путь. Тогда путь $\varphi \circ h$ $\mathbb{D}$ -гомотопен пути $\varphi \circ g$.

В частности, если $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, то путь $\varphi \circ h$ $\mathbb{D}$ -гомотопен пути φ (т.е. случай $g(t) = t$).

Доказательство. Положим $\Phi(x, t) = \varphi((1-t)h(x) + tg(x))$ для $x \in \mathbb{I}$ и $t \in \mathbb{I}$. Как композиция непрерывного отображения φ и непрерывной функции $(1-t)h(x) + tg(x)$, отображение Φ непрерывно. Отображение Φ является $\mathbb{D}$ -гомотопией, связывающей отображения $\varphi \circ h$ с $\varphi \circ g$. $\square$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — пути в X , такие что $\varphi_i(1) = \varphi_{i+1}(0)$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$. Пусть $0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < 1$. Положим $a_0 = 0$ и $a_n = 1$. Обозначим через $\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n; a_1, \dots, a_{n-1})$ такое отображение $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow X$, что $\varphi((1-t)a_{i-1} + ta_i) = \varphi_i(t)$ для $i = 1, 2, \dots, n$ и $t \in \mathbb{I}$.

Пусть $0 \leq a < b \leq 1$. Обозначим

$$\mathcal{H}_{a,b} : \mathbb{I} \rightarrow [a, b], \quad t \mapsto (1-t)a + tb,$$

$$\mathcal{H}_{a,b}^{-1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{I}, \quad q \mapsto \frac{q-a}{b-a}.$$

Отображения $\mathcal{H}_{a,b}$ и $\mathcal{H}_{a,b}^{-1}$ являются гомеоморфизмами и взаимно обратные. Тогда

$$\varphi_i = \varphi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}, \quad (14.1)$$

$$\varphi|_{[a_{i-1}, a_i]} = \varphi_i \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}^{-1}. \quad (14.2)$$

Пусть $0 \leq c < d \leq 1$. Тогда

$$\mathcal{H}_{a,b} \circ \mathcal{H}_{c,d} = \mathcal{H}_{\mathcal{H}_{a,b}(c), \mathcal{H}_{a,b}(d)} = \mathcal{H}_{(1-c)a+cb, (1-d)a+db}. \quad (14.3)$$

Утверждение 14.2. $\varphi = \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n; a_1, \dots, a_{n-1})$ является путем.

Доказательство. Надо доказать непрерывность φ . Для $i \in \{1, \dots, n\}$, отображения φ_i и $\mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}^{-1}$ непрерывны, поэтому из (14.2) вытекает, что отображение $\varphi|_{[a_{i-1}, a_i]}$ непрерывно. Из предложения 3.13 вытекает, что отображение φ непрерывно. $\square$

Из определения вытекают следующие утверждения.

Утверждение 14.3. Если φ путь, $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < 1 = a_n$, $\varphi_i = \varphi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}$ для $i = 1, 2, \dots, n$, то

$$\varphi = \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n; a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Утверждение 14.4. Пусть

$$\varphi = \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n; a_1, \dots, a_{n-1}).$$

и $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi &= \Sigma(\psi_1, \psi_2; a_m), \quad \text{где} \\ \psi_1 &= \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_m; \frac{a_1}{a_m}, \dots, \frac{a_{m-1}}{a_m}), \\ \psi_2 &= \Sigma(\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n; \frac{a_{m+1}-a_m}{1-a_m}, \dots, \frac{a_{n-1}-a_m}{1-a_m}). \end{aligned}$$

Доказательство. Положим $a_0 = 0$ и $a_n = 1$. Из (14.1) и (14.2) вытекает, что

$$\varphi_i = \psi_1 \circ \mathcal{H}_{\frac{a_{i-1}}{a_m}, \frac{a_i}{a_m}} \quad \text{для } i = 1, \dots, m, \quad (14.4)$$

$$\varphi_i = \psi_2 \circ \mathcal{H}_{\frac{a_{i-1}-a_m}{1-a_m}, \frac{a_i-a_m}{1-a_m}} \quad \text{для } i = m+1, \dots, n. \quad (14.5)$$

Обозначим $\psi = \Sigma(\psi_1, \psi_2; a_m)$. Нам необходимо доказать, что $\varphi = \psi$. Из (14.1) и (14.2) вытекает, что достаточно доказать, что $\varphi_i = \psi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}$ для $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим два случая.

Случай $i \leq m$. Тогда $[a_{i-1}, a_i] \subset [0, a_m]$ и из (14.4), (14.1), и (14.3) вытекает

$$\begin{aligned}\psi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} &= \psi_1 \circ \mathcal{H}_{0, a_m} \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} \\ &= \psi_1 \circ \mathcal{H}_{\frac{a_{i-1}}{a_m}, \frac{a_i}{a_m}} = \varphi_i.\end{aligned}$$

Случай $i > m$. Тогда $[a_{i-1}, a_i] \subset [a_m, 1]$ и из (14.5), (14.1), и (14.3) вытекает

$$\begin{aligned}\psi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} &= \psi_2 \circ \mathcal{H}_{a_m, 1} \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} \\ &= \psi_2 \circ \mathcal{H}_{\frac{a_{i-1}-a_m}{1-a_m}, \frac{a_i-a_m}{1-a_m}} = \varphi_i.\end{aligned}$$

□

Из утверждения 14.4 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 14.5. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ пути, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$, $\varphi_2(1) = \varphi_3(0)$ и $0 < a, b < 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\Sigma(\Sigma(\varphi_1, \varphi_2; a), \varphi_3; b) &= \Sigma(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; ab, b), \\ \Sigma(\varphi_1, \Sigma(\varphi_3, \varphi_2; a); b) &= \Sigma(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; b, b + a(1 - b)).\end{aligned}$$

Предложение 14.6. Пусть φ_i и ψ_i пути в X для $i = 1, \dots, n$, такие что $\varphi_i(1) = \varphi_{i+1}(0) = \psi_i(1) = \psi_{i+1}(0)$ и пути φ_i и ψ_i $\mathbb{D}$ -гомотопны для $i = 1, 2, \dots, n-1$. Пусть $0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < 1$ и $0 < b_1 < \dots < b_{n-1} < 1$. Обозначим

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n; a_1, \dots, a_{n-1}), & \varphi_b &= \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n; b_1, \dots, b_{n-1}), \\ \psi_a &= \Sigma(\psi_1, \dots, \psi_n; a_1, \dots, a_{n-1}), & \psi_b &= \Sigma(\psi_1, \dots, \psi_n; b_1, \dots, b_{n-1}).\end{aligned}$$

Тогда

- (1) пути φ_a и φ_b $\mathbb{D}$ -гомотопны;
- (2) пути φ_a и ψ_a $\mathbb{D}$ -гомотопны;
- (3) пути $\varphi_a, \varphi_b, \psi_a$ и ψ_b попарно $\mathbb{D}$ -гомотопны.

Доказательство. Пункт (3) вытекает из (1) и (2). Положим $a_0 = b_0 = 0$ и $a_n = b_n = 1$.

Докажем (1). Пусть $h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ есть кусочно линейная функция, такая что $h(a_i) = b_i$ для $i = 0, 1, \dots, n$ и h линейна на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда из (14.2) вытекает, что

$$\begin{aligned}\varphi_b|_{[b_{i-1}, b_i]} \circ h|_{[a_{i-1}, a_i]} &= \varphi_i \circ \mathcal{H}_{b_{i-1}, b_i}^{-1} \circ h|_{[a_{i-1}, a_i]} = \varphi_i \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}^{-1} \\ &= \varphi_a|_{[a_{i-1}, a_i]}\end{aligned}$$

для $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\varphi_b = \varphi_a \circ h$. Из утверждения 14.1 вытекает, что $\varphi_a \sim_{\mathbb{D}} \varphi_b$.

