23 (*Критерий компактности в ℓ^2*). Подмножество X в ℓ^2 компактно в том и только том случае, если оно замкнуто, ограничено и выполнено условие

$$\lim_{N\to\infty}(\sup_{\mathbf{x}\in X}\sum_{n=N}^{\infty}|x_n|^2)=0.$$

Доказать, что подмножество $\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^2:\sum_{n=1}^{\infty}|a_nx_n|^2\le 1\}$, где $a_n>0$, $a_n\to+\infty$ компактно.

Задание N 13

5*. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в топологии равномерной сходимости не удовлетворяет второй аксиоме счетности и не сепарабельно.

12. (*Теорема Асколи для отображений в* $\mathbb{R}$) Пусть K — метризуемое компактное пространство, $C(K)$ с топологией равномерной сходимости. Докажите, что подмножество $\mathcal{F}\subset C(K)$ компактно в том и только том случае, когда оно замкнуто, равностепенно непрерывно и ограничено.

Сформулируйте и докажите теорему Асколи для хаусдорфова локально компактного пространства X и компактно-открытой топологии на $C(K)$.

13. (*Теорема Арцела для отображений в* $\mathbb{R}$) Пусть K — метризуемое компактное пространство, $C(K)$ с топологией равномерной сходимости, $f_n\in C(K)$, $n\in\mathbb{N}$. Если последовательность (f_n) является равностепенно непрерывным семейством и для любой точки $x\in K$ множество $\{f_n(x):n\in\mathbb{N}\}$ ограничено, то у последовательность (f_n) есть сходящаяся подпоследовательность.

14. Пусть последовательность функций $f_n\in C(X,\mathbb{R})$ сходится в топологии поточечной сходимости к функции f. Докажите, что если семейство f_n, $n\in\mathbb{N}$, равностепенно непрерывно, то f непрерывно, и f_n сходится к f в компактно-открытой топологии.

15. Докажите, что если $f\in C(X\times Y,Z)$, то $F:X\to C(Y,Z)$ (см. пункт 35.5 Лекции 13) непрерывно, где множество отображений $C(Y,Z)$ с топологией поточечной сходимости. Привести пример, когда отображение $f\in C(X\times Y,Z)$, определяемое непрерывным отображением $F:X\to C(Y,Z)$, где множество отображений $C(Y,Z)$ с топологией поточечной сходимости, не является непрерывным.

16. Докажите, что если отображение $F:X\to C(Y,Z)$, где множество отображений $C(Y,Z)$ с топологией равномерной сходимости, непрерывно, то отображение $f\in C(X\times Y,Z)$ (см. пункт 35.5 Лекции 13) непрерывно. Привести пример, когда отображение $F:X\to C(Y,Z)$, определяемое непрерывным отображением $f\in C(X\times Y,Z)$, где множество отображений $C(Y,Z)$ с топологией равномерной сходимости, не является непрерывным.

17. Докажите, что отображение
$\Lambda:C(X\times Y,Z)\to C\big(X,C(Y,Z)\big)$,
пространств отображений в компактно-открытых топологиях, определяемое условием $\Lambda(f)=F$ (см. пункт 35.5 Лекции 13), непрерывно для любых X,Y,Z. Если же Y хаусдорфово и локально компактно, то это отображение является гомеоморфизмом.

18. Докажите, что отображение
$\circ:C(X,Y)\times C(Y,Z)\to C(X,Z)$, $\circ(f,g)=g\circ f$
пространств отображений в компактно-открытых топологиях, непрерывно.

19. Установить единственность пополнения метрического пространства (с точностью до изометрий).

20. Найти пополнение $\mathbb{R}$ с метриками $\rho_\star:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$
a) $\rho_1(x,y)=|\exp^x-\exp^y|$;
b) $\rho_2(x,y)=|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}y|$.

21. Найти пополнения рациональных и иррациональных чисел с обычной метрикой.

22. Существует ли метрика на пространстве рациональных (иррациональных) чисел, пополнением по которой является евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, тихоновское произведение $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

23. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ не изометрично $\mathbb{R}^m$ (с евклидовыми метриками) при $n,m\in\mathbb{N}$, $n\ne m$.

24. Доказать, что для любого $n\in\mathbb{N}$ пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) может быть изометрично вложено в ℓ^2.

25. Для всякой ли изометрии f пространства ℓ^2 существует неподвижная точка отображения f?

Задание N 14

5*. Верно ли, что пересечение связных множеств связно? Будет ли счетное пересечение связных множеств A_n таких, что $A_1\supset A_2\supset\dots$ связно?

6*. Докажите, что счетное пересечение связных компактных подмножеств хаусдорфова пространства A_n таких, что $A_1\supset A_2\supset\dots$ связно.

7*. Будет ли внутренность связного (соответственно линейно связного) множества связна? Будет ли граница связного (соответственно линейно связного) множества связна? Будет ли множество связно (соответственно линейно связно), если его граница связна (соответственно линейно связна)?