18*. Проверьте верность утверждений:

(a) непрерывный образ всюду плотного множества всюду плотен в образе;

(b) непрерывный образ нигде не плотного множества нигде не плотен в образе.

20. Привести пример T_1-пространства и последовательность точек в нем, имеющей ровно n пределов, где $n \in \mathbb{N}$ или бесконечно.

28. Докажите, что любое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально. Докажите, что любое счетное регулярное пространство нормально.

29. Докажите, что линейно упорядоченное пространство с интервальной топологией нормально.

33*. *Лемма об ужатии.* Пусть $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие нормального пространства X. Доказать, что существует такое открытое покрытие $v = \{V_1, \dots, V_k\}$ пространства X, что $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i,\ i = 1, \dots, k$.

Задание N 8

9. Можно ли в теореме Брауэра–Титце–Урысона рассматривать продолжения отображений в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, в сферы S^n, $n \geq 1$?

Задание N 9

1. Доказать, что тихоновское произведение $\mathbb{R}^A$, где A несчетно, — не нормальное пространство.

3* (Плоскость Немыцкого). Базу топологии на полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ образуют открытые шары

$$O_\varepsilon(x, y) \cap \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0,\ \varepsilon > 0,$$

и открытые шары с добавленной точкой касания

$$O_y(x, y) \cup \{(x, 0)\},\ x \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Доказать, что плоскость Немыцкого — тихоновское не нормальное пространство.

8. Докажите, что любое подпространство тихоновского произведения $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, содержащее подмножество точек, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля, не нормируемо.

9*. Докажите, что топология ℓ^2 сильнее топологии на ℓ^2 как на подпространстве тихоновского произведения $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

11. Докажите, что любое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.

Задание N 10

2. Пусть X — линейно упорядоченное пространство. Докажите, что любой отрезок X компактен в том и только том случае, если любое ограниченное подмножество X имеет точную верхнюю грань в X.

3*. Докажите, что лексикографически упорядоченный квадрат (Задача 24 Задания 3) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, и не сепарабелен.

4*. Докажите, что подмножество $(0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1) \times \{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство "Две стрелки Александрова") компактно, и не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

10* *"Лемма о трубке".* Пусть в произведении $X \times Y$ сомножитель Y компактен. Доказать, что для любой окрестности O "слоя" $\{x\} \times Y$, где x произвольная точка X, существует окрестность Ox точки x такая, что $Ox \times Y \subset O$.
Привести пример, показывающий, что требование компактности сомножителя Y существенно.

11*. Докажите, что отображение $f : X \to Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.

12*. Пусть X — хаусдорфово пространство, K_α, $\alpha \in A$, — семейство компактных подмножеств X, U — окрестность $\bigcap\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Тогда существует конечное подмножество $A_{Fin} \subset A$ такое, что $\bigcap\{K_\alpha : \alpha \in A_{Fin}\} \subset U$.

13*. Докажите, что в хаусдорфовом компактном пространстве объединение счетного числа замкнутых подмножеств, внутренность которых пуста, имеет пустую внутренность.

14. Докажите, что непустое хаудорфово компактное пространство без изолированных точек несчетно.

16*. Привести пример метрического пространства (с неограниченной метрикой) и его замкнутого, ограниченного, не компактного подмножества.

17*. Докажите, что для любых компактных подмножеств A и B метрического пространства (X, ρ) существуют точки $a \in A$, $b \in B$ такие, что $\rho(a, b) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$.

18. Докажите, что любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны (задают одну и ту же топологию).