Задание N 1[1]

А. *Метрические пространства. Метрика (Определение 4.1), открытые (замкнутые) шары, сферы (Определение 4.3)*

Задачи.

1.1. Пусть на плоскости E задана прямоугольная система координат, $p = (x_p, y_p), q = (x_q, y_q)$. Определим отображения $\rho_\star : E \times E \to \mathbb{R}_+$:

(ρ_d) $\rho_d(p, q) = 1$, если $p \neq q$, $\rho_d(p, q) = 0$, если $p = q$, $p, q \in E$;

(ρ_e) $\rho_e(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$;

(ρ_{max}) $\rho_{max}(p, q) = \max\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|\}$;

($\rho_\diamond$) $\rho_\diamond(p, q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$;

(ρ_j) $\rho_j(p, q) = |y_p - y_q|$, если $x_p = x_q$, $\rho_j(p, q) = |x_p - x_q| + |y_p| + |y_q|$, если $x_p \neq x_q$.

Проверить, что они являются метриками.

1.2. Докажите, что следующие функции

$$\rho_1(f, g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|dx, \ \rho_2(f, g) = \sqrt{\int\limits_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx},$$

$$\rho_3(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

в множестве всех непрерывных отображений $[0, 1] \to \mathbb{R}$ являются метриками.

1.3. Точками пространства ℓ_2 являются счетные последовательности $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел, для которых $\sum x_i^2 < \infty$. Для $p = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $q = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ положим $\rho(p, q) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$. Показать, что метрика корректно определена. Указать в l_2 счетное подмножество точек, попарные расстояния между которыми равны 1.

1.4. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – произвольная инъективная функция на множестве X. Докажите, что отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$, является метрикой на X.

1.5. Может ли шар большего радиуса содержаться в шаре меньшего радиуса?

1.6. Нарисовать единичные открытые шары точек в метриках из задач 1.1, 1.2.

1.7. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ заданные формулами $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ и $\rho_2(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$ являются метриками на множестве X. Сравнить открытые и замкнутые шары метрик ρ, ρ_1 и ρ_2.

1.8. Определить аналоги метрик $\rho_d, \rho_e, \rho_{max}, \rho_\diamond$ из задачи 1.1 для пространств $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1.9. Доказать, что в метрическом пространстве любая последовательность точек не может иметь более одного предела.

Дополнительные задачи.

1.1x. На любом ли линейном пространстве над полем $\mathbb{R}$ можно определить евклидову структуру?

1.2x. Пусть p – простое число и разность $x - y$ различных чисел $x, y \in \mathbb{Q}$ представляется в виде $\frac{r}{s}p^\alpha$, где r, s и $\alpha \in \mathbb{Z}$, r, s взаимно просты с p. Положим $\rho(x, y) = p^{-\alpha}$ для $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Доказать, что ρ – метрика (p-адическая метрика на $\mathbb{Q}$).

1.3x. Пусть на плоскости E задана аффинная (не прямоугольная) система координат. Определим отображение $\rho' : E \times E \to \mathbb{R}$ формулой

$$\rho'(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$\bar{a} = (x_1, x_2), \bar{b} = (y_1, y_2) \in E$. Доказать, что отображение ρ' является метрикой на E.

1.4x. Какая из метрик в задаче 1.2 может быть задана нормой (скалярным произведением) в линейном пространстве непрерывных отображений $[0, 1] \to \mathbb{R}$?

1.5x. *Пространство Бэра.* Пусть X произвольное бесконечное счетное множество. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех последовательностей элементов множества X. На множестве $\mathcal{B}$ введём метрику ρ следующим образом: для $p = (x_1, x_2, ...), q = (y_1, y_2, ...) \in \mathcal{B}$ полагаем $\rho(p, q) = 0$, если $p = q$, и $\rho(p, q) = 1/k$, если k наименьшее натуральное число, для которого $x_k \neq y_k$. Показать, что метрика корректно определена.

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

1.6х. *"Метризуемый еж"*. Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0,1]$, который обозначим через $[0,1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0,1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим метрику $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Для $p, q \in X$ полагаем $\rho(p,q) = |p-q|$, если p и q принадлежат одному отрезку $[0,1]_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$, и $\rho(p,q) = p+q$, если p и q не принадлежат одному отрезку $[0,1]_\lambda$. Показать, что метрика корректно определена.