Докажем (2). Пусть Φ_i есть $\mathbb{D}$ -гомотопия, связывающая φ_i с ψ_i . Положим

$$\Theta_i = h_i \times \text{id}_{\mathbb{I}} : [a_{i-1}, a_i] \times \mathbb{I} \rightarrow X.$$

Отображение Θ_i непрерывно. Так как

$$\Theta_i(1, t) = \Theta_{i+1}(0, t) = \varphi_i(1) = \varphi_{i+1}(0) = \psi_i(1) = \psi_{i+1}(0),$$

то существует отображение $\Theta : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow X$, такое что

$$\Theta|_{[a_{i-1}, a_i] \times \mathbb{I}} = \Theta_i.$$

Из предложения 3.13 вытекает, что отображение Θ непрерывно. Отображение Θ является $\mathbb{D}$ -гомотопией, связывающей φ_a и ψ_a . $\square$

Для пути φ обозначим

$$\varphi^{-1} : \mathbb{I} \rightarrow X, \quad t \mapsto \varphi(1 - t)$$

обратный путь.

Утверждение 14.7. Если пути φ и ψ $\mathbb{D}$ -гомотопны, то φ^{-1} и ψ^{-1} $\mathbb{D}$ -гомотопны.

Доказательство. Пусть Φ есть $\mathbb{D}$ -гомотопия, связывающая пути φ и ψ . Положим $\Theta(x, t) = \Phi(x, 1 - t)$. Отображение Θ непрерывно и Θ является $\mathbb{D}$ -гомотопией, связывающей φ^{-1} и ψ^{-1} . $\square$

Для $x_0 \in X$ обозначим

$$\text{const}_{x_0} : \mathbb{I} \rightarrow X, \quad t \mapsto x_0$$

постоянный путь.

Утверждение 14.8. Пусть $x_0 = \varphi(0)$ и $x_1 = \varphi(1)$. Тогда

- (1) $\Sigma(\varphi, \varphi^{-1}; \frac{1}{2}) \sim_{\mathbb{D}} \text{const}_{x_0}$;
- (2) $\Sigma(\varphi^{-1}, \varphi; \frac{1}{2}) \sim_{\mathbb{D}} \text{const}_{x_1}$;
- (3) $\Sigma(\text{const}_{x_0}, \varphi; \frac{1}{2}) \sim_{\mathbb{D}} \varphi$;
- (4) $\Sigma(\varphi, \text{const}_{x_1}; \frac{1}{2}) \sim_{\mathbb{D}} \varphi$.

Доказательство. Докажем (1). Положим

$$h(t) = \begin{cases} 2t, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2t, & \text{если } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $\Sigma(\varphi, \varphi^{-1}; \frac{1}{2}) = \varphi \circ h$. Пусть $g(t) = 0$ есть нулевая константа. Из утверждения 14.1 вытекает, что $\varphi \circ h \sim_{\mathbb{D}} \varphi \circ g = \text{const}_{x_0}$.

Пункт (2) вытекает из (1).

Докажем (3). Положим

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & \text{если } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $\Sigma(\text{const}_{x_0}, \varphi; \frac{1}{2}) = \varphi \circ h$. Из утверждения 14.1 вытекает, что $\varphi \circ h \sim_{\mathbb{D}} \varphi$.

Докажем (4). Положим

$$h(t) = \begin{cases} 2t, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $\Sigma(\varphi, \text{const}_{x_1}; \frac{1}{2}) = \varphi \circ h$. Из утверждения 14.1 вытекает, что $\varphi \circ h \sim_{\mathbb{D}} \varphi$. $\square$

Операции на множестве $\pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$ $\mathbb{D}$ -гомотопных путей

Пусть $\alpha \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$. Для любых $\varphi, \psi \in \alpha$, $\varphi(0) = \psi(0)$ и $\varphi(1) = \psi(1)$. Для α точку $\varphi(0)$ будем называть началом α и $\varphi(1)$ концом α . Элементы $\pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$ также будем называть путями.

Обозначим $\epsilon_x = [\text{const}_x]_{\mathbb{D}}$ для $x \in X$.

Для $[\varphi]_{\mathbb{D}} \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$ положим $[\varphi]_{\mathbb{D}}^{-1} = [\varphi^{-1}]_{\mathbb{D}}$. Из утверждения 14.7 вытекает, что операция $^{-1}$ введена корректно.

Введем *частичную операцию умножения*: если $\varphi(1) = \psi(0)$, то $[\varphi]_{\mathbb{D}}[\psi]_{\mathbb{D}} = [\Sigma(\varphi, \psi; \frac{1}{2})]_{\mathbb{D}}$. Из предложения 14.6(2) вытекает, что операция введена корректно.

Утверждение 14.9. *Частичное умножение в $\pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$ ассоциативно, то есть если $\alpha, \beta, \gamma \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$, $\alpha(1) = \beta(0)$ и $\beta(1) = \gamma(0)$, то*

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \alpha$, $\psi \in \beta$, $\xi \in \gamma$. Тогда, в силу утверждения 14.5,

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma &= [\Sigma(\Sigma(\varphi, \psi; \frac{1}{2}), \xi; \frac{1}{2})]_{\mathbb{D}} = [\Sigma(\varphi, \psi, \xi; \frac{1}{4}, \frac{1}{2})]_{\mathbb{D}}, \\ \alpha(\beta\gamma) &= [\Sigma(\varphi, \Sigma(\psi, \xi; \frac{1}{2}); \frac{1}{2})]_{\mathbb{D}} = [\Sigma(\varphi, \psi, \xi; \frac{1}{2}, \frac{3}{4})]_{\mathbb{D}}. \end{aligned}$$

Из предложения 14.6 вытекает, что $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. $\square$

Из утверждения 14.8 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 14.10. *Пусть $\alpha \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$, $x_0 = \alpha(0)$ и $x_1 = \alpha(1)$. Тогда*

- (1) $\alpha\alpha^{-1} = \epsilon_{x_0}$;
- (2) $\alpha^{-1}\alpha = \epsilon_{x_1}$;
- (3) $\epsilon_{x_0}\alpha = \alpha$;
- (4) $\alpha\epsilon_{x_1} = \alpha$;

Фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$.

Путь φ называется *петлей*, если $\varphi(0) = \varphi(1)$, то есть начало и конец φ совпадают. Также будем называть элементы $\alpha \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$, для которых $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Положим

$$\pi_1(X, x_0) = \{\alpha \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D}) : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

Множество $\pi_1(X, x_0)$ состоит из петель с началом и концом в x_0 .

Операция умножения в $\pi_1(X, x_0)$ не является частичной, она определена для любых двух элементов из $\pi_1(X, x_0)$,

Из утверждений 14.9 и 14.10 вытекает, что $\pi_1(X, x_0)$ является группой с единицей ϵ_{x_0} .

Зависимость от отмеченной точки

Теорема 14.11. Пусть $x_0, x_1 \in X$ лежат в одной компоненте линейной связности в X . Тогда группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны.

