

Задачи-1

1. Докажите, что для любых множеств X и Y

$$X \cap \left(\bigcup_{Z \in Y} Z \right) = \bigcup_{Z \in Y} (X \cap Z) \quad \text{и} \quad X \cup \left(\bigcap_{Z \in Y} Z \right) = \bigcap_{Z \in Y} (X \cup Z).$$

2. Проверьте, какие из следующих дистрибутивностей верны:

- а) $(X \Delta Y) \cap Z = (X \cap Z) \Delta (Y \cap Z)$;
- б) $(X \Delta Y) \cup Z = (X \cup Z) \Delta (Y \cup Z)$;
- в) $(X \cap Y) \Delta Z = (X \Delta Z) \cap (Y \Delta Z)$;
- г) $(X \cup Y) \Delta Z = (X \Delta Z) \cup (Y \Delta Z)$.

3. Докажите, что для любых множеств X и Y выполнены законы де Моргана:

$$X \setminus \left(\bigcup_{Z \in Y} Z \right) = \bigcap_{Z \in Y} (X \setminus Z) \quad \text{и} \quad X \setminus \bigcap_{Z \in Y} Z = \bigcup_{Z \in Y} (X \setminus Z).$$

4. Проверьте, что для любых множеств $X_1 \subset X_2 \subset X$ и $Y_1 \subset Y_2 \subset Y$ и любого отображения $f: X \rightarrow Y$

$$\begin{aligned} f(X_1) &\subset f(X_2) & \text{и} & & f^{-1}(Y_1) &\subset f^{-1}(Y_2); \\ f(X_1 \cap X_2) &\subset f(X_1) \cap f(X_2) & \text{и} & & f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2); \\ f(X_1 \cup X_2) &= f(X_1) \cup f(X_2) & \text{и} & & f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2); \\ f(X_2 \setminus X_1) &\supset f(X_2) \setminus f(X_1) & \text{и} & & f^{-1}(Y_2 \setminus Y_1) &= f^{-1}(Y_2) \setminus f^{-1}(Y_1); \\ f(X_1 \Delta X_2) &\supset f(X_1) \Delta f(X_2) & \text{и} & & f^{-1}(Y_1 \Delta Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \Delta f^{-1}(Y_2); \\ f^{-1}(f(X_1)) &\supset X_1 & \text{и} & & f(f^{-1}(Y_1)) &= Y_1 \cap f(X). \end{aligned}$$

Как изменятся эти формулы для инъективных, сюръективных и биективных отображений?

- 5. а) Всякий ли максимальный (минимальный) элемент в упорядоченном множестве является наибольшим (наименьшим)? Всякий ли наибольший элемент является максимальным?
- б) Может ли упорядоченное множество иметь несколько максимальных элементов? несколько наибольших элементов? не иметь ни максимальных, ни наибольших элементов?
- в) Верно ли, что если упорядоченное множество имеет единственный максимальный элемент, то этот элемент наибольший?

6. Пусть κ и λ — кардиналы, X и Y — непересекающиеся множества, $|X| = \kappa$ и $|Y| = \lambda$. Напомним, что *сумма* $\kappa + \lambda$ кардиналов κ и λ определяется как мощность множества $X \cup Y$, их *произведение* $\kappa \cdot \lambda$ — как мощность множества $X \times Y$, а λ -я *степень* κ^λ кардинала κ определяется как мощность множества $X^Y = \{f: Y \rightarrow X\}$. (Заметьте, что для каждого множества A существует ровно одно отображение $f: \emptyset \rightarrow A$ с пустой областью определения (это пустое множество), так что $\kappa^0 = 1$ для любого кардинала κ ; заметьте также, что степень 0^κ не определена для $\kappa \neq 0$.) Проверьте следующие свойства этих операций (ниже κ , λ и μ — кардиналы):

а) ассоциативность сложения и умножения:

$$(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu), \quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu);$$

б) коммутативность сложения и умножения:

$$\kappa + \lambda = \lambda + \kappa, \quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa;$$

в) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu;$$

г) монотонность:

если $\kappa \leq \lambda$, то $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$, $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$ и $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$;

если $1 \leq \kappa$ и $\lambda \leq \mu$, то¹⁾ $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$;

д) если κ бесконечен, то $\kappa \cdot \kappa = \kappa$;

е) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они отличны от нуля, то

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\};$$

ё) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$, $\kappa^{\lambda \cdot \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$;

ж) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa \geq 2$ и $\lambda \geq 1$, то

$$\max\{\kappa, 2^\lambda\} \leq \kappa^\lambda \leq \max\{2^\kappa, 2^\lambda\};$$

в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda = \kappa^\lambda$ для любого $\kappa \leq 2^\lambda$, $\kappa \geq 2$.

7. Докажите *теорему Кёнига*: если A — произвольное множество и для каждого $\alpha \in A$ X_α и Y_α — множества, удовлетворяющие условию $|X_\alpha| < |Y_\alpha|$, то

$$\left| \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right| < \left| \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \right|.$$

Заметьте, что из этой теоремы немедленно вытекает теорема Кантора: $\kappa < 2^\kappa$ для любого кардинала κ .

¹⁾ Предупреждение: обратное неверно — существует модель ZFC, в которой $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

8. Покажите, что если X — произвольное бесконечное множество, A — произвольное множество мощности $|A| \leq |X|$ и для каждого $\alpha \in A$ X_α — множество мощности $|X_\alpha| \leq |X|$, то $\left| \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right| \leq |X|$. Останется ли это утверждение верным, если всюду заменить знак « $\leq$ » на « $<$ »?
9. а) Докажите, что любое бесконечное множество X равномощно множеству $[X]^{<\aleph_0}$ всех его конечных подмножеств.
- б) Покажите, что для любого бесконечного множества X и любого кардинала $\kappa \leq |X|$ множество $[X]^\kappa$ всех подмножеств X мощности κ равномощно множеству X^κ .
- в) Верно ли, что любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?
- г) Верно ли, что в предположении справедливости континуум-гипотезы любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?

Задачи-2

1. Проверьте, что пары (X, d) являются метрическими пространствами:

- X — любое векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $d(x, y) = \|x - y\|$;
- X — любое векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$;
- $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — инъективная функция.

2. а) Покажите, что любая метрика d на любом множестве X эквивалентна метрике, ограниченной единицей, т.е. метрике $\tilde{d}$ с тем свойством, что $\tilde{d}(x, y) \leq 1$ для любых $x, y \in X$.

б) Две метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X называются *липшицево эквивалентными*, если существуют такие положительные числа c и C , что $c \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C \cdot d_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Приведите пример эквивалентных, но не липшицево эквивалентных метрик.

в) Покажите, что две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на векторном пространстве V эквивалентны (т.е. определяемые ими метрики $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ и $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ эквивалентны) тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа c и C , что $c \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1$ для любого $x \in V$.