1.7х. Докажите, что для любого метрического пространства (X,ρ) расстояние Хаусдорфа

$$d_\rho(A,B) = \max\{\sup\{\rho(a,B) : a \in A\}, \sup\{\rho(b,A) : b \in B\}\}$$

является метрикой в множестве ограниченных замкнутых подмножеств $A, B \subset X$. Можно ли отказаться от требования их замкнутости? ограниченности?

1.8х. Для $0 < p < 1$ точками пространства ℓ_p являются счетные последовательности $(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ действительных чисел, для которых $\sum |x_i|^p < \infty$. Для $p = (x_1,\ldots,x_n,\ldots)$, $q = (y_1,\ldots,y_n,\ldots)$ положим $\rho(p,q) = \sum |x_i - y_i|^p$. Показать, что метрика корректно определена. Порождена ли она нормой?

1.9х. Описать открытые шары точек в метриках из задач 1.5х, 1.6х.

B. *Непрерывные отображения метрических пространств.*

Задачи.

2.1. Построить непрерывное отображение канторова множества на отрезок.

2.2. Построить непрерывное отображения канторова множества на квадрат.

2.3. Докажите, что для любого подмножества A метрического пространства (X,ρ) функция $f_A : X \to \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_A(x) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}$ непрерывна. Всегда ли существует точка $a \in A$ такая, что $f_A(x) = \rho(x,a)$?

2.4. Отображение метрических пространств $f : X \to Y$ называется *изометрическим вложением*, если для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(x,y) = \rho(f(x), f(y))$. Доказать, что любое изометрическое вложение непрерывно.

2.5. Отображение f метрического пространств X в себя называется *сжимающим*, если существует $0 < \alpha < 1$ такое, что для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(f(x), f(y)) \le \alpha\rho(x,y)$. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства X непрерывно.

2.6. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в себя имеет неподвижную точку.

Дополнительные задачи.

2.1х. Доказать, что изометрическое вложение пространства $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) в себя однозначно определяется образами некоторых $n+1$ точек, $n \in \mathbb{N}$.

2.2х. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не изометрично $\mathbb{R}^m$ при $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

2.3х. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) изометрично вложено в ℓ_2.

2.4х. Любое ли конечное метрическое пространство изометрически вложимо в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой)? в ℓ_2?

2.5х. Для всякой ли изометрии f пространства ℓ_2 существует точка p такая, что $f(p) = p$ (p — неподвижная точка отображения f)?

2.6х. Доказать, что канторовы множества, получаемые выкидыванием "интервалов различной длины" не изометричны.

2.7х. Может ли пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) быть изометрично своему собственному подмножеству? А пространство ℓ_2?

Задание N 2[1]

A. *Топологическое пространство (Определение 2.1), открытые замкнутые множества (Определение 2.5), окрестность (Определение 2.9). Примеры введения топологии. База топологии (Определение 3.1). Метрическая топология (Определение 4.9). Частичный порядок (Определение 7.2), линейный порядок (Определение 7.6), интервальная топология (Определение 7.7).*

3.1. Найти метрику (линейный порядок), которая порождает стандартную (евклидову) топологию на $\mathbb{R}$ (ее базу образуют всевозможные интервалы).

3.2. Определить иерархию топологий, порожденных метриками в задаче 1.1.

3.3. Пусть $(X, <)$ – линейно упорядоченное множество. Будет ли базой некоторой топологии совокупность подмножеств:

(1) X, $\{x \in X : a < x < b\}$, $\{x \in X : a < x\}$, $\{x \in X : x < b\}$;

(2) $\{x \in X : a \leq x < b\}$, $\{x \in X : a \leq x\}$;

(3) X, $\{x \in X : a \leq x < b\}$,

где $a, b \in X$? Можно ли некоторые подмножества исключить из баз?

3.4. Две метрики эквивалентны, если они порождают одну и ту же топологию. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x, y) \leq k_2\rho_2(x, y)$ и $\rho_2(x, y) \leq k_1\rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

3.5. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ заданные формулами $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ и $\rho_2(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$ являются метриками на множестве X, эквивалентными метрике ρ.

3.6. Определить аналоги метрик $\rho_d, \rho_e, \rho_{max}, \rho_\diamondsuit$ из задачи 1.1 для пространств $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Будут ли получаемые метрики эквивалентны?

