

11*. Докажите, что счетное нормальное пространство несвязно. Оцените снизу мощность бесконечного нормального связного пространства. Существует ли счетное хаусдорфово связное пространство?

13. Какие из следующих пространств

$$\mathbb{N} \times [0, 1), [0, 1) \times \mathbb{N}, [0, 1) \times [0, 1], [0, 1] \times [0, 1)$$

с топологиями, порожденными лексикографическим порядком на произведениях, будут связными (соответственно линейно связными)?

14*. Доказать связность пространств $\mathbb{R}^n$, сфер S^n и замкнутых шаров B^n , $n \in \mathbb{N}$.

17*. Найти компоненты связности (соответственно линейной связности) следующих подпространств вещественных матриц:

(a) $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\};$

(b) $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\};$

(c) $\text{Symm}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A\}?$

18*. Доказать, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в ящичной топологии несвязно. Будет ли $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ связно в топологии равномерной сходимости?

26. Доказать, что пространство *веер Кнастера-Кураатовского* $\mathcal{K}$ (Пример 37.4 Лекции 14) связно, подпространство $\mathcal{K} \setminus \{a\}$ является вполне несвязным, но не нульмерным пространством.

27. Доказать, что множество точек гильбертова пространства ℓ^2 все координаты которых рациональны вполне несвязно, но не нульмерно.

28*. Докажите, что факторпространство хаусдорфова компактного пространства по его разбиению на компоненты связности является нульмерным хаусдорфовым компактным пространством.

29. Докажите, что любой нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек гомеоморфен канторову множеству.

Задание N 15

7*. Докажите, что если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то $\pi(X, Y)$ — компонентны линейной связности пространства $C(X, Y)$ в компактно-открытой топологии.

15. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) плоскости с двумя выкинутыми точками и букета двух окружностей $S^1 \vee S^1$;

(2) тора T^2 с вырезанным диском D^2 (т.е. ручки) и букета двух окружностей $S^1 \vee S^1$;

(3) сферы S^2 с отождествленной парой точек и букета сферы и окружности $S^2 \vee S^1$;

(4) тора T^2 с замкнутыми дисками B^2 , приклеенными по границе с меридианом и по границе с параллелью, и сферы S^2 ;

(5) пространства невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ и ортогональных матриц $O(n)$.

25. Докажите, что произведение $X \times Y$ пространств X и Y стягиваемо в том и только том случае, если пространства X и Y стягиваемы. Верен ли аналогичный результат для счетного (произвольного) числа сомножителей?