3. а) Покажите, что функции $\rho_1, \rho_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определённые правилами $\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i \leq n} |x_i - y_i|$ и $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \leq n} |x_i - y_i|$ для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, являются метриками на $\mathbb{R}^n$. Эквивалентны ли эти метрики друг другу и евклидовой метрике $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i \leq n} (x_i - y_i)^2}$ на $\mathbb{R}^n$? Нарисуйте шары относительно этих метрик для случая $n = 2$.

б) Эквивалентны ли метрики на множестве числовых последовательностей $\{\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 < \infty\}$, порождённые нормами $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$?

в) Покажите, что формулы

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \quad \text{и} \quad d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt}$$

определяют неэквивалентные метрики на пространстве $C([0, 1])$ непрерывных функций на отрезке. Сравнимы ли порождаемые ими топологии?

4. Пусть $\mathbb{P}^n$ — n -мерное проективное пространство (его точками служат все проходящие через $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+1 \text{ раз}}$ прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$). Проверьте, что величину угла между прямыми можно принять за расстояние между ними в $\mathbb{P}^n$, т.е. функция $d_n: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определённая правилом $d_n(l_1, l_2) = \widehat{(l_1, l_2)}$ для $l_1, l_2 \in \mathbb{P}^n$, является метрикой на $\mathbb{P}^n$.

5. Могут ли в метрическом пространстве существовать два таких несовпадающих шара разных радиусов, что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса?

6. Проверьте, что дискретная метрика неархимедова. Покажите, что в ультраметрическом пространстве

- любая точка любого шара является центром этого шара;
- если два шара пересекаются, то один из них целиком содержится в другом;
- всякий шар одновременно и открыт, и замкнут;
- все сферы (множества вида $\{x : d(x, x_0) = \varepsilon\}$) открыты;
- все треугольники равнобедренны.

Может ли шар меньшего радиуса содержать шар большего радиуса в ультраметрическом пространстве?

7. а) Проверьте, что для всякого нормирования $\|\cdot\|$ любого поля F функция $d: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$, определённая правилом $d(x, y) = \|x - y\|$, является метрикой.

б) Покажите, что p -адическая норма $|\cdot|_p$ является нормированием, и что порождаемая ею метрика d_p неархимедова.

в) Эквивалентна ли метрика d_p обычной метрике $d(x, y) = |x - y|$ на $\mathbb{Q}$? метрикам $d_{p'}$ для простых чисел $p' \neq p$?

8. Пусть X — множество, d — метрика на нём, a — любое положительное число, $\mathbf{a}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, тождественно равная a , и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — не равная тождественно нулю функция со свойствами $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ и $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Проверьте, что $a \cdot d$, $\min\{d, a\}$, $f \circ d$ и $\frac{d}{1+d}$ тоже метрики. Эквивалентны ли они друг другу и метрике d ?

9. Пусть X — множество и d_1 и d_2 — две метрики на нём. Какие из функций $\max\{d_1, d_2\}$, $\min\{d_1, d_2\}$, $d_1 + d_2$, $d_1 \cdot d_2$ и $\frac{d_1}{d_2}$ тоже являются метриками? (В последнем случае полагаем $\frac{d_1}{d_2}(x, x) = 0$ для $x \in X$.)

10. Покажите, что топологическое пространство дискретно тогда и только тогда, когда оно имеет базу, состоящую из одноточечных множеств.

11. Покажите, что на любом множестве, содержащем хотя бы две точки, существуют несравнимые топологии.

12. Докажите, что если топологическое пространство обладает счётной базой, то любая его база содержит не более чем счётное подсемейство, являющееся базой. Верно ли аналогичное утверждение для локальных

баз? предбаз? Заметьте, что решение этой задачи переносится без изменений на базы и предбазы любой бесконечной мощности κ .

13. а) Приведите пример метризуемого пространства, не удовлетворяющего второй аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?
 б) Приведите пример топологического пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

14. Симметрикой (квазиметрикой) на множестве X называется функция $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$\textcircled{1} \rho(x, y) \geq 0,$$

$$\textcircled{2} \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ и}$$

$$\textcircled{3} \rho(x, y) = \rho(y, x) \text{ (соответственно } \textcircled{3} \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)) \text{ для всех } x, y, z \in X$$

(симметрика отличается от метрики отсутствием требования выполнения неравенства треугольника, а квазиметрика — отсутствием симметричности). Подобно метрике, каждая симметрика (квазиметрика) ρ порождает топологию $(X, \mathcal{T}_\rho)$ на множестве X , в которой открытыми являются в точности те множества, которые содержат каждую свою точку x вместе с некоторым «шаром» $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ (заметьте, что сами шары не обязаны быть открытыми!). Топологическое пространство, топология которого порождается некоторой симметрикой (квазиметрикой), называется *симметризуемым* (квазисимметризуемым).

- а) Рассмотрите симметрику ρ на множестве $X = \{0\} \cup \left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \right) \times \mathbb{N}$, определённую правилом

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = 0 \text{ и } y = (0, n) \text{ или } y = 0 \text{ и } x = (0, n), \\ \frac{1}{k}, & \text{если } x = (0, n) \text{ и } y = \left(\frac{1}{k}, n\right) \text{ или } y = (0, n) \text{ и } x = \left(\frac{1}{k}, n\right), \\ 1 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажите, что симметризуемое пространство $(X, \mathcal{T}_\rho)$ не удовлетворяет первой аксиоме счётности.

- б) Покажите, что шары $B(x, \varepsilon)$ в квазисимметризуемом пространстве открыты. Выведите отсюда, что квазисимметризуемое пространство всегда удовлетворяет первой аксиоме счётности. Придумайте порождающую топологию квазисимметрику на плоскости Немыцкого.

15. Покажите, что топология, порождённая лексикографическим порядком на плоскости $\mathbb{R}^2$, строго сильнее евклидовой топологии.

16. Докажите, что евклидова топология на плоскости не порождается никаким линейным порядком.

17. Опишите индуцированную из плоскости Немыцкого L топологию на граничной прямой l .

18. Сравните следующие топологии на замкнутой верхней полуплоскости:

- а) топология, индуцированная из евклидовой плоскости;
 б) топология плоскости Немыцкого;
 в) топология, индуцированная из плоскости с топологией лексикографического порядка;
 г) топология, индуцированная из плоскости с топологией колексикографического порядка;
 д) топология, порождённая лексикографическим порядком на верхней полуплоскости;
 е) топология, порождённая колексикографическим порядком на верхней полуплоскости.

Задачи-3

1. Покажите, что если X — метризуемое топологическое пространство и d — любая метрика, порождающая топологию X , то точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда $d(x, A) = 0$, так что $\overline{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$. Выведите отсюда, что замыкание $\overline{B_d(x, \varepsilon)}$ в пространстве X всякого открытого шара относительно любой метрики d , порождающей топологию X , содержится в замкнутом шаре $\overline{B_d(x, \varepsilon)}$ того же радиуса с тем же центром относительно той же метрики. Верно ли, что всегда $\overline{B_d(x, \varepsilon)} = B_d(x, \varepsilon)$?