3.7. Эквивалентны ли метрики из задачи 1.2?

3.8. Доказать, что две метрики на одном и том же множестве эквивалентны тогда и только тогда, когда всякая последовательность точек этого множества, которая сходится в одной метрике, сходится и в другой.

3.9. Могут ли различные топологии на множестве X индуцировать одинаковые топологии на подмножестве $A \subset X$?

3.10. Сравнить на $\mathbb{R}$ евклидову топологию; топологию, базой которой являются множества $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$ (прямая Зоргенфрея); и топологию, замкнутыми множествами которой являются $\mathbb{R}$ и множества корней многочленов одной переменной (топология Зарисского).

3.11. Доказать:

(1) $\mathrm{Cl}A = A \cup \mathrm{Bd}A$;

(2) $\mathrm{Int}A = A \setminus \mathrm{Bd}A$;

(3) $\mathrm{Bd}A = \mathrm{Cl}A \setminus \mathrm{Int}A$;

(4) $X \setminus \mathrm{Bd}A = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(5) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bd}A \subset A$;

(6) A открыто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bd}A \cap A = \emptyset$;

(7) $A^d \setminus A = \mathrm{Bd}A \setminus A$, где A^d – предельные точки A (точка x подмножества A называется предельной, если для ее любой окрестности Ox имеем $(Ox \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$);

(8) A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^d \subset A$.

3.12. Проверить справедливость следующих соотношений:

(1) если $A \subset B$, то $\mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}A \subset \mathrm{Cl}B$);

(2) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}(A \cap B) = \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}(A \cap B) = \mathrm{Bd}A \cap \mathrm{Bd}B$);

(3) $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}A \cup \mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}(A \cup B) = \mathrm{Bd}A \cup \mathrm{Bd}B$);

(4) $\mathrm{Cl}A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}A)$, $\mathrm{Int}A = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}A)$;

(5) $\mathrm{Bd}(A \cap B) \subset \mathrm{Bd}A \cup \mathrm{Bd}B$;

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

(6) $\mathrm{Bd}(X \setminus A) = \mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}(\mathrm{Cl}A) \subset \mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Bd}A$;

(7) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

3.13. Привести пример метрического пространства и открытого шара в нем таких, что замыкание шара не совпадает с замкнутым шаром того же радиуса.

3.14. Доказать, что подмножество A метрического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда предел всякой сходящейся последовательности точек из множества A принадлежит также множеству A (т.е. точка x принадлежит замыканию множества A в том и только том случае, когда $\inf\{\rho(x,y) : y \in A\} = 0$).

3.15. Доказать, что конечномерное подпространство нормируемого пространства замкнуто.

3.16. Найти внутренность отрезка на $\mathbb{R}$ в топологиях из задачи 3.10.

3.17. Подмножество пространства ℓ_2, состоящее из всех точек $(x_1, ..., x_k, ...)$, для которых $0 \le x_k \le 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом.* Доказать, что гильбертов куб — замкнутое подмножество ℓ_2; внутренность гильбертова куба в ℓ_2 — пустое множество.

Дополнительные задачи.

3.1x. Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии из $\mathbb{N}$ образуют базу некоторой топологии на $\mathbb{N}$. С ее помощью доказать бесконечность простых чисел.

3.2x. Сравнить евклидову топологию на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и топологию $\mathbb{Q}$, порожденную p-адической метрикой на $\mathbb{Q}$ (задача 1.2x).

3.3x. Перечислите все различные множества, которые можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции Cl и Int.

3.4x. Для каких $n \in \mathbb{N}$ на прямой можно построить n открытых множеств, имеющих одну и ту же границу.

3.5x. Верна ли обратная импликация в задаче 3.4?

3.6x. Сколько существует различных топологий на конечном множестве из n элементов?

B. *Отображения (тождественное, включение, композиция, обратимость, сужение, подотображение) (Определения 9.3, 9.4, 9.5, 9.6), непрерывность отображений (Определение 10.1), Гомеоморфизмы (Определение 11.1), вложения (Определение 11.8).*

4.1. Следующие условия на отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — непрерывно;

(d) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $\mathrm{Cl}(f^{-1}B) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}B)$;

(e) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $f^{-1}(\mathrm{Int}B) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}B)$.