Доказательство. Пусть $\theta \in \pi(\mathbb{I}, X, \mathbb{D})$ есть путь в X , для которого x_0 начало и x_1 конец. Определим отображения

$$\begin{aligned}\Theta : \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_0(X, x_1), \quad \alpha \mapsto \theta^{-1}\alpha\theta, \\ \Delta : \pi_0(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_1), \quad \beta \mapsto \theta\beta\theta^{-1}.\end{aligned}$$

Проверим, что Θ гомоморфизм групп. Из утверждений 14.9 и 14.10 вытекает, что

$$\begin{aligned}\Theta(\epsilon_{x_0}) &= \theta^{-1}\epsilon_{x_0}\theta = \theta^{-1}\theta = \epsilon_{x_1}, \\ \Theta(\alpha_1\alpha_2) &= \theta^{-1}\alpha_1\alpha_2\theta = \theta^{-1}\alpha_1\theta\theta^{-1}\alpha_2\theta = \Theta(\alpha_1)\Theta(\alpha_2).\end{aligned}$$

Аналогично, Δ является гомоморфизмом групп. Так как

$$\Delta(\Theta(\alpha)) = \theta(\theta^{-1}\alpha\theta)\theta^{-1} = (\theta\theta^{-1})\alpha(\theta\theta^{-1}) = \epsilon_{x_0}\alpha\epsilon_{x_1} = \alpha,$$

то Θ изоморфизм. □

Замечание. Из Теоремы 14.13 следует, что для линейно связного пространства X группы $\pi_1(X, x_0)$ в различных точках $x_0 \in X$ изоморфны между собой и могут рассматриваться как одна группа $\pi_1(X)$, которая называется фундаментальной группой линейно связного пространства X .

Односвязные пространства

Определение 14.12. Линейно связное пространство X называется односвязным, если любые два пути $\alpha_1: \mathbb{I} \rightarrow X$ и $\alpha_2: \mathbb{I} \rightarrow X$, такие что $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = x_0$, $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) = x_1$, принадлежат одному гомотопическому классу путей с закреплёнными концами.

Другими словами, линейно связное пространство X односвязно если из того что $\alpha, \beta \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$, $\alpha(0) = \beta(0)$ и $\alpha(1) = \beta(1)$ вытекает что $\alpha = \beta$.

Теорема 14.13. Линейно связное пространство X односвязно тогда и только тогда, когда $\pi_1(X) = 0$.

Доказательство. Импликация $(\Rightarrow)$ вытекает из того, что если X односвязно, то любая петля гомотопна постоянному пути. Докажем $(\Leftarrow)$. Пусть $\alpha, \beta \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$, $x_0 = \alpha(0) = \beta(0)$ и $x_1 = \alpha(1) = \beta(1)$. Из того, что $\pi_1(X, x_0) = \{\epsilon_{x_0}\}$ вытекает, что $\alpha\beta^{-1} = \epsilon_{x_0}$. Следовательно,

$$\beta = \epsilon_{x_0}\beta = \alpha\beta^{-1}\beta = \alpha\epsilon_{x_1} = \alpha.$$

□

14.1.2 Накрытия.

Непрерывное сюръективное отображение $p : E \rightarrow X$ называется *накрытием*, если существует база $\mathcal{B}$ пространства X , такая что для каждого $V \in \mathcal{B}$ существует дискретное пространство D_V и гомеоморфизм

$$h_V : p^{-1}(V) \rightarrow V \times D_V,$$

такие что

$$\pi_V \circ h_V = p|_{p^{-1}(V)},$$

где $\pi_V : V \times D_V \rightarrow V$ есть проекция. Пространство E называется *тотальным пространством* накрытия, пространство X — *базой* накрытия.

Отображения

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto z^n, \\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \varphi \mapsto e^{i\varphi} \end{aligned}$$

являются накрытиями.

Пусть $f : Y \rightarrow X$ и $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ непрерывные отображения. Отображение $\tilde{f}$ называется *поднятием* отображения f , если $f = p \circ \tilde{f}$.

Несложно доказываются следующие утверждения.

Лемма 14.14. Пусть γ открытое покрытие отрезка $\mathbb{I}$. Тогда существуют $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$, такие что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ существует $U \in \gamma$, такие что $[a_{i-1}, a_i] \subset U$.

Теорема 14.15 (лемма о поднятии пути). Пусть $p : E \rightarrow X$ накрытие, φ путь в X , $x_0 = \varphi(0)$ и $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Существует и единственное поднятие $\tilde{\varphi}$ пути φ , для которого $\tilde{\varphi}(0) = e_0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ есть база пространства X , такая что для каждого $V \in \mathcal{B}$ существует дискретное пространство D_V и гомеоморфизм $h_V : p^{-1}(V) \rightarrow V \times D_V$, такие что $\pi_V \circ h_V = p|_{p^{-1}(V)}$, где $\pi_V : V \times D_V \rightarrow V$ есть проекция.

Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} = \{ \psi : \psi \text{ является путем в } X \text{ и для любого } y_0 \in p^{-1}(\psi(0)) \\ \text{существует и единственн поднятие } \tilde{\psi} \text{ пути } \psi, \\ \text{для которого } \tilde{\psi}(0) = y_0 \}. \end{aligned}$$

Нам надо доказать, что $\varphi \in \mathfrak{P}$.

Лемма. Если ψ путь в X и $\psi(\mathbb{I}) \subset V \in \mathcal{B}$, то $\psi \in \mathfrak{P}$.

Доказательство. Пусть $x_0 = \psi(0)$ и $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Тогда $h_V(y_0) = (x_0, d_0)$ для некоторого $d_0 \in D_V$. Положим $V_0 = V \times \{d_0\}$ и $W = h_V^{-1}(V_0)$. Так как V_0 открыто замкнуто в $V \times D_V$ и h_V гомеоморфизм, то W открыто замкнуто в $p^{-1}(V)$. Так как $p|_W = \pi_V|_{V_0} \circ h_V|_W$, то отображение $p|_W : W \rightarrow V$ является гомеоморфизмом. Положим $q = (p|_W)^{-1} : V \rightarrow W$ и $\tilde{\psi} = \psi \circ q$. Тогда $p \circ \tilde{\psi} = \psi$, то есть $\tilde{\psi}$ является поднятием пути ψ , и $\tilde{\psi}(0) = y_0$.

Покажем, что поднятие пути ψ с началом в y_0 единственно. Пусть ν некоторое поднятие пути ψ с началом в y_0 . Так как $\nu(\mathbb{I}) \subset p^{-1}(V)$ связно,

$\nu(0) = y_0 \in \nu(\mathbb{I}) \cap W$ и W открыто замкнуто в $p^{-1}(V)$, то $\nu(\mathbb{I}) \subset W$. Так как $\nu(\mathbb{I}), \psi(\mathbb{I}) \subset W$, отображение $p|_W : W \rightarrow V$ является биекцией и $p \circ \tilde{\psi} = p \circ \nu$, то $\tilde{\psi} = \nu$. $\square$

Положим $\gamma = \{\varphi^{-1}(V) : V \in \mathcal{B}\}$. Из леммы 14.14 вытекает, что существуют $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$, такие что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ существует $V_i \in \mathcal{B}$, такие что $[a_{i-1}, a_i] \subset \varphi^{-1}(V_i)$, то есть $\varphi([a_{i-1}, a_i]) \subset V_i$. Положим $\varphi_i = \varphi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}$, то есть $\varphi_i(t) = \varphi(a_{i-1}(1-t) + a_i t)$ для $t \in \mathbb{I}$. Тогда $\varphi_i(\mathbb{I}) \subset V_i$ и

$$\varphi = \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n; a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Так $\varphi_i(\mathbb{I}) \subset V_i \in \mathcal{B}$, то из леммы вытекает, что $\varphi_i \in \mathfrak{P}$ для $i = 1, \dots, n$. Положим $x_i = \varphi_i(1) = \varphi_{i+1}(0)$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Индукцией по i построим пути $\tilde{\varphi}_i$ в E и точки $e_i \in E$ для $i = 1, \dots, n$, таким образом, что $\tilde{\varphi}_i$ есть поднятие пути φ_i для $i = 1, \dots, n$, $e_0 = \tilde{\varphi}_1(0)$ и $e_i = \tilde{\varphi}_i(0) = \tilde{\varphi}_{i-1}(1)$ для $i = 2, \dots, n$.