2. Проверьте, что оператор Fr взятия границы множества в топологическом пространстве X обладает следующими свойствами:

- а) $\text{Int } A = A \setminus \text{Fr } A$;
- б) $\overline{A} = A \cup \text{Fr } A$;
- в) $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$;
- г) $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$;
- д) $\text{Fr}(X \setminus A) = \text{Fr } A$;
- е) $X = \text{Int } A \cup \text{Fr } A \cup \text{Int}(X \setminus A)$;
- ё) $\text{Fr } \overline{A} \subset \text{Fr } A$;
- ж) $\text{Fr } \text{Int } A \subset \text{Fr } A$;
- з) A открыто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus A$;
- и) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A = A \setminus \text{Int } A$;
- к) A открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A = \emptyset$.

Верно ли, что если $A \subset B$, то $\text{Fr } A \subset \text{Fr } B$? В частности, верно ли, что $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr } A \cap \text{Fr } B$?

3. Покажите, что для топологического пространства X следующие условия равносильны:

- а) X дискретно;
- б) все точки пространства X изолированы;
- в) все подпространства пространства X дискретны;
- г) все подпространства пространства X замкнуты.

4. Пусть κ — произвольный бесконечный кардинал.

- а) Приведите пример недискретного топологического пространства, в котором все подпространства мощности, не превосходящей κ , дискретны.
- б) Покажите, что в топологическом пространстве все подпространства мощности, не превосходящей κ , дискретны тогда и только тогда, когда все подпространства мощности, не превосходящей κ , замкнуты.

5. Укажите подмножества A и B вещественной прямой с обычной топологией, для которых (а) $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$; (б) $\text{Int } A \cup \text{Int } B \neq \text{Int}(A \cup B)$. Может ли одно из этих множеств быть замкнутым? открытым?

6. Для каких множеств внутренность совпадает с замыканием? Опишите все такие подмножества прямой $\mathbb{R}$.

- 7. а) Покажите, что каждая последовательность имеет поднаправленность, которая не является подпоследовательностью.
- б) Верно ли, что точка топологического пространства является предельной точкой последовательности в этом пространстве тогда и только тогда, когда к ней сходится некоторая подпоследовательность данной последовательности?
- в) Покажите, что если последовательность сходится к некоторой точке, то и всякая подпоследовательность этой последовательности сходится к той же точке.

8. Топологическое пространство X называется *пространством Фреше–Урысона*, если к любой точке прикосновения x любого множества $A \subset X$ сходится некоторая последовательность точек множества A (иными словами, если точка $x \notin A$ предельна для множества A тогда и только тогда, когда к x сходится некоторая последовательность точек множества A).

- а) Заметьте, что каждое пространство с первой аксиомой счётности является пространством Фреше–Урысона.
- б) Приведите пример бесконечного недискретного топологического пространства, в котором все сходящиеся последовательности тривиальны. Может ли такое пространство удовлетворять первой аксиоме счётности? быть счётным?

9. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Говорят, что Y — множество *типа G_δ* или *G_δ -множество* в X , если Y является пересечением счётного числа открытых в X множеств. Вместо «одноточечное множество типа G_δ » говорят «точка типа G_δ ».

- а) Заметьте, что в метризуемом пространстве все замкнутые множества имеют тип G_δ .
- б) Является ли множество всех рациональных чисел G_δ -подмножеством вещественной прямой с обычной топологией? Является ли таковым множество всех иррациональных чисел?
- в) Заметьте, что в пространстве с первой аксиомой счётности все точки имеют тип G_δ . Верно ли, что в пространстве с первой аксиомой счётности все замкнутые множества имеют тип G_δ ?

г) Приведите пример топологического пространства, в котором нет нетривиальных сходящихся последовательностей, однако все точки имеют тип G_δ .

10. Вещественная прямая с топологией, порождённой базой $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, называется *прямой Зоргенфрея* и обычно обозначается S . Подпространство $[0, 1) \subset S$ прямой Зоргенфрея называется *стрелкой Зоргенфрея*, а топология прямой Зоргенфрея называется *топологией стрелки*. Докажите, что прямая (и стрелка) Зоргенфрея

- удовлетворяет первой аксиоме счётности;
- не удовлетворяет второй аксиоме счётности;
- наследственно сепарабельна, т.е. любое её подпространство сепарабельно;
- неметризуема.

11. Пусть $W_1^0 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов с порядковой топологией и $W_1 = W_1^0 \cup \{\omega_1\} = \{\alpha : \alpha \leq \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, тоже с порядковой топологией. Заметьте, что W_1^0 является открытым плотным подпространством пространства W_1 . Покажите, что W_1^0 — несепарабельное пространство с первой аксиомой счётности, каждая точка в нём имеет тип G_δ и к каждой его неизолированной точке сходится нетривиальная последовательность. (Заметьте, что отсюда вытекает, что всякий не имеющий непосредственного предшественника счётный ординал α является пределом строго возрастающей последовательности ординалов $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$; на языке порядка это означает, что $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$.) При этом W_1 содержит точку ω_1 , к которой не сходится никакая последовательность и которая не имеет тип G_δ .

- Приведите пример несепарабельного пространства со свойством Суслина.
- Покажите, что свойство Суслина и сепарабельность наследуются открытыми подпространствами.
- Покажите, что свойство Суслина наследуется плотными подпространствами, а сепарабельность не наследуется.

13. *Наследственное число Суслина* $hc(X)$ топологического пространства X , которое также называется *спредом* пространства X и обозначается $s(X)$, определяется естественным образом:

$$hc(X) = s(X) = \sup\{c(Y) : Y \subset X\}.$$

Покажите, что $hc(X) = \sup\{|Y| : Y \text{ — дискретное подпространство пространства } X\}$.

14. Заметьте, что кардинальнозначные характеристики топологического пространства X , с которыми мы успели познакомиться, связаны неравенствами

$$\chi(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}, \quad c(X) \leq d(X) \leq w(X) \geq hc(X) \geq c(X), \quad d(X) \leq |X|.$$

Приведите примеры пространства X , для которого $\chi(X) < c(X)$, и пространства Y , для которого $\chi(Y) > hc(Y)$.

