Задание N 5

4*. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}$ гомеоморфно $S^{n-2} \times \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, где S^m — m-мерная сфера.

8. Докажите, что пространство Бэра (Задача 17 Задания N 2) гомеоморфно счетной степени счетного дисретного пространства (натуральные числа в дискретной топологии).

9. Докажите, что пространство Бэра гомеоморфно пространству иррациональных чисел. Докажите, что счетная степень пространства иррациональных чисел гомеоморфна пространству иррациональных чисел.

10. Докажите, что конечная степень пространства рациональных чисел гомеоморфна пространству рациональных чисел. Верно ли утверждение для счетной степени?

Задание N 6

1*. Пусть $f : X \to Y$ непрерывное отображение. Докажите, что если существует непрерывное отображение $g : Y \to X$ такое, что $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, то тогда f — факторное отображение.
Пусть $A \subset X$. Непрерывное отображение $f : X \to A$, для которого $f(a) = a$, $a \in A$, называется *ретракцией* X на A. Докажите, что ретракция — факторное отображение.

6*. Докажите, что факторпространство

(a) цилиндра $S^1 \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества
$S^1 \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(t, 0), (t, 1)\}$, $t \in S^1$,

(b) квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества
$\{(0, t), (1, t)\}, \{(t, 0), (t, 1)\}$, $t \in I$,

гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

9*. Докажите, что факторпространство квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, 1-t)\}, \{(t, 0), (1-t, 1)\}$, $t \in I$, гомеоморфно проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

10*. Получить проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$

(a) как результат склейки по границе диска B^2 и ленты Мебиуса,

(b) как результат факторизации ленты Мебиуса.

12. Доказать, что любое несчетное замкнутое подмножество прямой $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.
Доказать, что любое непустое замкнутое подмножество прямой $\mathbb{R}$ без изолированных точек имеет мощность континуум.

Задание N 7

2. Пусть X — топологическое пространство и $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность точек $x_n \in X$. Говорят, что последовательность ξ *сходится* к точке $x \in X$, если для всякой окрестности Ox точки x существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $x_n \in Ox$ для всех $n \geq n_0$.
Пусть пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.
Докажите, что в X замыкание любого подмножества A совпадает с множеством пределов всевозможных последовательностей точек множества A.
Докажите, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0 в том и только том случае, если для любой последовательности (x_n) сходящейся к x последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$.

3*. Проверить выполнение аксиом счетности и сепарабельность произведения $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в ящичной топологии.

6*. Докажите, что в любом подмножестве $\mathbb{R}$ (со стандартной топологией) имеется счетное всюду плотное подмножество.

7*. Сохраняются ли первая (вторая) аксиомы счетности, сепарабельность пространства в сторону образа при непрерывных отображениях?

8. Будет ли факторпространство пространства, удовлетворяющего первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворять первой (второй) аксиоме счетности?

9. Докажите, что тихоновское произведение континуума сепарабельнах пространств сепарабельно.

10. Существует ли счетное пространство, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности?

11. Привести пример сепарабельного пространства и его не сепарабельного подпространства.

14*. Будет ли пересечение двух всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?
Будет ли пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно?