

Теория игр в топологии

Е.А.Резниченко

Москва

1 Игры на пространстве Бэра

Пусть Y множество и $U \subset Y^\omega$. Для $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in Y^{<\omega}$ положим

$$U/\bar{x} = \{\bar{y} \in Y^\omega : \bar{x} \frown \bar{y} \in U\}.$$

Пусть $\bar{p} \in Y^{2n}$.

Определим булеву игру с нулевой суммой $G(Y, U; \bar{p})$ с двумя игроками α и β .

0-ой ход. Игрок α выбирает $y_0 \in Y$. Игрок β выбирает $y_1 \in Y$.

n-ый ход. Игрок α выбирает $y_{2n} \in Y$. Игрок β выбирает $y_{2n+1} \in Y$.

После счетного числа ходов игрок α выиграл если

$$\bar{p} \frown (y_n)_{n \in \omega} \in U.$$

Игру $G(Y, U; \bar{p})$ можно трактовать следующим образом: игроки сначала сделали n ходов \bar{p} , потом продолжили игру $G(Y, U)$.

Игра $G(Y, U; \bar{p})$ эквивалентна игре $G(Y/\bar{p}, U)$.

Пусть s есть стратегия для игрока $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ и $q = (q_0, \dots, q_{n-1}) \in Y^n$. Обозначим через $s * q$ частичную партию $p \in Y^{2n}$, которая получается после n ходов, когда игрок γ следует стратегии s а противник на k -ом ходу выбирает q_k .

Стратегию s для γ назовем *оборонительной* (defensive strategy) если

Обозначим

$$Y^{2, < \omega} = (Y^2)^{< \omega} = \bigcup_{n \in \omega} Y^{2n},$$

$$W_\alpha = \{\bar{p} \in Y^{2, < \omega} : \text{игра } G(Y, U; \bar{p}) \text{ } \alpha\text{-благоприятна}\},$$

$$W_\beta = \{\bar{p} \in Y^{2, < \omega} : \text{игра } G(Y, U; \bar{p}) \text{ } \beta\text{-благоприятна}\}.$$

Theorem 1.1.

Пусть U не более чем счетно. Тогда $G(Y, U)$ β -благоприятна.

Пусть $U = \{u_n : n \in \omega\}$, $u_n = (u_{n,0}, u_{n,1}, \dots)$.

Выигрышная стратегия для игрока заключается в следующем:
на n -ом ходу игрок β выбирает u_{2n+1} таким образом, что
 $u_{2n+1} \neq u_{n,2n+1}$.

Theorem 1.2.

Пусть $|U| < 2^\omega$. Тогда $G(Y, U)$ α -неблагоприятна.

Пусть s есть некоторая стратегия игрока α . Пусть $Q \subset Y^\omega$, которые смогут сыграть игроки когда α придерживается стратегии α . Тогда $|Q| = 2^\omega$. Пусть $y \in Q \setminus U$ и q есть такая стратегия β , что результат игры равен y . В этой партии игрок β стратегией q опроверг стратегию s игрока α .