Задачи-4

- Отображение $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ метрических пространств называется *липшицевым*, если существует такое число L (константа Липшица отображения f), что $\rho(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$. Покажите, что всякое липшицево отображение метрических пространств непрерывно.
- Приведите пример отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которое непрерывно ровно в одной точке.
- а) Заметьте, что отображение $f: X \rightarrow Y$ открыто тогда и только тогда, когда в пространстве X существует база, образ каждого элемента которой открыт в Y .
б) Покажите, что образ любой (не обязательно открытой) окрестности точки x топологического пространства X при открытом отображении $f: X \rightarrow Y$ является окрестностью точки $f(x)$ в пространстве Y .
- Приведите пример топологических пространств X и Y и непрерывной сюръекции $f: X \rightarrow Y$, которая
а) не является ни открытым, ни замкнутым отображением;
б) является открытым, но не является замкнутым отображением;
в) является замкнутым, но не является открытым отображением;
г) является замкнутым и взаимно однозначным, но не открытым отображением;
д) является открытым и замкнутым отображением, но не является гомеоморфизмом.
- Пусть $f: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение топологического пространства X в себя. Покажите, что подотображение $X \rightarrow f(X)$ отображения f является ретракцией тогда и только тогда, когда $f \circ f = f$.
- Верно ли, что если график $\text{Gr } f$ отображения $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств гомеоморфен пространству X , то f непрерывно?
- Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Покажите, что связность сохраняется непрерывными отображениями, т.е. непрерывный образ любого связного пространства связан.
- а) Покажите, что биекция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда она монотонна (т.е. либо всюду возрастает, либо всюду убывает). Верно ли это для произвольного линейно упорядоченного пространства с порядковой топологией?
б) Покажите, что всякое непрерывное взаимно однозначное отображение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на себя является гомеоморфизмом. Верно ли это для произвольного топологического пространства?
- Ниже перечислены наборы топологических пространств (их обозначения можно найти в конце вводной главы). Покажите, что пространства из каждого набора гомеоморфны друг другу, а пространства из разных наборов — нет:
а) любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$, диск $\bar{D}^1$ и любой диск $\bar{D}_r^1(x_0)$, где $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$;
б) любые полуоткрытые интервалы $[a, b)$ и $(a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, и замкнутые лучи $(-\infty, c]$ и $[c, \infty)$, где $c \in \mathbb{R}$;
в) любой открытый интервал (a, b) , где $a < b$, любые открытые лучи $(-\infty, c)$ и (c, ∞) , прямая $\mathbb{R}$, окружность без точки $S^1 \setminus \{s\}$, где $s \in S^1$, любая дуга $\smile AB \subset S^1$ без концов (где $A, B \in S^1$, $A \neq B$), диск D^1 и любой диск $D_r^1(x_0)$, где $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$;
г) открытое полупространство $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$, сфера S^n без точки, n -мерный сферический сегмент без границы¹⁾, пространство $\mathbb{R}^n$, диск D^n и любой диск $D_r^n(x_0)$, где $r > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для произвольного $n \geq 2$;
д) замкнутый диск $\bar{D}^{2k}$, произведение обычных плоских дисков $\underbrace{\bar{D}^2 \times \dots \times \bar{D}^2}_{k \text{ раз}}$, $2k$ -мерный куб $[-1, 1]^{2k}$ и $2k$ -мерный сферический сегмент с границей для $k \geq 1$.
- Покажите, что замкнутый диск $\bar{D}^n$ и любой n -мерный симплекс Δ^n , где $n \geq 1$, гомеоморфны.
- Докажите, что тор T^2 гомеоморфен «бублику» — поверхности в $\mathbb{R}^3$, получаемой вращением окружности S^1 вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей её.
- а) Вложите $\bar{D}^2 \times S^1$, $\bar{D}^1 \times T^2$ и $\bar{D}^1 \times S^2$ в $\mathbb{R}^3$.
б) Докажите, что тор T^n вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$ для любого натурального n .
- Докажите, что прямая Зоргенфрея гомеоморфна стрелке Зоргенфрея.²⁾
- Придумайте два негомеоморфных пространства X и Y , для которых существуют непрерывные биекции $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$.

¹⁾ То есть пересечение сферы S^n с произвольным открытым полупространством при условии, что пересечения S^n с самим этим полупространством и с его дополнением непусты; сферический сегмент без границы можно представлять себе как усечённую сферу или как сферу, из которой вырезали кружок (вместе с границей).

²⁾ См. задачу 10 из третьей порции задач.

15. Докажите, что для любых двух счётных всюду плотных подмножеств A и B вещественной прямой $\mathbb{R}$ существует гомеоморфизм $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию $f(A) = B$.

16. Покажите, что отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств

а) непрерывно и замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{f(A)}^Y = f(\overline{A}^X)$ для любого множества $A \subset X$;

б) непрерывно и открыто тогда и только тогда, когда $\overline{f^{-1}(B)}^X = f^{-1}(\overline{B}^Y)$ для любого $B \subset Y$.

17. Покажите, что метрика $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ на топологическом пространстве $(X, \mathcal{T})$ непрерывна относительно топологии произведения на $X \times X$ тогда и только тогда, когда порождаемая ею метрическая топология $\mathcal{T}_d$ слабее (нестрого) топологии $\mathcal{T}$. В частности, на метризуемом пространстве непрерывна всякая метрика, порождающая его топологию.

18. *Непрерывный путь*, соединяющий точки x и y в топологическом пространстве X , — это любое непрерывное отображение $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям $\alpha(0) = x$ и $\alpha(1) = y$.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ — прямоугольник, непрерывный путь $\alpha: [0, 1] \rightarrow P$ соединяет точки, принадлежащие двум противоположным сторонам прямоугольника P , а непрерывный путь $\beta: [0, 1] \rightarrow P$ соединяет точки, принадлежащие двум другим противоположным сторонам. Докажите, что образы путей α и β пересекаются, т.е. существуют $s, t \in [0, 1]$, для которых $\alpha(s) = \beta(t)$.