База индукции, $i = 1$. Так как $\varphi_1 \in \mathfrak{P}$, то существует поднятие $\tilde{\varphi}_1$ пути φ_1 , для которого $\tilde{\varphi}_1(0) = e_0$.

Шаг индукции, $i > 1$. Положим $e_i = \tilde{\varphi}_{i-1}(1)$. Так как $p(e_i) = \varphi_{i-1}(1) = x_i = \varphi_i(0)$ и $\varphi_i \in \mathfrak{P}$, то существует поднятие $\tilde{\varphi}_i$ пути φ_i , для которого $\tilde{\varphi}_i(0) = e_i$.

Построение завершено. Положим

$$\tilde{\varphi} = \Sigma(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n; a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Так как

$$(p \circ \tilde{\varphi}) \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} = p \circ (\tilde{\varphi} \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}) = p \circ \tilde{\varphi}_i = \varphi_i = \varphi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}$$

для $i = 1, \dots, n$, то $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, то есть $\tilde{\varphi}$ есть поднятие пути φ . По построению $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}_1(0) = e_0$.

Мы последовательно поднимали части пути $\varphi|_{[a_{i-1}, a_i]}$ до $\tilde{\varphi}|_{[a_{i-1}, a_i]}$, при этом это частичное поднятие единственно, так как $\varphi_i \in \mathfrak{P}$. Что обеспечивает единственность поднятия $\tilde{\varphi}$. Ниже докажем единственность более формально.

Докажем, что поднятие $\tilde{\varphi}$ с условием $\tilde{\varphi}(0) = e_0$ единственно. Пусть ν есть поднятие φ , для которого $\nu(0) = e_0$. Нам надо доказать, что $\nu = \tilde{\varphi}$. Предположим противное, то есть $\nu \neq \tilde{\varphi}$.

Положим $\nu_i = \nu \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}$ для $i = 1, \dots, n$. Отметим, что ν_i есть поднятие φ_i , так как

$$p \circ \nu_i = p \circ \nu \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} = \varphi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} = \varphi_i.$$

Пусть

$$m = \min\{i \in \{1, \dots, n\} : \tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi} \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} \neq \nu \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i} = \nu_i\}.$$

Покажем, что $\nu_m(0) = e_{m-1}$. Если $m = 1$, то $\nu_1(0) = \nu(0) = e_0$. Если $m > 1$, то $\nu_m(0) = \nu_{m-1}(1) = \tilde{\varphi}_{m-1}(1) = e_{m-1}$.

Так как $\varphi_m \in \mathfrak{P}$, ν_m и $\tilde{\varphi}_m$ являются поднятиями пути φ_i и $\nu_m(0) = \tilde{\varphi}_m(0) = e_{m-1}$, то $\nu_m = \tilde{\varphi}_m$. Противоречие с определением m . $\square$

Теорема 14.16 (о поднятии гомотопии). Пусть $p : X \rightarrow E$ накрытие, $\Phi : Y \times \mathbb{I} \rightarrow X$ гомотопия, $f : Y \rightarrow X$, $y \mapsto \Phi(y, 0)$, $\tilde{f}$ поднятие отображения f . Существует и единственное поднятие $\tilde{\Phi}$ гомотопии Φ , для которого $\tilde{\Phi}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ для $y \in Y$.

Доказательство. Для $y \in Y$, положим $\varphi_y(t) = \Phi(y, t)$ для $t \in \mathbb{I}$. Отображение $\varphi_y(t)$ является путем. Из леммы о поднятии пути (теорема 14.15) вытекает, что существует и единственное поднятие $\tilde{\varphi}_y$ пути φ_y , для которого $\tilde{\varphi}_y(0) = \tilde{f}(y)$. Положим $\tilde{\Phi}(y, t) = \tilde{\varphi}_y(t)$ для $y \in Y$ и $t \in \mathbb{I}$. Тогда $p \circ \tilde{\Phi} = \Phi$ и $\tilde{\Phi}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ для $y \in Y$. Если поднятие гомотопии Φ существует, то оно должно совпадать с $\tilde{\Phi}$.

Осталось проверить непрерывность $\tilde{\Phi}$. Пусть $y_0 \in Y$. Проверим непрерывность $\tilde{\Phi}$ в каждой точке (y_0, t_0) для $t_0 \in \mathbb{I}$.

Пусть $\mathcal{B}$ есть база пространства X , такая что для каждого $V \in \mathcal{B}$ существует дискретное пространство D_V и гомеоморфизм $h_V : p^{-1}(V) \rightarrow V \times D_V$, такие что $\pi_V \circ h_V = p|_{p^{-1}(V)}$, где $\pi_V : V \times D_V \rightarrow V$ есть проекция.

Для $t \in \mathbb{I}$ зафиксируем открытое $U_t \ni t$, открытую окрестность $W_t \ni y_0$ и $O_t \in \mathcal{B}$, такие что

$$\Phi(W_y \times U_t) \subset O_t.$$

Так как $\mathbb{I}$ компактно, то существует конечное $T \subset \mathbb{I}$, такое что $\bigcup_{t \in T} U_t = \mathbb{I}$. Положим $W = \bigcap_{t \in T} W_t$. Из леммы 14.14 вытекает, что существуют $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$, такие что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ существует $t_i \in T$, такие что $[a_{i-1}, a_i] \subset U_{t_i}$. Обозначим $V_i = O_{t_i} \in \mathcal{B}$, тогда

$$\Phi(W \times [a_{i-1}, a_i]) \subset V_i \quad (14.6)$$

для $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим

$$\tilde{f}_t : Y \rightarrow E, \quad y \mapsto \tilde{\Phi}(y, t) = \tilde{\varphi}_y(t).$$

Тогда $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$.

Лемма. Пусть $i = 1, 2, \dots, n$.

(L_i^1) Существует G_i открыто замкнутое в множестве $p^{-1}(V_i)$, такое что $p|_{G_i} : G_i \rightarrow V_i$ является гомеоморфизмом и $\tilde{\varphi}_{y_0}([a_{i-1}, a_i]) \subset G_i$.

(L_i^2) Существует открытая окрестность H_i точки y_0 , такое что $H_i \subset W$ и $\tilde{f}_{a_{i-1}}(H_i) \subset G_i$.

(L_i^3) $\tilde{f}_t(H_i) \subset G_i$ для $t \in [a_{i-1}, a_i]$, то есть $\tilde{\Phi}(H_i \times [a_{i-1}, a_i]) \subset G_i$.

(L_i^4) Отображение

$$\tilde{\Phi}|_{H_i \times [a_{i-1}, a_i]} : H_i \times [a_{i-1}, a_i] \rightarrow G_i \subset E$$

непрерывно.

