1. Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ — произвольное покрытие топологического пространства X (здесь I — любое индексное множество). Семейство непрерывных функций $\varphi_\beta \colon X \to [0,1]$, $\beta \in J$ (где J — индексное множество, возможно, отличное от I) называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\mathscr{U}$, если

(а) у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, в которой все функции φ_β, кроме конечного их числа, тождественно равны нулю;

(б) в каждой точке $x \in X$ выполнено равенство $\sum\limits_{\beta \in J} \varphi_\beta(x) = 1$.

Доказать, что для всякого открытого покрытия пространства X с первой аксиомой счетности существует подчиненное ему разбиение единицы.

2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X$ — его замкнутое подмножество и $f \colon A \to [0,1]$ — непрерывная функция. Построить в явном виде непрерывное продолжение функции f на X.

3. Пусть X — вполне регулярное пространство, $F \subset X$ — его компактное подмножество и $P \subset X$ — замкнутое множество, не пересекающееся с F. Доказать, что существует непрерывная ограниченная функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $f(F) = \{0\}$ и $f(P) = \{1\}$.

4. Всякое ли счетное хаусдорфово пространство нормально?

5. Докажите, что следующие утверждения о пространстве X равносильны:

(а) каждое подпространство пространства X нормально;

(б) каждое открытое подпространство пространства X нормально.

6. Докажите, что замкнутое подмножество F нормального пространства X имеет тип G_δ (т.е. является пересечением счетного числа открытых множеств) тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $F = f^{-1}(\{0\})$.

7. Докажите, что компактное подмножество K вполне регулярного пространства X имеет тип G_δ (т.е. является пересечением счетного числа открытых множеств) тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $K = f^{-1}(\{0\})$.

8. Для того, чтобы пространство X было компактно, необходимо и достаточно, чтобы из каждого покрытия этого пространства элементами некоторой фиксированной базы его топологии можно было выделить конечное подпокрытие.

9. Докажите, что пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждое бесконечное множество $Y \subset X$ имеет точку полного накопления; при этом $x \in Y$ называется точкой полного накопления для Y, если мощность пересечения любой открытой окрестности точки y в X с множеством Y равна мощности самого множества Y.

10. Докажите, что множество всех неубывающих отображений $f \colon [0,1] \to [0,1]$ с топологией, индуцированной из тихоновского произведения $[0,1]^{[0,1]}$, является неметризуемым сепарабельным компактом с первой аксиомой счетности.

11. Существует ли некомпактное нормальное пространство, всякая непрерывная функция на котором ограничена?

12. Существует ли некомпактное регулярное пространство X такое, что любая непрерывная биекция $X \to Y$ на любое хаусдорфово пространство Y — гомеоморфизм?

13. Докажите, что всякое компактное пространство имеет базу, мощность которой не превосходит мощности этого пространства.

14. Пусть $f_1\colon X_1 \to Y_1$ и $f_2\colon X_1 \to Y_1$ — факторные отображения топологических пространств. Обязано ли их произведение $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ быть факторным?

15. Пусть $f\colon X \to Y$ — факторное отображение и $\mathrm{id}\colon Z \to Z$ — тождественное отображение. Верно ли, что произведение $f \times \mathrm{id}\colon X \times Z \to Y \times Z$ всегда факторно?

16. Верно ли, что образ любого открытого (замкнутого) множества при всяком факторном отображении топологических пространств открыт (замкнут)? Верно ли, что если образ любого открытого (замкнутого) множества при некотором непрерывном отображении топологических пространств открыт (замкнут), то это отображение факторно?

17. Если X — хаусдорфово пространство и $\mathscr{Y}$ — семейство его подпространств, то пространство $Z = \bigcap\{Y : Y \in \mathscr{Y}\}$ с топологией, индуцированной из X, гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $\prod\{Y : Y \in \mathscr{Y}\}$.

18. Верно ли, что пространство компактно тогда и только тогда, когда любое его бесконечное подмножество имеет в нем предельную точку?

19. Докажите, что топологическое произведение $X = \prod\{D_\alpha : \alpha \in A\}$, где D_α — конечное дискретное пространство, состоящее более чем из одной точки, и A — произвольное бесконечное индексное множество, гомеоморфно тихоновскому произведению $\{0,1\}^A$.

20. Докажите, что любое семейство непустых попарно непересекающихся открытых множеств в тихоновском произведении произвольного семейства сепарабельных пространств не более чем счетно.