Задачи-5

1. Покажите, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам отделимости T_0 и T_3 , регулярно. Верно ли, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_4 , нормально?
2. Пусть X — метризуемое пространство, топология которого порождается метрикой d , и пусть F и G — непересекающиеся замкнутые подмножества X . Постройте в явном виде (в терминах ε -окрестностей относительно метрики d) непересекающиеся открытые окрестности множеств F и G .
3. Докажите, что любое пространство с топологией линейного порядка наследственно нормально.
4. Пусть $W_1 = \{\alpha : \alpha \leq \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией¹⁾, и пусть $W_0 = \{\alpha : \alpha \leq \omega\}$ — множество всех конечных ординалов вместе с первым бесконечным, тоже с порядковой топологией²⁾. Пространство $W_1 \times W_0$ с топологией произведения называется *плоскостью Тихонова*³⁾. Докажите, что
 - а) пространство $W_1 \times W_0$ нормально;
 - б) пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ не нормально;
 - в) пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$, в отличие от плоскости Немыцкого, не содержит несчётных замкнутых дискретных подпространств.
5. а) Покажите, что всякое регулярное пространство со счётной базой нормально. Всякое ли хаусдорфово пространство со счётной базой нормально?
б) Покажите, что всякое счётное регулярное пространство нормально. Всякое ли счётное хаусдорфово пространство нормально?
6. Пусть X — произвольное пространство, Z — регулярное пространство, Y — плотное подпространство X и $f: Y \rightarrow Z$ — непрерывное отображение. Докажите, что отображение f продолжается до непрерывного отображения $X \rightarrow Z$ тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного отображения $Y \cup \{x\} \rightarrow Z$ для каждой точки $x \in X \setminus Y$.
7. а) Приведите пример двух разных функций $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, сужения которых на всюду плотное в $\mathbb{R}$ множество $\mathbb{P}$ иррациональных чисел непрерывны и совпадают.
б) Приведите пример двух разных функций $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которые в каждой точке всюду плотного в $\mathbb{R}$ множества $\mathbb{P}$ непрерывны и совпадают.
8. Множество A в топологическом пространстве X называется *функционально замкнутым*, или *нуль-множеством*, если $A = f^{-1}(\{0\})$ для некоторой непрерывной функции. Множество $A \subset X$ *функционально открыто*, или является *конуль-множеством*, если $A = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ для некоторой непрерывной функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. (См. также задачу 10 б) ниже.)
 - а) Докажите, что во вполне регулярном пространстве X точка x имеет тип⁴⁾ G_δ тогда и только тогда, когда одноточечное множество $\{x\}$ функционально замкнуто.
 - б) Приведите пример вполне регулярного пространства, в котором не все точки имеют тип G_δ .
9. а) Докажите, что в нормальном пространстве X замкнутое множество F имеет тип⁴⁾ G_δ тогда и только тогда, когда F функционально замкнуто⁵⁾.
б) T_1 -пространство, в котором все замкнутые множества функционально замкнуты, называется *совершенно нормальным*. Покажите, что пространство совершенно нормально тогда и только тогда, когда оно нормально и все замкнутые множества в нём имеют тип G_δ .
в) Докажите, что любое совершенно нормальное пространство наследственно совершенно нормально.
г) Приведите пример нормального не совершенно нормального пространства.
д) Покажите, что в ненормальном пространстве замкнутые G_δ -множества не обязаны быть функционально замкнутыми, даже если это пространство вполне регулярно.
10. а) Докажите, что всякое метризуемое пространство совершенно нормально.
б) Выведите из пункта а), что множество A функционально открыто (замкнуто) в пространстве X тогда и только тогда, когда существуют непрерывная функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ и открытое (замкнутое) множество $Y \subset \mathbb{R}$, для которых $A = f^{-1}(Y)$.
11. Покажите, что прямая Зоргенфрея⁶⁾ S нормальна и даже совершенно нормальна, однако её квадрат $S \times S$ с топологией произведения не нормален.

¹⁾ См. также задачу 11 из третьей порции задач.

²⁾ Таким образом, точки пространства W_0 образуют сходящуюся последовательность вместе с её пределом ω . Это (и любое гомеоморфное ему) пространство так и называют — *сходящаяся последовательность*, хотя оно не является последовательностью в строгом смысле. Заметьте, что при этом на множестве $W_0 \setminus \{\omega\} = \omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ индуцируется обычная — дискретная — топология, совпадающая с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$, а окрестностями точки ω являются дополнения до конечных подмножеств множества $W_0 \setminus \{\omega\}$.

³⁾ Иногда плоскостью Тихонова называют пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$.

⁴⁾ См. задачу 9 из третьей порции задач.

⁵⁾ См. предыдущую задачу.

⁶⁾ См. задачу 10 из третьей порции задач.

12. Докажите, что

- а) $|X| \leq 2^{w(X)}$ для любого T_1 -пространства X ;
- б) $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ для любого хаусдорфова пространства X ;
- в) $w(X) \leq 2^{d(X)}$ для любого T_3 -пространства X .

Задачи-6

В задачах этого раздела A — произвольное индексное множество.

- а) Как известно, если композиция $g \circ f$ непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ факторна, то отображение g факторно. Обязано ли отображение f быть факторным?
б) Докажите, что если $f: X \rightarrow Y$ — факторное отображение, $g: Y \rightarrow Z$ — произвольное отображение и композиция $g \circ f$ непрерывна, то отображение g тоже непрерывно.
- Верно ли, что если $f: X \rightarrow Y$ факторно и $Z \subset X$, то подотображение $Z \rightarrow f(Z)$ отображения f факторно? Что, если $Z = f^{-1}(S)$ для некоторого открытого множества $S \subset Y$? для некоторого замкнутого множества $S \subset Y$?
- Пусть $f: X \rightarrow Y$ — факторное отображение и $\text{id}: Z \rightarrow Z$ — тождественное отображение. Верно ли, что декартово произведение $f \times \text{id}: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ всегда факторно?
- Приведите пример факторного, но не открытого и не замкнутого отображения.
- В задаче 4 из первой порции задач (и в курсе аналитической геометрии) проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ определялась как множество всех проходящих через точку $(0, 0, 0)$ прямых в $\mathbb{R}^3$ и расстояние между двумя такими прямыми полагалось равным углу между ними. Докажите, что это пространство гомеоморфно квадрату, обе пары противоположных сторон которого склеены с перекручиванием, и диску, к которому вдоль границы приклеен лист Мёбиуса.
- Покажите, что произведение $\square \mathbb{R}^\omega$ счётного числа прямых с ящичной топологией несвязно, т.е. его можно представить как объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств.
- Проверьте, что диагональное произведение счётного числа тождественных функций $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$, заданное правилом $F(x) = (x, x, x, \dots)$ для $x \in \mathbb{R}$, не является непрерывным относительно ящичной топологии на $\mathbb{R}^\omega$.
- Пусть X — любое бесконечное множество. Покажите, что последовательность функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к функции f в пространстве $\mathbb{R}^X$ с ящичной топологией тогда и только тогда, когда $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f поточечно (т.е. последовательности $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ сходятся в $\mathbb{R}$ к $f(x)$ для всех $x \in X$) и существуют конечное множество $F \subset X$ и натуральное число N с тем свойством, что $f_n(x) = f(x)$ для всех $n \geq N$ и $x \in X \setminus F$.
- Пусть X_α , $\alpha \in A$, — топологические пространства.
а) Покажите, что если $Y \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ плотно в $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, то проекция $\pi_\alpha(Y)$ множества Y на сомножитель X_α плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$.
б) Приведите пример произведения $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и множества $Y \subset X$ с тем свойством, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$, однако Y не плотно в X .
- а) Приведите пример топологического произведения $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и замкнутого множества $Y \subset X$, для которых проекции $\pi_\alpha(Y)$ не замкнуты в X_α .
б) Приведите пример топологического произведения $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и незамкнутого множества $Y \subset X$ с тем свойством, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ замкнута в X_α для каждого $\alpha \in A$.
- Докажите, что топологическое произведение непустых T_1 -пространств удовлетворяет первой аксиоме счётности (удовлетворяет второй аксиоме счётности, метризуемо) тогда и только тогда, когда все сомножители обладают тем же свойством и все, кроме не более чем счётного числа, одноточечны.
- Докажите счётную мультипликативность сепарабельности без использования теоремы Хьюитта–Марчевского–Пондичери.
- Докажите, что канторово множество¹⁾ $C \subset \mathbb{R}$ гомеоморфно тихоновской степени $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ дискретного пространства $\{0, 1\}$.
- Докажите, что всякое T_0 -пространство X , обладающее счётной базой из открыто-замкнутых множеств, гомеоморфно вкладывается в канторово множество¹⁾ $C \subset \mathbb{R}$ (и, следовательно, метризуемо).
- Докажите, что любое счётное метризуемое пространство вкладывается в пространство $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел.
- Докажите, что пространство $\mathbf{R}$ иррациональных чисел гомеоморфно топологическому произведению $\mathbb{N}^{\aleph_0}$.
- Докажите, что топологическое произведение $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ не нормально.