4.2. Показать, что непрерывные функции $f : X \to \mathbb{R}$ образуют линейное пространство по отношению к сложению и умножению на числа и кольцо по отношению к сложению и умножению.

Показать, что функция $(1/f)(x) = 1/f(x)$ непрерывна, если функции f непрерывна, и $f(x) \neq 0$ для любых $x \in X$.

Будет ли непрерывна точная верхняя (нижняя) грань $\sup\{f_n\}(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ($\inf\{f_n\}(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$) счетного семейства f_n, $n \in \mathbb{N}$, непрерывных функций?

4.3. Покажите, что если подмножество A пространства X открыто-замкнуто, то его характеристическая функция $\chi_A : X \to \{0,1\}$, где $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \in X \setminus A$ является непрерывной.

4.4. Докажите, что для любого подмножества A метрического пространства (X, ρ) функция $f_A : X \to \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_A(x) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}$ непрерывна. Всегда ли существует точка $a \in A$ такая, что $f_A(x) = \rho(x,a)$?

4.5. Проверьте, что если тождественное отображение множества X с топологией τ_2 в X с топологией τ_1 непрерывно, то $\tau_1 \subset \tau_2$ (топология τ_2 на X сильнее топологии τ_1).

4.6. Докажите, что любое замкнутое (соответственно открытое) подмножество метрического пространства функционально замкнуто (соответственно функционально открыто).

4.7. Привести пример непрерывного биективного отображения $f : X \to Y$ пространств X и Y, не являющегося гомеоморфизмом. Можно ли считать $X = Y$?

4.8. Следующие условия на биективное отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — гомеоморфизм;

(b) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f(O)$ открыто;

(c) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f(F)$ замкнуто;

(d) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(O)$ открыто;

(e) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(F)$ замкнуто.

4.9. Если $f : X \to Y$ — гомеоморфизм, то для любого $A \subset X$ выполнено:

(a) $f(\mathrm{Cl}A) = \mathrm{Cl}(f(A))$;

(b) $f(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}(f(A))$;

(c) $f(\mathrm{Fr}A) = \mathrm{Fr}(f(A))$.

4.10. Доказать, что любое сюръективное изометрическое вложение – гомеоморфизм.

4.11. Постройте гомеоморфизмы:

(a) $[0, 1]$ на $[a, b]$, $a < b$;

(b) $(0, 1]$ на $[0, 1)$;

(c) $(0, 1)$ на $\mathbb{R}$.

Доказать, что $[0, 1]$, $[0, 1)$ и $(0, 1)$ попарно не гомеоморфны.

4.12. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2$;

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), y \in (0, 1)\}$;

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$;

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$;

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 > x\}$;

(g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus (0, 0, 1)$ (сфера S^2 без точки).

4.13. Описать все гомеоморфизмы числовой прямой (отрезка $[0, 1]$).

4.14. Докажите, что всякая незамкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости гомеоморфна отрезку $[0, 1]$. Докажите, что всякая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на плоскости гомеоморфна окружности S^1.

4.15. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$;

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$;

(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 0\}$.

4.16. Докажите, что сфера S^n с выкинутой точкой гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.17. Докажите, что квадрат $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ гомеоморфен кругу $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.18. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus \cup\{x_k : k = 1, \ldots, n\}$ (все точки различны) гомеоморфно $\mathbb{R}^2 \setminus \cup\{D_k : k = 1, \ldots, n\}$, где D_k — попарно дизъюнктные замкнутые круги.

4.19. В шаровом слое просверлили цилиндрическое отверстие, соединяющее граничные сферы. Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару в пространстве.

4.20. Докажите, что пространства $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ попарно не гомеоморфны.

4.21. Дайте полную классификацию (с точностью до гомеоморфизма) открытых подмножеств прямой.

4.22. Доказать, что $\mathbb{Q}$ не вкладывается в $\mathbb{Z}$.

4.23. Доказать, что прямая в евклидовой топологии, прямая в топологии Зарисского и прямая Зоргенфрея попарно не гомеоморфны. Можно ли вложить одно из пространств в другое?

4.24. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, и $\mathcal{R}$ разбиение X на множества $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Докажите, что существует непрерывная биекция $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ такая, что $f = \bar{f} \circ q$, где q — факторотображение X на $X/\mathcal{R}$.

