Задание N 11

2^*. Докажите, что любое отображение $f : X \to Y$ тихоновского пространства X в компактное пространство Y продолжается до отображения его Стоун-Чеховской компактификации βX.

Установить единственность (с точностью до эквивалентности) Стоун-Чеховской компактификации βX тихоновского пространства X.

3. Для компактификаций (Y_1, i_1) и (Y_2, i_2) считаем $Y_1 \leq Y_2$, если существует отображение $f : Y_2 \to Y_1$ такое, что $f \circ i_2 = i_1$. Доказать, что $f(Y_2 \setminus i_2(X)) = (Y_1 \setminus i_2(X))$.

Доказать, что $\leq$ — упорядочение на множестве компактификаций, для которой βX — наибольший элемент. Если пространство X локально компактно, то αX — наименьший элемент.

4. (*Вторая Теорема Тихонова*). *Весом топологического пространства* называется наименьшая из мощностей его баз. Доказать, что тихоновское пространство X имеет компактификацию bX, вес которой равен весу X.

10^*. Доказать, что гомеоморфизм тихоновских пространств, продолжается до гомеоморфизма их Стоун-Чеховских компактификаций.

Доказать, что гомеоморфизм хаусдорфовых локально компактных пространств, продолжается до гомеоморфизма их одноточечных компактификаций Александрова.

12. Доказать, что множество $T(\omega_1)$ счетных трансфинитов (Пример 5.6 Лекции 1) является локально компактным, не компактным хаусдорфовым пространством.

Доказать, что $\beta T(\omega_1) = T(\omega_1) \cup \{\omega_1\} = T$.

14. *n-Мерным топологическим многообразием* называется хаусдорфово пространство X со счетной базой, для любой точки x которого существует окрестность, гомеоморфная открытому подмножеству евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Доказать, что n-мерное компактное топологическое многообразие X вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Задание N 12

1^*. Докажите, что любое некомпактное метризуемое пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подпространство.

2^*. Докажите, что на любом некомпактном метризуемом пространстве X существует непрерывная функция $f : X \to (0, 1]$, для которой $\inf\{f(x) : x \in X\} = 0$.

3^* (*Теорема Лебега о покрытиях*). Доказать, что для любого открытого покрытия Ω метрического компакта X существует $\epsilon > 0$ такое, что покрытие X из открытых шаров радиуса ϵ вписано в покрытие Ω. Можно ли условие компактности метрического пространства заменить условием рассмотрения конечных покрытий?

9^*. Докажите, что пространство ℓ^2 полно.

10^*. Докажите, что метрическое пространство (X, ρ) полно в том и только том случае, если любая убывающая последовательность непустых замкнутых подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ пространства X таких, что $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$, имеет непустое пересечение.

13. Доказать, что на счетном произведении полных метрических пространств существует полная метрика.

14. Доказать, что пространство иррациональных чисел метризуемо полной метрикой.

15^*. Доказать, что пространство рациональных чисел не метризуемо полной метрикой.

16. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $Y \subset X$. Докажите, что Y метризуемо полной метрикой в том и только том случае, если Y является *G_δ-подмножеством* X (т.е. Y является пересечением счетного числа открытых в X множеств).

17^*. (*Принцип сжимающих отображений Банаха.*) Отображение $f : X \to X$ метрического пространства называется *сжимающим*, если существует $0 \leq \alpha < 1$ такое, что $\rho(f(x), f(y))) < \alpha\rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.
Доказать, что любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет неподвижную точку (т.е. точку, отображающуюся в себя).

18^*. Доказать, что не более чем счетное пересечение открытых всюду плотных множеств полного метрического пространства всюду плотно.

19. Покажите, что любой метризуемый компакт является непрерывным образом канторова множества (т.е. является *диадическим компактом*).

20. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве вполне ограничена, то пространство компактно.

21. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве полна, то пространство компактно.

22^*. Доказать, что подмножество Y метрического пространства (X, ρ) вполне ограничено в том и только том случае, если из любой бесконечной последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.