21. Докажите ограниченность всякой непрерывной функции на пространстве $[0,1]^A \setminus \{x\}$, где $[0,1]^A$ — тихоновское произведение обычных отрезков, $x \in [0,1]^A$ — любая точка и A несчетно.

22. Докажите, что всякая непрерывная функция на отрезке $[0,1]$ есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов.

23. Пусть X — топологическое пространство. Любое компактное пространство, содержащее X в качестве его всюду плотного пространства, называется компактификацией X. Докажите, что компактификация bX нормального пространства X является стоун-чеховской компактификацией βX этого пространства тогда и только тогда, когда замыкания в bX любых двух замкнутых в X непересекающихся множеств не пересекаются.

24. Пусть X — тихоновское пространство и Y — его замкнутое подпространство. Верно ли, что замыкание Y в стоун-чеховской компактификации βX пространства X является стоун-чеховской компактификацией βY пространства Y?

25. Пусть X — топологическое пространство. Любое компактное пространство, содержащее X в качестве его всюду плотного пространства, называется компактификацией X. Докажите, что если вполне регулярное пространство X является множеством типа G_δ (т.е. пересечением счетного числа открытых множеств) в некоторой своей хаусдорфовой компактификации, то оно является множеством типа G_δ в любой своей хаусдорфовой компактификации.

26. Пусть X — вполне регулярное пространство и βX — его стоун-чеховская компактификация. Докажите, что пространство $\beta X \setminus X$ не удовлетворяет первой аксиоме счетности ни в одной своей точке.

27. Верно ли, что вполне регулярные пространства гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их стоун-чеховской компактификации?

28. Докажите, что вполне регулярные пространства с первой аксиомой счетности гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их стоун-чеховские компактификации.

29. Пусть $\mathbb{N}$ — бесконечное счетное дискретное пространство и βN — его стоун-чеховская компактификация. Докажите, что никакое счетное бесконечное множество, лежащее в $\beta N \setminus N$, не замкнуто в βN.

30. Пусть $\mathbb{N}$ — бесконечное счетное дискретное пространство и βN — его стоун-чеховская компактификация. Докажите, что $\beta N \setminus N$ не сепарабельно.

31. Пусть $\mathbb{N}$ — бесконечное счетное дискретное пространство и βN — его стоун-чеховская компактификация. Докажите, что в $\beta N \setminus N$ найдется несчетное семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств.

32. Пусть X — топологическое пространство. Любое компактное пространство, содержащее X в качестве его всюду плотного пространства, называется компактификацией X. Докажите, что метрическое пространство метризуемо полной метрикой тогда и только тогда, когда оно является множеством типа G_δ (т.е. пересечением счетного числа открытых множеств) в некоторой своей компактификации.

33. Верно ли, что из любого открытого покрытия нормального пространства можно выделить счетное подпокрытие?

34. Докажите, что всякое хаусдорфово локально компактное пространство можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на некоторый хаусдорфов компакт.

35. Отображение топологических пространств называется *открытым*, если образ всякого открытого множества при этом отображении открыт. Докажите, что T_1-пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности тогда и только тогда, когда оно является образом некоторого метрического пространства при непрерывном открытом отображении.

36. Отображение топологических пространств называется *открытым*, если образ всякого открытого множества при этом отображении открыт. Верно ли, что любой хаусдорфов компакт, являющийся образом метрического пространства при непрерывном открытом отображении, метризуем?

37. Отображение топологических пространств называется *открытым*, если образ всякого открытого множества при этом отображении открыт. Докажите, что любой хаусдорфов компакт, являющийся образом полного метрического пространства при непрерывном открытом отображении, метризуем.

38. Отображение топологических пространств называется *открытым*, если образ всякого открытого множества при этом отображении открыт. Верно ли, что если $f\colon X \to Y$ — непрерывное открытое отображение такое, что прообраз каждой точки компактен, и пространство Y компактно, то X тоже компактно?

39. Непрерывное отображение $f\colon X \to X$ называется *ретракцией*, если сужение f на $Y = f(X)$ — тождественное отображение Y на себя. При этом Y называется *ретрактом* пространства X. Докажите, что

(a) любой ретракт хаусдорфова пространства замкнут;

(б) $f\colon X \to X$ — ретракция тогда и только тогда, когда f непрерывно и $f \circ f = f$.

40. Приведите пример счетного T_1-пространства, не содержащего нетривиальных сходящихся последовательностей.