4.25. Что является факторпространством прямой $\mathbb{R}$ по отношению эквивалентности $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$?

4.26. Если S' разбиение пространства X, S'' разбиение пространства X/S', то факторпространство $(X/S')/S''$ гомеоморфно X/T, где T — разбиение пространства X на прообразы элементов разбиения S'' при факторотображении $X \to X/S'$.

4.27. Определите разбиение отрезка I, факторпространство по которому гомеоморфно квадрату I^2.

4.28. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

(a) $\mathbb{R}^n$,

(b) $\mathbb{R}^n/B^n$, $B^n = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 1\right\}$, (стягивание шара в точку),

(c) $\mathbb{R}^n/I^n$ (стягивание куба в точку).

4.29. Докажите, что факторпространства B^2 по следующим отношениям эквивалентности гомеоморфны B^2:

(a) $(x, y) \sim (-x, -y)$,

(b) $(x, y) \sim (x, -y)$.

4.30. Докажите, что факторпространство замкнутого шара B^n по его разбиению на одноточечные подмножества открытого шара D^n и граничную сферу S^{n-1} гомеоморфно сфере S^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Дополнительные задачи.

4.1x. Будет ли невырожденное аффинное отображение нормированного пространства в себя гомеоморфизмом?

4.2x. Пусть X пространство без изолированных точек. Существует ли функция разрывная во всех точках X?

4.3x. Опишите прообразы точек при непрерывном отображении прямой в топологии Зарисского на себя.

4.4x. Отображение $f : X \to Y$ линейно упорядоченных пространств X и Y строго монотонно возрастает (убывает), если $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$) при $a < b$. Доказать, что сюръективное строго монотонно возрастающее (или убывающее) отображение линейно упорядоченных множеств является гомеморфизмом относительно интервальных топологий. Можно ли откзаться от условия сюръективности или строгой монотонности для сохранения непрерывности?

4.5x. Существуют ли негомеоморфные пространства X и Y для которых определены непрерывные биекции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$?

4.6x. Всякая ли непрерывная биекция прямой Зоргенфрея (прямой в топологии Зарисского) является гомеоморфизмом?

4.7x. Доказать, что любое счетное метрическое пространство вложимо в $\mathbb{Q}$.

4.8x. Докажите, что в пространство $C[0, 1]$ — непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$ изометрически вкладывается любое сепарабельное (т.е. содержащее счетное всюду плотное подмножество) метрическое пространство.

4.9x. Докажите, что любое замкнутое выпуклое подмножество плоскости гомеоморфно или точке, или отрезку, или кругу, или лучу, или прямой, или полосе, или полуплоскости, или плоскости.

4.10x. Докажите, что $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^1 \cup \{(1, 1, 1)\})$.

4.11x. Докажите, что предел равномерно сходящейся последовательности гомеоморфизмов отрезка $[0, 1]$ может не быть его гомеоморфизмом.

4.12x. l^∞ — множество ограниченных последовательностей вещественных чисел с нормой $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что множество $\{x \in l^\infty : |x_n| = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$ гомеоморфно канторову множеству.

4.13x. Докажите, что пространство Бэра гомеоморфно пространству иррациональных чисел.

4.14x. Существует ли непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$?

4.15x. Существует ли геомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$ и замкнутой верхней полуплоскости?

Задание N 3[1]

A. *Аксиомы отделимости (Определения 15.1, 15.5, 15.6, 15.7, 15.8). Вторая аксиома счетности, сепарабельность (Определение 16.2), первая аксиома счетности (Определение 16.4).*

5.1. Доказать, что среди T_1-топологий на пространстве существует наименьшая. В частности, топология Зарисского — наименьшая T_1 топология на $\mathbb{R}$.

5.2. Доказать, что следующие условия на пространстве X эквивалентны:

(a) X — T_1-пространство;

(b) все одноточечные подмножества X замкнуты.

5.3. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность точек не может иметь более одного предела.

5.4. Привести пример T_1-пространства и последовательность точек в нем, имеющей ровно n пределов, где $n \in \mathbb{N}$ или бесконечно.

5.5. Докажите, что всякое подпространство T_0 (соответственно T_1, T_2, регулярного) пространства является T_0-(соответсвенно T_1-, T_2-, регулярным) пространством. Докажите, что всякое замкнутое подмножество нормального пространства является нормальным пространством.

