Задание N 1

7. $\mathcal{A} = \{X_\alpha : \alpha \in J\}$, $A_\alpha \subset X_\alpha$, $B_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in J$.

$$A = \prod_{\alpha \in J} A_\alpha \subset \prod_{\alpha \in J} X_\alpha,\ B = \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \subset \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Найти связь между $A \cap B$ ($A \cup B$) и $A_\alpha \cap B_\alpha$, $A_\alpha \cup B_\alpha$, $\alpha \in J$.

8. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дано подмножество

$$A = \{(x, y) : y = x + 1,\ 0 < x < 2\}.$$

Описать отношение эквивалентности на прямой $\mathbb{R}$, которое является пересечением всех отношений эквивалентности, содержащих множество A.

14. Взаимно однозначное отображение $f : A \to B$ линейно упорядоченных множеств $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ называется подобием, если $f(a) <_B f(b)$ в том и только том случае, если $a <_A b$.

(a) Доказать, что единственным подобием на себя вполне упорядоченного множества является тождественное отображение.

(b) Доказать, что множества $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ с лексикографическим порядком не подобны (между ними не существует отображения подобия).

17. Доказать, что произведение $\mathbb{N}^n$ счетно при любых $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что произведение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет мощность континуума.

18. Найти мощность множества $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Задание N 2

19. Может ли открытый шар большего радиуса содержаться в открытом шаре меньшего радиуса?

22*. Найти метрику на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, которая задает топологию, порожденную лексикографическим порядком на квадрате линейно упорядоченного пространств $\mathbb{R}$.

Задание N 3

11. Доказать, что следующие условия на отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — непрерывно;

(d) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $\mathrm{Cl}(f^{-1}B) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}B)$;

(e) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $f^{-1}(\mathrm{Int}B) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}B)$.

15. Пусть X является счетным объединением замкнутых множеств $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, ограничение $f|_{A_i}$ отображения $f : X \to Y$ на подмножество A_i непрерывно, $i \in \mathbb{N}$. Будет ли отображение f непрерывно?

19*. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя имеет неподвижную точку.

Задание N 4

6*. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$;

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$;

(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y = 0\}$.

13. Доказать, что любое счетное метрическое пространство вложимо в $\mathbb{Q}$.

16. Существуют ли негомеоморфные пространства X и Y для которых определены непрерывные биекции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$?

17. Всякая ли непрерывная биекция прямой в стандартной топологии (прямой Зоргенфрея, прямой в топологии Зариского) является гомеоморфизмом?

18. Докажите, что любое замкнутое выпуклое подмножество плоскости гомеоморфно или точке, или отрезку, или кругу, или лучу, или прямой, или полосе, или полуплоскости, или плоскости.