Доказательство. Докажем (L_i^1). Для некоторого $d_i \in D_{V_i}$,

$$h_{V_i}(\tilde{\varphi}_{y_0}(a_{i-1})) = (\varphi_{y_0}(a_{i-1}), d_i).$$

Положим $G_i = h_V^{-1}(V_i \times \{d_i\})$. Тогда G_i открыто замкнутое в множестве $p^{-1}(V_i)$, $p|_{G_i} : G_i \rightarrow V_i$ является гомеоморфизмом и $\tilde{\varphi}_{y_0}(a_{i-1}) \in G_i$. Так как G_i открыто замкнуто в $p^{-1}(V_i)$, $\tilde{\varphi}_{y_0}$ непрерывный путь, $\tilde{\varphi}_{y_0}(a_{i-1}) \in G_i$ и $\tilde{\varphi}_{y_0}([a_{i-1}, a_{i+1}]) \subset p^{-1}(V_i)$ связно, то $\tilde{\varphi}_{y_0}([a_{i-1}, a_{i+1}]) \subset G_i$.

Докажем (L_i^2) , (L_i^3) и (L_i^4) индукцией по i .

Докажем (L_1^2) . Так как $a_0 = 0$, отображение $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ непрерывно, $\tilde{f}_0(y_0) = \tilde{\varphi}_{y_0}(a_0) \in G_1$ и G_1 открыто в E , то существует окрестность H_1 точки y_0 , такая что $H_1 \subset W$ и $\tilde{f}_0(H_1) \subset G_1$.

Докажем (L_i^2) для $i > 1$. Из L_{i-1}^4 вытекает, что отображение $\tilde{f}_{a_{i-1}}|_{H_{i-1}}$ непрерывно. Так как $\tilde{f}_{a_{i-1}}(y_0) = \tilde{\varphi}_{y_0}(a_{i-1}) \in G_i$ и G_i открыто в E , то существует окрестность H_i точки y_0 , такая что $H_i \subset W$ и $\tilde{f}_{a_{i-1}}(H_i) \subset G_i$.

Докажем (L_i^3) . Пусть $y \in H_i$. Из (14.6) вытекает, что $\tilde{\varphi}_y([a_{i-1}, a_i]) \subset p^{-1}(V_i)$. Из (L_i^2) вытекает, что

$$\tilde{\varphi}_y(a_{i-1}) = \tilde{\Phi}(y, a_{i-1}) = \tilde{f}_{a_{i-1}}(y) \in G_i.$$

Так как

$$\tilde{\varphi}_y(a_{i-1}) \in G_i \cap \tilde{\varphi}_y([a_{i-1}, a_i]) \neq \emptyset,$$

$\tilde{\varphi}_y([a_{i-1}, a_i])$ связное подмножество $p^{-1}(V_i)$ и G_i открыто замкнуто в $p^{-1}(V_i)$, то $\tilde{\varphi}_y([a_{i-1}, a_i]) \subset G_i$. Следовательно, $\tilde{\Phi}(H_i \times [a_{i-1}, a_i]) \subset G_i$.

Докажем (L_i^4) . Так как $p \circ \tilde{\Phi} = \Phi$, $p|_{G_i} : G_i \rightarrow V_i$ гомеоморфизм, Φ непрерывно и $\tilde{\Phi}(H_1 \times [a_{i-1}, a_i]) \subset G_i$, то отображение

$$\tilde{\Phi}|_{H_i \times [a_{i-1}, a_i]} = (p|_{G_i})^{-1} \circ \Phi|_{H_i \times [a_{i-1}, a_i]} : H_i \times [a_{i-1}, a_i] \rightarrow G_i \subset E$$

непрерывно. $\square$

Множество $H = \bigcap_{i=1}^n$ является окрестностью точки y_0 . Из (L_i^4) вытекает, что отображение

$$\tilde{\Phi}|_{H \times [a_{i-1}, a_i]} : H \times [a_{i-1}, a_i] \rightarrow E$$

непрерывно для $i = 1, \dots, n$. Из предложения 3.13 вытекает, что отображение $\tilde{\Phi}|_{H \times \mathbb{I}}$ непрерывно. Следовательно, отображение $\tilde{\Phi}$ непрерывно в точке (y_0, t_0) для каждого $t_0 \in \mathbb{I}$. $\square$

Теорема 14.17 (о поднятии A -гомотопии). Пусть $p : X \rightarrow E$ накрытие, $A \subset X$, $\Phi : Y \times \mathbb{I} \rightarrow X$ A -гомотопия, $f : Y \rightarrow X$, $y \mapsto \Phi(y, 0)$, $\tilde{f}$ поднятие отображения f . Существует и единственное поднятие $\tilde{\Phi}$ A -гомотопии Φ , для которого $\tilde{\Phi}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ для $y \in Y$, при этом $\tilde{\Phi}$ является A -гомотопией.

Доказательство. Из теоремы 14.16 вытекает, что существует и единственное поднятие $\tilde{\Phi}$ гомотопии Φ , для которого $\tilde{\Phi}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ для $y \in Y$. Необходимо проверить, что $\tilde{\Phi}$ является A -гомотопией. Для $y \in Y$ обозначим

$$\varphi_y : \mathbb{I} \rightarrow X, \quad t \mapsto \Phi(y, t),$$

$$\tilde{\varphi}_y : \mathbb{I} \rightarrow E, \quad t \mapsto \tilde{\Phi}(y, t).$$

Путь $\tilde{\varphi}_y$ является поднятием пути φ_y с условием $\tilde{\varphi}_y(0) = \tilde{f}(y)$. Из теоремы 14.15 вытекает, что поднятие с данными условиями единственно.

Пусть $y \in A$. Так как Φ является A -гомотопией, то путь φ_y является постоянным отображением: $\varphi_y = \text{const}_{f(y)}$. Тогда постоянное отображение $\text{const}_{\tilde{f}(y)}$ является поднятием φ_y с условием $\text{const}_{\tilde{f}(y)}(0) = \tilde{f}(y)$. Так как поднятие с данными условиями единственно, то $\text{const}_{\tilde{f}(y)} = \tilde{\varphi}_y$.

Получаем, $\tilde{\Phi}(y, t) = \tilde{f}(y)$ для $y \in A$ и $t \in \mathbb{I}$. Следовательно, $\tilde{\Phi}$ является A -гомотопией. $\square$

14.2 Дополнение

14.2.1 Фундаментальная группа.

Пространства с отмеченной точкой

В топологии часто приходится рассматривать пространства с отмеченной точкой, т.е. считать, что во всех пространствах выделены отмеченные точки и все отображения переводят отмеченные точки в отмеченные. Одинаковые пространства с разными отмеченными точками считаются разными пространствами. Класс топологических пространств с отмеченными точками и их непрерывных отображений будет обозначаться через Top_b (b — это "base-point" — отмеченная точка).

Операции над пространствами с отмеченной точкой

Переход к пространствам с отмеченной точкой в той или иной степени сказывается на рассмотренных выше топологических операциях. Для некоторых из них изменение сводится к тому, что пространство — результат операции — наделяется отмеченной точкой. Например, в произведении $X \times Y$ отмечается точка (x_0, y_0) , где x_0, y_0 — отмеченные точки сомножителей. Некоторые операции модифицируются более серьёзным образом. Так, в конусе $\text{Con}(X)$ отождествляются между собой точки образующей, соответствующей отмеченной точке. При этом, иногда обычный конус $\text{Con}(X)$ не гомеоморфен конусу $\text{Con}_b(X)$ с отмеченной точкой. Например, если X состоит из трёх точек ($X = 3$), то $\text{Con}(X)$ — это триод, а $\text{Con}_b(X)$ гомеоморфно отрезку. Но оба эти пространства имеют один гомотопический тип — тип точки.

Букет пространств

Букет пространств X и Y с отмеченными точками x_0 и y_0 , получается из суммы этих пространств посредством отождествления их отмеченных точек. Эта операция есть частный случай приклеивание пространств (см. раздел 8.1.4).

Букет пространств X и Y обозначается через $X \vee Y$. Например, букет двух окружностей — "восьмёрка".

14.3 Задачи

Глава 15

Вычисление фундаментальной группы

Темы в этой главе

Тема 47. Универсальное накрытие. Вычисление фундаментальной группы.

Тема 48. Фундаментальная группа окружности и проективного пространства.

15.1 Универсальное накрытие. Вычисление фундаментальной группы. Фундаментальная группа окружности и проективного пространства.

15.1.1 Универсальное накрытие. Вычисление фундаментальной группы.

Пусть X и E пространство и $p : E \rightarrow X$ накрытие. Накрытие p называется *универсальным*, если пространство E односвязно. Далее E односвязное пространство, то есть p универсальное накрытие.

Пусть $x_0 \in X$, $E_0 = p^{-1}(x_0)$ и $e_0 \in E_0$. Построим биекцию $\mathbf{p} : E_0 \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Для каждого $v \in E_0$ зафиксируем путь ξ_v с началом в e_0 и с концом в v . Положим

$$\mathbf{p} : E_0 \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad v \mapsto p_{\mathbb{D},*}([\xi_v]_{\mathbb{D}}) = [p \circ \xi_v]_{\mathbb{D}}.$$

Лемма 15.1. Пусть $p : E \rightarrow X$ накрытие, φ и ψ пути в E , такие что $\varphi(0) = \psi(0)$. Если пути $p \circ \varphi$ и $p \circ \psi$ $\mathbb{D}$ -гомотопны, то пути φ и ψ $\mathbb{D}$ -гомотопны и, следовательно, $\varphi(1) = \psi(1)$.

Доказательство. Пусть Φ есть $\mathbb{D}$ -гомотопия, связывающая путь $p \circ \varphi$ с $p \circ \psi$. Отметим, что φ и ψ есть поднятия путей $p \circ \varphi$ с $p \circ \psi$. Из теоремы о поднятии A -гомотопии (теорема 14.17) вытекает, что существует и единственно поднятие $\tilde{\Phi}$ $\mathbb{D}$ -гомотопии Φ , такое что $\tilde{\Phi}(t, 0) = \varphi(t)$ для $t \in \mathbb{I}$. Так как $\tilde{\Phi}$ является $\mathbb{D}$ -гомотопией, то $\tilde{\Phi}(0, q) = \varphi(0)$ и $\tilde{\Phi}(1, q) = \varphi(1)$ для всех

$q \in \mathbb{I}$. Положим $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\Phi}(1, t)$ для $t \in \mathbb{I}$. $\mathbb{D}$ -Гомотопия $\tilde{\Phi}$ связывает φ с $\tilde{\psi}$ и, следовательно, путь φ $\mathbb{D}$ -гомотопен пути $\tilde{\psi}$. Тогда $\varphi(0) = \tilde{\psi}(0)$, $\varphi(1) = \tilde{\psi}(1)$ и $\tilde{\psi}$ является поднятием пути $p \circ \psi$. Так как ψ и $\tilde{\psi}$ являются поднятиями пути $p \circ \varphi$ и $\psi(0) = \varphi(0) = \tilde{\psi}(0)$, то из леммы о поднятии пути (теорема 14.15) вытекает, что $\psi = \tilde{\psi}$. Следовательно, путь φ $\mathbb{D}$ -гомотопен пути ψ . Отсюда вытекает, что $\varphi(1) = \psi(1)$. $\square$

Утверждение 15.2. *Отображение $\mathbf{p}$ является биекцией.*

Доказательство. Докажем, что отображение $\mathbf{p}$ сюръективно. Пусть $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ и $\varphi \in \alpha$. Из леммы о поднятии пути (теорема 14.15) вытекает, что существует поднятие $\tilde{\varphi}$ пути φ , такое что $\tilde{\varphi}(0) = e_0$. Положим $v = \tilde{\varphi}(1)$. Тогда $v \in E_0$. Так как пространство E односвязно, $\tilde{\varphi}(0) = \xi_v(0) = e_0$ и $\tilde{\varphi}(1) = \xi_v(1) = v$, то пути $\tilde{\varphi}$ и ξ_v $\mathbb{D}$ -гомотопны. Следовательно,

$$\alpha = [p \circ \tilde{\varphi}]_{\mathbb{D}} = p_{\mathbb{D},*}([\tilde{\varphi}]_d) = p_{\mathbb{D},*}([\xi_v]_d) = [p \circ \xi_v]_{\mathbb{D}} = \mathbf{p}(v).$$

Докажем, что отображение $\mathbf{p}$ инъективно. Пусть $u, v \in E_0$ и $\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}(v)$. Нам надо доказать, что $u = v$. Так как $[p \circ \xi_u]_{\mathbb{D}} = [p \circ \xi_v]_{\mathbb{D}}$, то пути $p \circ \xi_u$ и $p \circ \xi_v$ $\mathbb{D}$ -гомотопны. Так как $\xi_u(0) = \xi_v(0) = e_0$, то из леммы 15.1 вытекает, что $\xi_u(1) = \xi_v(1)$. Так как $\xi_u(1) = u$ и $\xi_v(1) = v$, то $u = v$. $\square$

Обозначим $\zeta_v = \mathbf{p}(v)$. Мы получили индексацию

$$\pi_1(X, x_0) = \{\zeta_v : v \in E_0\}$$

группы $\pi_1(X, x_0)$ элементами множества E_0 .

Пусть $v, u \in E_0$. Из леммы о поднятии пути (теорема 14.15) вытекает, что существует единственное поднятие $\xi_{u,v}$ пути $p \circ \xi_v$, такое что $\xi_{u,v}(0) = u$. Отметим, $\xi_{e_0,v} = \xi_v$.

Утверждение 15.3. *Пусть $u, v \in E_0$. Тогда $\zeta_u \zeta_v = \zeta_w$, где $w = \xi_{u,v}(1)$.*

Доказательство. Так как $\xi_u(1) = u = \xi_{u,v}(0)$, то определено $\varphi = \Sigma(\xi_u, \xi_{u,v}; \frac{1}{2})$. Тогда $\varphi(0) = \xi_u(0) = e_0$ и $\varphi(1) = \xi_{u,v}(1) = w$. Так как пространство E односвязно, $\varphi(0) = \xi_w(0) = e_0$ и $\varphi(1) = \xi_w(1) = w$, то $\varphi \sim_{\mathbb{D}} \xi_w$.

Так как

$$\begin{aligned} \zeta_u &= [p \circ \xi_u]_{\mathbb{D}}, & \zeta_v &= [p \circ \xi_v]_{\mathbb{D}} = [p \circ \xi_{u,v}]_{\mathbb{D}}, \\ \zeta_u \zeta_v &= [\Sigma(p \circ \xi_u, p \circ \xi_v; \frac{1}{2})]_{\mathbb{D}}, & \Sigma(p \circ \xi_u, p \circ \xi_v; \frac{1}{2}) &= p \circ \varphi, \\ \varphi &\sim_{\mathbb{D}} \xi_w, & \Sigma(p \circ \xi_u, p \circ \xi_v; \frac{1}{2}) &\sim_{\mathbb{D}} p \circ \xi_w, \end{aligned}$$

то

$$\zeta_u \zeta_v = [\Sigma(p \circ \xi_u, p \circ \xi_v; \frac{1}{2})]_{\mathbb{D}} = [p \circ \xi_w]_{\mathbb{D}} = \zeta_w.$$

$\square$

Вычисление фундаментальной группы.