5.6. Какие из аксиом отделимости сохраняются в сторону образа при непрерывных отображениях?

5.7. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) нормальным пространством? Будет ли прямая в топологии Зарисского регулярным пространством?

5.8. Проверьте верность утверждений:

(a) непрерывный образ всюду плотного множества всюду плотен;

(b) непрерывный образ нигде не плотного множества нигде не плотен.

5.9. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, множество, являющееся решением полиномиального (от координат точки) уравнения $f(P) = 0$, $P \in \mathbb{R}^n$, или нигде не плотно, или совпадает с $\mathbb{R}^n$.

5.10. Найдите (опишите все) топологии на множестве X, для которых всюду плотно одноточечное множество $\{x\}$, где $x \in X$.

5.11. Будет ли пересечение всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?

5.12. Докажите, что граница замкнутого (открытого) множества нигде не плотна. Приведите пример пространства и его подмножества, со всюду плотной границей.

5.13. Докажите, что если A нигде не плотное подмножество, то $\mathrm{Cl}A$ также нигде не плотное подмножество.

5.14. Докажите, что базой топологии метрического пространства является множество открытых шаров рациональных радиусов, центрами которых являются точки произвольного всюду плотного подмножества.

5.15. Докажите, что в любом подмножестве $\mathbb{R}$ имеется счетное всюду плотное подмножество.

5.16. Доказать, что для непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y множество точек совпадения $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

5.17. Если пространство имеет счетную базу, то говорят, что оно удовлетворяет второй аксиоме счетности. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из любой его базы можно выбрать счетное семейство, являющееся базой.

5.18. Пространство сепарабельно, если оно имеет счетное всюду плотное подмножество. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно сепарабельно.

5.19. Докажите, что сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности. Тем самым метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности в том и только том случае, если оно сепарабельно.

5.20. Существует ли не сепарабельное метрическое пространство?

5.21. Базой окрестностей точки x пространства X называется совокупность ее окрестностей такая, что всякая окрестность точки x содержит окрестность из этой совокупности. Какова минимальная база в точках дискретного пространства?

5.22. Если пространство имеет счетную базу во всех точках, то говорят, что оно удовлетворяет первой аксиоме счетности. Доказать, что метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

5.23. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности. Верна ли обратная импликация?

5.24. Докажите, что пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, хаусдорфово в том и только том случае, если любая последовательность точек в нем имеет не более одного предела.

[1]Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

5.25. Докажите, что в пространстве X, удовлетворяющем первой аксиоме счетности, замыкание любого подмножества A совпадает с множеством пределов всевозможных последовательностей точек множества A.

5.26. Сохраняются ли первая (вторая) аксиома счетности, сепарабельность пространства в сторону образа при непрерывных отображениях?

5.27. Будет ли факторпространство пространства, удовлетворяющего первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворять первой (второй) аксиоме счетности?

5.28. Будет ли факторпространство нормального пространства удовлетворять аксиоме T_0?

5.29. Удовлетворяет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) второй аксиоме счетности? Являются ли они сепарабельными пространствами?

5.30. Удовлетворяет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) первой аксиоме счетности?

5.31. Докажите, что в любом конечном T_0-пространстве
а) существует изолированная точка;
б) множество изолированных точек всюду плотно.

Дополнительные задачи.

5.1x. Является ли $\mathbb{Q}$ пересечением счетного числа открытых в $\mathbb{R}$ подмножеств?

5.2x. Найти минимальную мощность всюду плотных подмножеств пространства ℓ_2, прямой Зоргенфрея, пространства Бэра, "метризуемого ежа". Докажите, что любое бесконечное подмножество прямой в топологии Зарисского является всюду плотным.

5.3x. Можно ли в Задаче 5.16 отказаться от условия хаусдорфовости образа?

5.4x. Докажите, что любое счетное регулярное пространство нормально.

5.5x. Привести пример нормального пространства и его не нормального подмножества.

5.6x. Доказать, что любое замкнутое подмножество A канторова множества C является его ретрактом (т.е. существует непрерывная сюръекция $r : C \to A$ такая, что $r \circ r = r$).

5.7x. Существует ли регулярное пространство X, содержащее более двух точек, на котором любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ постояна?