¹⁾ Канторово множество — подмножество отрезка $[0, 1]$, которое строится по индукции так: на первом шаге индуктивного построения имеется один отрезок $[0, 1]$, и из него удаляется средняя треть без концов (интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$), так что остаются два отрезка; на каждом следующем шаге из всех имеющихся на этом шаге отрезков удаляются средние трети без концов. Канторово множество получается после счётного числа шагов.

18. Докажите, что если X — хаусдорфово пространство и $\mathcal{U}$ — семейство его подпространств, то пространство $\bigcap \{Y : Y \in \mathcal{U}\} \subset X$ с топологией, индуцированной из X , гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $\prod \{Y : Y \in \mathcal{U}\}$.

19. Пусть κ — любой бесконечный кардинал. Докажите, что счётная степень метрического ежа $J(\kappa)$ колючести κ с тихоновской топологией универсальна для всех метризуемых пространств веса κ , т.е. любое метризуемое пространство веса κ гомеоморфно подпространству пространства $J(\kappa)^{\aleph_0}$.

20. а) Покажите, что если X — T_2 -пространство, то для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество всех подмножеств пространства X мощности, не превосходящей n , замкнуто в $\text{exr } X$.

б) Покажите, что если X — T_1 -пространство, то множество $\text{exr}_{<\omega} X$ всех его конечных подмножеств плотно в $\text{exr } X$.

в) Покажите, что если X — бесконечное T_1 -пространство, то $d(X) = d(\text{exr } X)$.

21. а) Проверьте, что $\text{exr } X$ всегда является T_0 -пространством.

б) Покажите, что если X является T_1 -пространством, то $\text{exr } X$ тоже является T_1 -пространством. Верно ли обратное?

в) Докажите, что для T_1 -пространства X экспоненциальное пространство $\text{exr } X$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда X регулярно.

г) Докажите, что если X — T_1 -пространство и экспоненциальное пространство $\text{exr } X$ регулярно, то X нормально.

22. Докажите, что $\text{exr } \mathbb{N}$ не нормально.

23. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение топологического пространства X в пространство Y .

а) Заметьте, что f непрерывно тогда и только тогда, когда многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$, определённое правилом $F(x) = \{f(x)\}$, полунепрерывно снизу или, что равносильно, сверху.

б) Докажите, что f открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда многозначное отображение $G: Y \rightarrow X$, определённое правилом $G(y) = \{f^{-1}(y)\}$, полунепрерывно снизу (сверху).

в) Покажите, что если $X \in T_1$, то отображение $i: X \rightarrow \text{exr } X$, определённое правилом $i(x) = \{x\}$, — гомеоморфное вложение.

Задачи-7

1. Приведите пример нехаусдорфова компактного T_1 -пространства.
2. а) Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если оно замкнуто в любом хаусдорфовом пространстве, содержащем его в качестве подпространства.
б) Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если любое взаимно однозначное непрерывное отображение этого пространства на произвольное хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.
3. а) Точка x топологического пространства X называется *точкой полного накопления* множества $Y \subset X$, если для любой её окрестности U имеет место равенство $|U \cap Y| = |Y|$. Докажите, что топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждое бесконечное множество в X имеет точку полного накопления.
б) Докажите, что мощность любого несчётного компакта $K \subset \mathbb{R}$ равна $2^{\aleph_0}$.
в) Заметьте, что из пункта б) вытекает, что мощность всякого несчётного замкнутого подмножества прямой равна $2^{\aleph_0}$.
4. Семейство $\mathcal{N}$ подмножеств топологического пространства X называется *сетью*¹⁾ этого пространства, если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x найдётся $N \in \mathcal{N}$, для которого $x \in N \subset U$. Определение сети отличается от определения базы лишь тем, что элементы сети не обязаны быть открытыми (таким образом, всякая база является сетью). *Сетевой вес* $nw(X)$ пространства X определяется, по аналогии с весом, как наименьшая мощность сети в X .
а) Докажите, что для всякого хаусдорфова пространства X существует непрерывное взаимно однозначное отображение этого пространства на хаусдорфово пространство Y со свойством $w(Y) \leq nw(X)$.
б) Заметьте, что для любого компакта X имеет место равенство $w(X) = nw(X)$.
в) Покажите, что всякий компакт имеет базу, мощность которой не превосходит мощности этого компакта.
5. а) Верно ли, что вес компактов не увеличивается при непрерывных отображениях, т.е. $w(f(X)) \leq w(X)$ для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$, где X — компакт?
б) Верно ли, что характер компактов не увеличивается при непрерывных отображениях?
6. Докажите, что всякий метризуемый компакт является непрерывным образом канторова множества.
7. Докажите, что компактное подмножество K вполне регулярного пространства X имеет тип G_δ (является пересечением счётного числа открытых множеств) тогда и только тогда, когда K функционально замкнуто, т.е. $K = f^{-1}(\{0\})$ для некоторой непрерывной функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.
8. Заметьте, что плоскость Тихонова²⁾ компактна и, значит, нормальна, но не наследственно нормальна.
9. Покажите, что двойная окружность Александрова³⁾ наследственно нормальна, но не совершенно нормальна⁴⁾.
10. Заметьте, что тихоновское произведение $[0, 1]^{[0, 1]}$, т.е. пространство всех функций $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ с тихоновской топологией, не удовлетворяет первой аксиоме счётности. Докажите, что множество всех неубывающих функций $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ с топологией, индуцированной из тихоновского произведения $[0, 1]^{[0, 1]}$, является неметризуемым сепарабельным компактом с первой аксиомой счётности.
11. Докажите теорему Бэра о категории для полных метрических пространств: в любом полном метрическом пространстве (X, d) пересечение $G = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i$ любой последовательности $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ всюду плотных открытых множеств всюду плотно.
12. а) Докажите, что топологическое произведение $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ метризуемо полной метрикой (т.е. его топология порождается некоторой полной метрикой) тогда и только тогда, когда каждый сомножитель метризуем полной метрикой.
б) Покажите, что пространство $\mathbf{P}$ метризуемо полной метрикой (а значит, обладает свойством Бэра).
в) Укажите явно полную метрику на $\mathbf{P}$.
г) Покажите, что топология пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не порождается никакой полной метрикой.
д) Гомеоморфны ли пространства $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^{\aleph_0}$? $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}^{\aleph_0}$? $\mathbf{P}$ и $\mathbb{Q}^{\aleph_0}$?
13. Докажите *лемму Лебега*: для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ метрического компакта (X, d) существует число Лебега, т.е. такое положительное число λ , что каждый шар $B_d(x, \lambda)$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$.

