

ПРОГРАММА КУРСА “ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ”.

Осенний семестр 2016/2017 учебного года. Лектор проф. К.Л.Козлов

1. Упорядочение, линейное упорядочение. Аксиома выбора. Лемма Куратовского–Цорна.
2. Декартово произведение семейства множеств.
3. Равномощность множеств. Неравномощность множества и семейства его подмножеств. Теорема Кантора–Бернштейна о равномощных множествах.
4. Канторово совершенное множество.
5. Топологические пространства. Сравнение топологий. Подпространство. База топологии. Предбаза топологии. Примеры топологий на прямой.
6. Метрические пространства. Топология метрического пространства.
7. Топология линейного порядка.
8. Замыкание, внутренность и граница подмножества. Точки прикосновения, внутренние, граничные и предельные точки подмножества.
9. Непрерывные отображения топологических пространств. Критерий непрерывности отображений. Правила построения непрерывных отображений. Непрерывные отображения метрических пространств.
10. Гомеоморфизм. Примеры гомеоморфных пространств.
11. Слабая (инициальная) топология относительно семейства отображений. Критерий инициальности топологии.
12. Тихоновская топология произведения. Произведение отображений, его непрерывность. Диагональное произведение отображений, его непрерывность.
13. Финальная топология относительно семейства отображений. Критерий финальности топологии.
14. Сумма пространств и суммы отображений. Их непрерывность.
15. Факторпространства и факторные отображения. Примеры.
16. Непрерывные функции. Непрерывность алгебраических операций. Функционально открытые и функционально замкнутые множества. Совпадение открытых и функционально открытых подмножеств метрического пространства.
17. Метризуемые пространства. Метризуемость суммы и счетного произведения метризуемых пространств.
18. Полные метрические пространства. Равномерная метрика на степенях метрического пространства. Топология равномерной сходимости. Полнота степеней полного метрического пространства. Подмножества ограниченных и непрерывных отображений.
19. Пополнение метрического пространства.
20. Аксиомы счетности. Сепарабельность. Сохранение аксиом счетности и сепарабельности произведениями. Равносильность сепарабельности выполнению второй аксиомы счетности для метризуемых пространств.

21. Аксиомы отделимости. Хаусдорфовость, регулярность, нормальность. Сохранение аксиом отделимости произведениями. Нормальность метризуемого пространства.
22. Лемма Урысона.
23. Метризациянная теорема Урысона.
24. Тихоновские пространства. Вложение тихоновского пространства в произведение отрезков. Пример тихоновского не нормального пространства.
25. Теорема Брауэра–Титце–Урысона о продолжении функций.
26. Компактные пространства. Нормальность хаусдорфова компактного пространства. Непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово пространство — гомеоморфизм.
27. Разбиение единицы. Топологические многообразия. Вложения компактных топологических многообразий в конечномерные евклидовы пространства.
28. Лемма Александера. Первая Теорема Тихонова о компактности произведения компактных пространств. Критерий компактности подмножеств $\mathbb{R}^n$.
29. Компактификация пространства. Стоун–Чеховская компактификация.
30. Локальная компактность. Критерий локальной компактности пространства. Одноточечная компактификация Александрова.
31. Метризуемые компактные пространства. Условия компактности метризуемых пространств.
32. Связность. Свойства связности.
33. Компонента связности. Квазикомпонента. Их совпадение в хаусдорфовых компактных пространствах.
34. Вполне несвязные пространства. Нульмерность. Совпадение свойств вполне несвязности и нульмерности хаусдорфовых компактных пространств.
35. Линейная связность. Свойства линейной связности. Пример связного не линейно связного пространства. Путь. Умножение путей. Петля.
36. Компактно-открытая топология на $C(X, Y)$. Ее связь с топологиями поточечной сходимости и равномерной сходимости.
37. Связь отображений $X \times Y \rightarrow Z$ и $X \rightarrow C(Y, Z)$.
38. Гомотопия непрерывного отображения. Гомотопические классы отображений. Связанные гомотопии.
39. Гомотопическая эквивалентность топологических пространств. Гомотопические типы пространств. Стягиваемые пространства.
40. Гомотопность путей. Фундаментальная группа.
41. Изоморфизм, порождаемый путем. Зависимость фундаментальной группы от отмеченной точки. Односвязность.
42. Индуцированный гомоморфизм. Гомотопическая инвариантность фундаментальной группы.

43. Накрытия. Поднятие отображения. Теорема о накрывающем пути. Теорема о накрывающей гомотопии.

44. Отображение поднятия. Фундаментальная группа окружности.