5.8x. Докажите, что линейно упорядоченное пространство с интервальной топологией нормально.

5.9x. Существует ли сепарабельное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности? А если условие сепарабельности заменить на условие счетности пространства?

5.10x. Докажите, что любое сепарабельное метрическое пространство вложимо в ℓ_2.

5.11x. Существует ли счетное пространство, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности?

5.12x. Привести пример сепарабельного пространства и его не сепарабельного подпространства.

B. *Лемма Урысона и Теорема Брауэра–Титце–Урысона (§15.10).*

6.1. Постройте непрерывную функцию на плоскости $\mathbb{R}^2$, принимающую значение 0 на осях координат Ox и Oy и значение 1 на графике гиперболы $y = 1/x$.

6.2. Докажите, что любое метрическое пространство нормально.

6.3. Доказать, что любое непрерывное отображение канторова множества на отрезок является сужением непрерывного отображения отрезка на себя.

6.4. Доказать, что любую равномерно непрерывную функцию на интервале $(0, 1)$ можно продолжить на $\mathbb{R}$.

6.5. Пусть A — замкнутое подмножество метрического пространства X, $f : A \to I$ — непрерывное отображение. Доказать, что отображение

$$g(x) = \begin{cases} \inf\{f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 : a \in A\} & x \in X \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

является непрерывным продолжением f, где d — метрика на X.

Дополнительные задачи.

6.1x. Можно ли в теореме Брауэра–Титце–Урысона рассматривать продолжения отображений в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, в сферы S^n, $n \geq 1$?

6.2x. Доказать, что любое непрерывное отображение канторова множества на квадрат является сужением непрерывного отображения отрезка на квадрат.

6.3x. Можно ли в задаче 6.4 заменить интервал на произвольное подмножество $\mathbb{R}$?

6.4x. Пусть для любой точки $x \in X$ функция f, определенная на всюду плотном подмножестве $A \subset X$, продолжается до непрерывной функции на $A \cup \{x\}$. Существует ли ее непрерывное продолжение на X?

Задание N 4[1]

A. *Топологическое произведение (Определение 20.3), график отображения (Определение 20.2).*

4.1. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$. Проверьте выполнение равенств:

(a) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}A \times \mathrm{Int}B$;

(b) $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}A \times \mathrm{Cl}B$;

(c) $\mathrm{Bd}(A \times B) = \mathrm{Bd}A \times \mathrm{Bd}B$;

(d) $\mathrm{Bd}(A \times B) = (\mathrm{Bd}A \times B) \cup (A \times \mathrm{Bd}B)$;

4.2. Докажите, что n-ая степень прямой $\mathbb{R}$ (отрезка $I = [0, 1]$) гомеоморфна $\mathbb{R}^n$ (кубу I^n), $n \in \mathbb{N}$.

4.3. Докажите, что при проектировании $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ образ открытого подмножества произведения $X \times Y$ открыт в X (т.е. проектирование — открытое отображение). Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произведения любого количества пространств. Выполнено ли аналогичное утверждение для замкнутых подмножеств?

4.4. Докажите, что пространство X хаусдорфово в том и только том случае, если диагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ произведения замкнута в $X \times X$.

4.5. Для отображения $f : X \to Y$ множество $\{(x, f(x)) \subset X \times Y : x \in X\}$ называется графиком отображения. Докажите гомеоморфность пространства X и графика его произвольного непрерывного отображения $f : X \to Y$. Верно ли утверждение для произвольного отображения?

4.6. Докажите, что для непрерывного отображения пространства X в хаусдорфово пространство Y график отображения замкнут в $X \times Y$. Верна ли обратная импликация?

4.7. Докажите, что счетные произведения сепарабельных (удовлетворяющих первой аксиоме счетности, удовлетворяющих второй аксиоме счетности) пространств сепарабельно (удовлетворяет первой аксиоме счетности, удовлетворяет второй аксиоме счетности).

4.8. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ гомеоморфно $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$, $n, k \in \mathbb{N}$, где S^m — m-мерная сфера.

4.9. $T^k = S^1 \times \dots \times S^1$ — k-мерный тор. Вложите T^k в $\mathbb{R}^{k+1}$.