¹⁾ Понятие сети не следует путать с понятием ε -сети!

²⁾ См. задачу 4 из пятой порции задач.

³⁾ См. слайды к двенадцатой лекции.

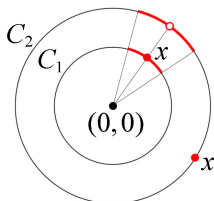
⁴⁾ См. задачу 9 б) из пятой порции задач.

- 14.** а) Докажите, что всякая непрерывная функция на компактном пространстве принимает свои минимальное и максимальное значения.
б) Докажите, что в метрическом пространстве расстояние между любыми непересекающимися компактным и замкнутым множествами положительно.
- 15.** а) Докажите, что линейно упорядоченное пространство X с порядковой топологией компактно тогда и только тогда, когда для всякого непустого множества $Y \subset X$ существуют $\inf Y$ и $\sup Y$.
б) Докажите, что квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ с топологией лексикографического порядка компактен.
- 16.** Топологическое пространство X называется *однородным*, если для любых точек $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$ такой, что $f(x) = y$.
а) Верно ли, что любой компакт является непрерывным образом однородного компакта?
б) Верно ли, что любой бесконечный однородный компакт содержит нетривиальную сходящуюся последовательность?

Задачи-8

1. а) Заметьте, что обычная прямая $\mathbb{R}$ локально компактна. Опишите её одноточечную компактификацию.
 б) Заметьте, что евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ локально компактна. Опишите её одноточечную компактификацию.
 в) Покажите, что отрезок $[0, 1]$ является двухточечной (на рост состоит из двух точек) компактификацией прямой $\mathbb{R}$ (т.е. $[0, 1] = c\mathbb{R}$ для некоторого вложения $c: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ такого, что $c(\mathbb{R})$ плотно в $[0, 1]$). Заметьте, что $\alpha\mathbb{R} \leq c\mathbb{R}$ (поскольку компактификация $\alpha\mathbb{R}$ наименьшая). Укажите явно соответствующее отображение $c\mathbb{R} \rightarrow \alpha\mathbb{R}$ из определения отношения $\leq$ между компактификациями.
 г) Существует ли у прямой $\mathbb{R}$ трёхточечная компактификация?
2. Покажите, что компактификация cX тихоновского пространства X эквивалентна стоун-чеховской компактификации βX тогда и только тогда, когда всякая ограниченная непрерывная функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ продолжается до непрерывной функции $\hat{f}: cX \rightarrow \mathbb{R}$.
3. Пусть X — тихоновское пространство и Y — его замкнутое подпространство. Верно ли, что замыкание множества Y в стоун-чеховской компактификации βX пространства X является стоун-чеховской компактификацией βY пространства Y ?
4. Докажите, что для любого бесконечного дискретного пространства D справедливы следующие утверждения:
 а) αD — это суперпоследовательность Александрова $A(\kappa)$, где $\kappa = |D|$;
 б) $|\beta D| = 2^{2^{|D|}}$;
 в) $w(\beta D) = 2^{|D|}$.
5. Покажите, что для некомпактного метризуемого пространства X стоун-чеховская компактификация βX не бывает одноточечной; более того, мощность нароста $\beta X \setminus X$ не меньше $2^{\aleph_0}$. Если при этом либо $w(X) = \aleph_0$, либо $w(X) > \aleph_0$ и $w(X)$ нельзя представить как супремум счётного числа меньших кардиналов, то $w(\beta X) = 2^{w(X)}$.
6. а) Покажите, что если X и Y — тихоновские пространства с первой аксиомой счётности и компактификации βX и βY гомеоморфны, то и сами пространства X и Y гомеоморфны.
 б) Верно ли, что если компактификации βX и βY произвольных тихоновских пространств X и Y гомеоморфны, то и пространства X и Y гомеоморфны?
7. Заметьте, что пространство W_1^0 всех не более чем счётных ординалов с порядковой топологией локально компактно. Докажите, что $\alpha W_1^0 = \beta W_1^0 = W_1$ (напомним, что $W_1 = W_1^0 \cup \{\omega_1\}$). Заметьте, что отсюда вытекает существование ровно одной компактификации у пространства W_1^0 .
8. а) Проверьте, что ¹⁾ $\beta[X \oplus Y] = \beta X \oplus \beta Y$ для любых тихоновских пространств X и Y .
 б) Докажите, что если тихоновские пространства X и Y бесконечны и $\beta[X \times Y] = \beta X \times \beta Y$, то все непрерывные функции на X и на Y ограничены.
9. Заметьте, что, вообще говоря, компактификация, предоставляемая теоремами Тихонова (т.е. замыкание в $[0, 1]^{w(X)}$ образа $\Delta f_\alpha(X)$ пространства X при вложении Δf_α , где $f_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ — непрерывные функции, указанные в доказательстве теоремы Тихонова о вложении), не является стоун-чеховской максимальной компактификацией. Докажите, что если $\mathcal{F} = \{f_\alpha: \alpha \in A\}$ — семейство *всех* непрерывных функций $X \rightarrow [0, 1]$, то замыкание образа пространства X при вложении $\Delta f_\alpha: X \rightarrow [0, 1]^A$ совпадает с βX .
10. Пусть αD_1 и αD_2 — непересекающиеся одноточечные компактификации дискретных пространств D_1 и D_2 мощности $2^{\aleph_0}$. Очевидно, $A = \alpha D_1 \oplus \alpha D_2$ — двухточечная компактификация дискретного пространства $D = D_1 \oplus D_2$.

Рассмотрим две окружности $C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = i\}$, $i = 1, 2$. Положим $X = C_1 \cup C_2$. Пусть $p: C_1 \rightarrow C_2$ — отображение проектирования окружности C_1 на окружность C_2 из точки $(0, 0)$. Мы определим топологию на множестве X с помощью системы окрестностей $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$. Для точки $x \in C_1$ и натурального числа n обозначим через $V_n(x)$ дугу окружности C_1 длины $\frac{1}{n}$ с серединой в точке x и положим $U_n(x) = V_n(x) \cup p(V_n(x) \setminus \{x\})$. Множества вида $U_n(x)$ составляют базу окрестностей точек x из C_1 , а все точки из C_2 изолированы: для $x \in C_1$ полагаем $\mathcal{B}(x) = \{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, а для $x \in C_2$ — $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$.



¹⁾ Квадратные скобки здесь означают лишь то, что рассматривается стоун-чеховская компактификация суммы $X \oplus Y$, а не сумма βX и Y . В литературе для этой цели обычно используются круглые скобки, так как всякое пространство считается подпространством своей стоун-чеховской компактификации, так что гомеоморфные вложения β вообще не рассматриваются и нет опасности перепутать компактификацию суммы с её образом при таком вложении.

Топологическое пространство X (с топологией, порождённой этой базой окрестностей) называется *двойной окружностью Александрова*.