Пусть X линейно связное пространство. Укажем способ, с помощью которого можно найти фундаментальную группу $\pi_1(X)$.

Шаг 1. Найдем универсальное накрытие $p : E \rightarrow X$. Возьмем $x_0 \in X$. Обозначим $E_0 = p^{-1}(x_0)$. Возьмем $e_0 \in E_0$.

Шаг 2. Для каждого $v \in E_0$ зафиксируем путь ξ_v с началом в e_0 и концом в v . Обозначим $\theta_v = p \circ \xi_v$ и $\zeta_v = [\theta_v]_{\mathbb{D}}$. Множество

$$\pi_1(X, x_0) = \{\zeta_v : v \in E_0\}$$

найдено. Далее будем выяснять закон умножения в $\pi_1(X, x_0)$.

Шаг 3. Для каждых $u, v \in E_0$ находим путь $\xi_{u,v}$ в X , для которого $\xi_{u,v}(0) = u$ и $p \circ \xi_{u,v} = \xi_v$. Тогда

$$\zeta_u \zeta_v = \zeta_w, \quad \text{где } w = \xi_{u,v}(1).$$

15.1.2 Фундаментальная группа окружности и проективного пространства.

Мы будем вычислять фундаментальные группы в соответствии плана, изложенного в разделе 15.1.1 ‘Вычисление фундаментальной группы’.

Проективное пространство.

Пусть $n > 1$.

Предложение 15.4. n -Мерная сфера S_n односвязна.

Доказательство. Пусть φ некоторая петля в S_n . Покажем, что петля φ $\mathbb{D}$ -гомотопна некоторой петле ψ , для которой $\psi(\mathbb{I}) \neq S_n$. Полусферой назовем пересечение сферы S_n с замкнутым полупространством, проходящим через центр сферы. Полусфера гомеоморфна $n - 1$ -мерному шару и поэтому односвязна.

Существуют числа $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$, такие что $\varphi([a_{i-1}, a_i])$ лежит в некоторой полусфере P_i . Положим $\varphi_i = \varphi \circ \mathcal{H}_{a_{i-1}, a_i}$. Тогда $\varphi = \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n, a_1, \dots, a_{n-1})$. Так как $\varphi_i(\mathbb{I}) = \varphi([a_{i-1}, a_i]) \subset P_i$. Пусть ψ_i есть путь, который соединяет $\varphi_i(0)$ с $\varphi_i(1)$ по кратчайшей дуге. Тогда $\psi_i(\mathbb{I}) \subset P_i$, $\psi_i(0) = \varphi_1(0)$ и $\psi_i(1) = \varphi_1(1)$. Так как P_i односвязно, φ_i $\mathbb{D}$ -гомотопна ψ_i . Положим $\psi = \Sigma(\psi_1, \dots, \psi_n, a_1, \dots, a_{n-1})$. Из предложения 14.6 вытекает, что φ $\mathbb{D}$ -гомотопна ψ . Так как $\psi(\mathbb{I})$ лежит в объединении нескольких дуг, то $\psi(\mathbb{I}) \neq S_n$.¹

Пусть $p \in S_n \setminus \psi(\mathbb{I})$. Тогда $\psi(\mathbb{I}) \subset S_n \setminus \{p\} = Y$. Пространство Y гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, односвязно. Тогда петля ψ $\mathbb{D}$ -гомотопна ϵ_{x_0} , где $x_0 = \psi(0)$. $\square$

Определим RP_n проективное пространство как фактор пространства S_n по отношению эквивалентности $\sim$: $x \sim y$ если $x = y$ или $x = -y$. Обозначим $i_n : S_n \rightarrow RP_n$ фактор отображение.

¹Это вытекает из того, что $\mathbb{R}^n$ нельзя представить в виде объединения конечного числа линейных подпространств меньшей размерности.

Шаг 1. Отображение i_n является двухкратным универсальным накрытием. Возьмем некоторое $e_0 \in S_n$ и $x_0 = i_n(e_0)$. Тогда $E_0 = i_n^{-1}(x_0) = \{e_0, -e_0\}$.

Шаг 2. Положим ξ_{-e_0} есть путь, который соединяет e_0 с $-e_0$. Положим $\theta = i_n \circ \xi_{-e_0}$ и $\zeta = [\theta]_{\mathbb{D}}$. Тогда $\pi_1(RP_n, x_0) = \{\epsilon_{x_0}, \zeta\}$. Фундаментальная группа $\pi_1(RP_n, x_0)$ состоит из 2-х элементов, с единицей ϵ_{x_0} . Операции в $\pi_1(RP_n, x_0)$ определены однозначно.

Окружность.

Будем считать, что $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Шаг 1. Отображение

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S_1, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}$$

является накрытием. Положим $x_0 = 1$. Тогда $E_0 = \pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Положим $e_0 = 0$.

Шаг 2. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ зафиксируем путь

$$\xi_n : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto nt$$

с началом в 0 и концом в n . Обозначим

$$\begin{aligned} \theta_n &= p \circ \xi_n : \mathbb{I} \rightarrow S_1, \quad t \mapsto e^{2\pi i nt}, \\ \zeta_n &= [\theta_n]_{\mathbb{D}}. \end{aligned}$$

Множество

$$\pi_1(S_1, 1) = \{\zeta_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

найдено. Далее будем выяснять закон умножения в $\pi_1(S_1, 1)$.

Шаг 3. Для каждых $m, n \in \mathbb{Z}$ положим

$$\xi_{m,n} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto m + nt.$$

Тогда $\xi_{m,n}(0) = m$ и $p \circ \xi_{m,n} = p \circ \xi_n = \theta_n$.

Теперь мы можем вычислить

$$\zeta_m \zeta_n = \zeta_l, \quad \text{где } l = \xi_{m,n}(1) = m + n.$$

Окончательно получаем

$$\zeta_m \zeta_n = \zeta_{m+n}.$$

15.2 Дополнение

15.2.1 Действие фундаментальной группы на прообраз точки при накрытии

Пусть X и E линейно связные пространства и $p : E \rightarrow X$ накрытие.

Пусть φ путь в X и $e_0 \in p^{-1}(\varphi(0))$. Из леммы о поднятии пути (теорема 14.15) вытекает, что существует единственное поднятие $\tilde{\varphi}$ пути φ , для которого $\tilde{\varphi}(0) = e_0$. Обозначим

$$(\varphi)_{e_0} = \tilde{\varphi}.$$

Пусть $e_1 \in p^{-1}(\varphi(1))$. Положим

$$(\varphi)^{e_1} = ((\varphi^{-1})_{e_1})^{-1}.$$

Путь $(\varphi)^{e_1}$ является единственным поднятием пути φ , для которого e_1 является концом. Тогда

$$\varphi = p_{\mathbb{D},*}((\varphi)_{e_0}) = p_{\mathbb{D},*}((\varphi)^{e_1}).$$

Утверждение 15.5. Пусть ψ путь в X , $\mathbb{D}$ -гомотопный пути φ . Тогда $(\psi)_{e_0}$ $\mathbb{D}$ -гомотопен $(\varphi)_{e_0}$ и $(\psi)^{e_1}$ $\mathbb{D}$ -гомотопен $(\varphi)^{e_1}$.