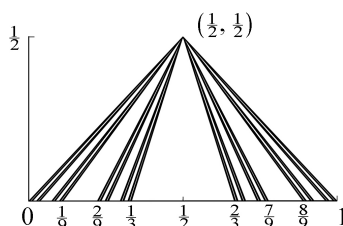
Заметьте, что двойная окружность Александрова тоже является компактификацией пространства D . Покажите, что компактификации A и X несравнимы. Выведите отсюда, что $\alpha D \neq \beta D$ и $X \neq \beta D$.

Задачи-9

1. Сохраняется ли локальная компактность непрерывными отображениями? открытыми непрерывными отображениями? замкнутыми непрерывными отображениями?
2. Верно ли, что если локально компактное пространство метризуемо, то его одноточечная компактификация тоже метризуема?
3. Докажите, что всякое хаусдорфово локально компактное пространство можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на некоторый хаусдорфов компакт.
4. Докажите, что теорема Бэра остаётся верной для локально компактных пространств.
5. Докажите, что для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:
 - (i) существует порождающая топологию X метрика с тем свойством, что подмножество X компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено в этой метрике;
 - (ii) X сепарабельно и локально компактно.
6. Топологическое пространство X называется *коллективно нормальным*, если элементы всякого дискретного семейства замкнутых множеств в X имеют попарно непересекающиеся открытые окрестности. При этом семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *дискретно*, если у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, пересекающая не более одного его элемента.
Докажите, что всякий паракомпакт коллективно нормален.
7. Верно ли, что всякое хаусдорфово финально компактное пространство линделёфово?
8. Докажите, что
 - а) плоскость Немыцкого не локально компактна (поэтому её нельзя компактифицировать одной точкой);
 - б) к плоскости Немыцкого можно добавить одну точку так, что получится линделёфово пространство;
 - в) к квадрату прямой Зоргенфрея нельзя добавить одну точку так, что получится нормальное пространство.
9. Докажите, что метризуемое пространство компактно, если и только если все метрики, порождающие топологию этого пространства, полны.
10. Приведите пример счётно компактного ненормального пространства.
11. Пусть A, Y и $X_\alpha, \alpha \in A$, — множества. Для $A_0 \subset A$ обозначим через π_{A_0} естественное отображение проектирования $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in A_0} X_\alpha$, определённое правилом $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha \in A_0}$.
 - а) Докажите псевдокомпактность всякого множества $X \subset [0, 1]^A$ с тем свойством, что $\pi_{A_0}(X) = [0, 1]^{A_0}$ для любого счётного $A_0 \subset A$ (о таком X будем говорить, что оно *заполняет счётные грани*).
 - б) Пусть A несчётно. Заметьте, что множество
$$\Sigma[0, 1]^A = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in [0, 1]^A : |\{\alpha \in A : x_\alpha \neq 0\}| \leq \aleph_0\}$$
заполняет счётные грани. Выведите отсюда, что любое пространство Y , для которого $\Sigma[0, 1]^A \subset Y \subset [0, 1]^A$, псевдокомпактно. Покажите, что пространство $[0, 1]^A \setminus \{\mathbf{x}\}$, где $\mathbf{x}$ — любая точка из $[0, 1]^A$, псевдокомпактно, но не счётно компактно, а значит, и не нормально.
12. Докажите, что произведение метризуемых пространств нормально тогда и только тогда, когда все сомножители, кроме не более чем счётного их числа, компактны.
13. а) Постройте пример наследственно линделёфова несепарабельного пространства.
б) Постройте пример вполне регулярно наследственно сепарабельного нелиindelёфова пространства.

Задачи-10

1. Проверьте, что если последовательность $C_1, C_2, \dots$ связных подпространств топологического пространства такова, что $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ при $n = 1, 2, \dots$, то объединение $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ связно.
2. а) Докажите *теорему Серпинского*: никакой континуум нельзя представить как счётное объединение попарно непересекающихся замкнутых множеств, по крайней мере два из которых непусты.
б) Приведите пример связного подпространства плоскости, которое является счётным объединением непустых попарно непересекающихся замкнутых множеств.
3. Докажите, что любое открыто-замкнутое подмножество тихоновского пространства X является пересечением с X некоторого открыто-замкнутого подмножества компакта βX . Можно ли распространить это утверждение с βX на произвольное тихоновское пространство, содержащее X в качестве плотного подпространства? на произвольную компактификацию пространства X ?
4. Пусть E — множество всех концевых точек интервалов, удаленных из отрезка $[0, 1]$ в стандартном процессе построения канторова множества C . Положим $I = C \setminus E$. Для каждого $c \in C$ соединим точку $(c, 0) \in \mathbb{R}^2$ с точкой $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ отрезком L_c и обозначим через F_c множество всех точек $(x, y) \in L_c$, у которых координата y рациональна, если $c \in E$, и иррациональна, если $c \in I$. Подпространство $F = \bigcup_{c \in C} F_c$ евклидовой плоскости называется *веером Кнастера–Кураковского*; оно известно также как *протекающая*¹⁾ *канторова палатка* и *канторов вигвам*.



- а) Докажите, что пространство F связно.
 - б) Докажите, что пространство $F^0 = F \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ наследственно несвязно.
5. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow X$, для которого $f(0) = x$ и $f(1) = y$ (такое отображение называется *путём*, соединяющим точки x и y). Топологическое пространство X называется *локально связным*, если в каждой окрестности любой точки $x \in X$ содержится связная окрестность.
 - а) Докажите, что любое линейно связное пространство связно.
 - б) Приведите пример локально связного несвязного пространства.
 - в) Приведите пример связного, но не линейно связного и не локально связного пространства.
 6. а) Пусть X — связное метризуемое пространство и d — любая метрика, порождающая его топологию. Покажите, что для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\text{существуют такие } k \in \mathbb{N} \text{ и } x_1, \dots, x_k \in X, \text{ что} \\ &x = x_1, y = x_k \text{ и } d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \text{ для } i < k. \end{aligned} \quad (\star)$$
 - б) Докажите, что каждый метрический компакт (X, d) , в котором условие $(\star)$ выполнено для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$, связен.
 - в) Приведите пример несвязного метрического пространства (X, d) , в котором условие $(\star)$ выполнено для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$.
 7. Топологическое пространство называется *нульмерным*, если оно имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств. Заметьте, что всякое нульмерное пространство несвязно.
 - а) Докажите, что пространство $X \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из всех точек, у которых одна координата рациональна, а другая иррациональна, нульмерно. Постройте явно его базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств.
 - б) Покажите, что пространство $Y \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из всех точек, у которых либо обе координаты рациональны, либо обе иррациональны, связно.

¹⁾ В противоположность палатке, сделанной из целых отрезков L_c вместо множеств F_c . Бывает и «сильно протекающая канторова палатка» (Cantor's leakier tent) — она получается перестановкой слов «рационально» и «иррационально» в определении палатки. Такая палатка уже нульмерна.