Доказательство. Пусть Φ есть $\mathbb{D}$ -гомотопия, связывающая φ с ψ . Из теоремы 14.17 о поднятии A -гомотопии вытекает, что существует $\mathbb{D}$ -гомотопия $\tilde{\Phi}$ в E , которая является поднятием $\mathbb{D}$ -гомотопии Φ , с условием $\tilde{\Phi}(t, 0) = (\varphi)_{e_0}$. Пусть $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\Phi}(t, 1)$ для $t \in \mathbb{I}$. Тогда $\tilde{\psi}$ является поднятием ψ и $\tilde{\psi}(0) = (\varphi)_{e_0}(0) = e_0$. Следовательно $(\psi)_{e_0} = \tilde{\psi}$ и $(\psi)_{e_0}$ $\mathbb{D}$ -гомотопен $(\varphi)_{e_0}$.

Из $\psi \sim_{\mathbb{D}} \varphi$ вытекает $\psi^{-1} \sim_{\mathbb{D}} \varphi^{-1}$ (утверждение 14.7). Тогда из доказанного вытекает $(\psi^{-1})_{e_1} \sim_{\mathbb{D}} (\varphi^{-1})_{e_1}$. Следовательно,

$$(\psi)^{e_1} = ((\psi^{-1})_{e_1})^{-1} \sim_{\mathbb{D}} ((\varphi^{-1})_{e_1})^{-1} = (\varphi)^{e_1}.$$

□

Пусть $\alpha \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$ и $\varphi \in \alpha$. Положим

$$\begin{aligned} (\alpha)_{e_0} &= [(\varphi)_{e_0}]_{\mathbb{D}}, \\ (\alpha)^{e_1} &= [(\varphi)^{e_1}]_{\mathbb{D}}. \end{aligned}$$

Из утверждения 15.5 вытекает, что определение $(\alpha)_{e_0}$ и $(\alpha)^{e_1}$ корректно.

Несложно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 15.6. Пусть $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \pi(\mathbb{I}, E; \mathbb{D})$ и $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Тогда

$$p_{\mathbb{D},*}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) = p_{\mathbb{D},*}(\tilde{\alpha})p_{\mathbb{D},*}(\tilde{\beta}), \quad p_{\mathbb{D},*}(\tilde{\alpha}^{-1}) = p_{\mathbb{D},*}(\tilde{\alpha})^{-1}.$$

Пусть $\alpha, \beta \in \pi(\mathbb{I}, X; \mathbb{D})$, $\alpha(1) = \beta(0)$, $e_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$, $e_1 = (\alpha)_{e_0}(1)$ и $e_2 = (\beta)_{e_1}(1)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)_{e_0} &= (\alpha)_{e_0}(\beta)_{e_1}, & (\alpha^{-1})_{e_1} &= (\alpha)_{e_0}^{-1}, \\ (\alpha\beta)^{e_2} &= (\alpha)^{e_1}(\beta)^{e_2}. \end{aligned}$$

Напомним, действие группы G с единицей e на множестве M , это гомоморфизм $\mathfrak{g} : G \rightarrow S(M)$, где $S(M)$ это множество биекций $M \rightarrow M$ (перестановок множества M) с групповой операцией композиция отображений. Единица в $S(M)$ это тождественное отображение. Как правило, вместо $\mathfrak{g}(g)(x)$, где $g \in G$ и $x \in M$, пишут gx . Действие группы определяет функцию двух переменных

$$\tilde{\mathfrak{g}} : G \times M \rightarrow M, \quad (g, x) \mapsto \mathfrak{g}(g)(x) = gx.$$

Эту функцию, как правило, также называют действием. По функции $\tilde{\mathfrak{g}}$ можно восстановить гомоморфизм $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}(g)(x) = \tilde{\mathfrak{g}}(g, x)$. Для $\tilde{\mathfrak{g}}$ выполняются

условия: $\tilde{g}(e, x) = x$ и $\tilde{g}(gh, x) = \tilde{g}(g, \tilde{g}(h, x))$, в сокращенной записи, $ex = x$ и $(gh)x = g(hx)$. Если $\mathfrak{h} : G \times M \rightarrow M$ функция, для которой выполняются тождества $\mathfrak{h}(e, x) = x$ и $\mathfrak{h}(gh, x) = \mathfrak{h}(g, \mathfrak{h}(h, x))$, то оно порождает гомоморфизм $\mathfrak{h} : G \rightarrow S(M)$ (то есть действие G на M), для которого выполняется $\mathfrak{h}(g, x) = \mathfrak{h}(g)(x)$.

Как правило, для определения действия группы G на множестве M , для $g \in G$ и $x \in M$, определяется gx и проверяются тождества $ex = x$ и $(gh)x = g(hx)$.

Пусть $x_0 \in X$. Определим действие фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ на $p^{-1}(x_0)$. Для $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ и $y \in p^{-1}(x_0)$ положим

$$\alpha y = (\alpha)^y(0).$$

Можно сказать, что αy есть такой элемент $p^{-1}(x_0)$, что существует поднятие $\tilde{\alpha}$ пути α , для которого $\tilde{\alpha}(0) = \alpha y$ и $\tilde{\alpha}(1) = y$.

Напомним, ϵ_{x_0} является единицей группы $\pi_1(X, x_0)$. Проверим, что $\epsilon_{x_0} y = y$ для $y \in p^{-1}(x_0)$. Так как $(\epsilon_{x_0})^y = \epsilon_y$, то

$$\epsilon_{x_0} y = (\epsilon_{x_0})^y(0) = \epsilon_y(0) = y.$$

Проверим, что $(\alpha\beta)y = \alpha(\beta y)$ для $y \in p^{-1}(x_0)$ и $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$. Положим $z = \beta y = (\beta)^y(0)$. Из утверждения 15.6 вытекает, что $(\alpha\beta)^y = (\alpha)^z(\beta)^y$. Следовательно,

$$(\alpha\beta)y = (\alpha\beta)^y(0) = ((\alpha)^z(\beta)^y)(0) = (\alpha)^z(0) = \alpha z = \alpha(\beta y).$$

Действие группы G на множестве M называется *транзитивным*, если у действия единственная орбита. Другими словами, действие G на M транзитивно, если для любых $x, y \in M$ существует $g \in G$, такое что $gx = y$.

Предложение 15.7. Пусть X и E линейно связные пространства, $p : E \rightarrow X$ накрытие и $x_0 \in X$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ транзитивно действует на $p^{-1}(x_0)$.

Доказательство. Пусть $a, b \in p^{-1}(x_0)$. Так как E линейно связно, то существует путь ξ в E , для которого $\xi(0) = b$ и $\xi(1) = a$. Положим $\varphi = p \circ \xi$. Тогда ξ является поднятием пути φ . Положим $\alpha = [\varphi]_{\mathbb{D}}$ и $\tilde{\alpha} = [\xi]_{\mathbb{D}}$. Тогда $\tilde{\alpha}$ поднятие α , $\tilde{\alpha}(0) = b$, $\tilde{\alpha}(1) = a$ и $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, то есть $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$. Следовательно, $\tilde{\alpha} = (\alpha)_b = (\alpha)^a$. Получаем $\alpha a = (\alpha)^a(0) = \tilde{\alpha}(0) = b$. $\square$

15.2.2 Универсальное накрытие.

Отметим, связное локально линейно связное пространство линейно связно.

Теорема 15.8. Пусть X связное локально линейно связное пространство, $p : E \rightarrow X$ накрытие, $\pi : U \rightarrow X$ универсальное накрытие, пространство E связно. Пусть $x_0 \in X$, $e_0 \in E$, $u_0 \in U$ и $x_0 = p(e_0) = \pi(u_0)$. Существует единственное накрытие $\varphi : U \rightarrow E$, для которого $\pi = p \circ \varphi$.

Следствие 15.9. Если существует, универсальное накрытие единственно.

Теорема 15.10. Если X связное локально односвязное пространство, то универсальное накрытие X существует.

15.3 Задачи

Литература