4.10. Вложите $S^1 \times B^2$, $S^1 \times S^1 \times I$, $S^2 \times I$ в $\mathbb{R}^3$, где B^2 — замкнутый круг единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$, S^2 — двумерная сфера.

Дополнительные задачи.

7.1x. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$. Найдите формулу, выражающую $\mathrm{Bd}(A \times B)$ через $\mathrm{Cl}A$, $\mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}B$.

7.2x. Докажите, что несчетное произведение прямых не нормально.

7.3x. Докажите, что произведение континуума сепарабельных пространств сепарабельно. Будет ли сепарабельно произведение более континуума хаусдорфовых пространств?

7.4x. Докажите, что в произведении сепарабельных пространств любое семейство попарно дизъюнктных непустых открытых множеств счетно (произведение сепарабельных пространств удовлетворяет условию Суслина).

7.5x. Пусть $\Pi\{X_s : s \in S\}$ — произведение сепарабельных пространств и $f : \Pi\{X_s : s \in S\} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что существует счетное подмножество $S_0 \subset S$ и непрерывная функция $f_0 : \Pi\{X_s : s \in S_0\} \to \mathbb{R}$ такие, что $f = f_0 \circ \mathrm{pr}_{S_0}$, где pr_{S_0} — проектирование произведения $\Pi\{X_s : s \in S\}$ на счетное подпроизведение $\Pi\{X_s : s \in S_0\}$ (т.е. функция зависит от счетного множества координат).

B. *Склеивание пространств (Определение 22.13), лента Мебиуса (Определение 22.5), бутылка Клейна (Определение 22.8), проективная плоскость (Определение 22.9).*

4.11. Докажите, что факторпространство квадрата $I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без двух сторон $(0, 1) \times I$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, t)\}$, $t \in I$, гомеоморфно цилиндру $S^1 \times I$.

4.12. Докажите, что факторпространство

(a) цилиндра $S^1 \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества $S^1 \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(t, 0), (t, 1)\}$, $t \in S^1$,

(b) квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, t)\}, \{(t, 0), (t, 1)\}$, $t \in I$,

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

4.13. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1) \times (0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,t)\}, \{(t,0),(1-t,1)\}$, $t \in I$, называется бутылкой Клейна. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1) \times [0,1]$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,1-t)\}$, $t \in I$, называется лентой Мебиуса.

Представьте бутылку Клейна как результат

(a) факторизации цилиндра,

(b) факторизации ленты Мебиуса,

(c) склейки по границам двух копий ленты Мебиуса посредством тождественного отображения,

(d) склейки по границам двух копий цилиндра.

4.14. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1) \times (0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,1-t)\}, \{(t,0),(1-t,1)\}$, $t \in I$, называется проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$.

Получить проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$

(a) как результат склейки по границе диска B^2 и ленты Мебиуса,

(b) из конуса окружности, факторизацией основания,

(c) как результат факторизации ленты Мебиуса.

Дополнительные задачи.

7.6x. Представьте ленту Мебиуса как факторпространство цилиндра.

7.7x. Введя естественную топологию на множестве всех прямых на плоскости, докажите, что полученное пространство гомеоморфно ленте Мебиуса.

7.8x. Введя естественную топологию на множестве всех отрезков единичной длины на плоскости, докажите, что полученное пространство гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

7.9x. Чему гомеоморфно факторпространства B^3 по отношению эквивалентности $(x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$.

7.10x. Введя естественную топологию на множестве поворотов $\mathbb{R}^3$ вокруг всевозможных прямых, проходящих через начало координат, на всевозможные углы, докажите, что полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

Задание N 5[1]

A. *Компактность (Определение 17.1), Секвенциальная компактность (Определение 18.1).*

5.1. Докажите, что в регулярном пространстве для любых дизъюнктных замкнутого и компактного подмножеств существуют их дизъюнктные окрестности. Тем самым компактное хаусдорфово пространство нормально.

5.2. Доказать, что если в произведении пространств X и Y сомножитель Y компактен, то проекция $X \times Y \to X$ — замкнутое отображение.

5.3. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{O}_1$ и компактная $\mathcal{O}_2$ топологии. Показать, что если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

5.4. Докажите, что отображение $f : X \to Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.

5.5. Пусть X — хаусдорфово пространство, K_α, $\alpha \in A$, — семейство компактных подмножеств, U — окрестность $\cap\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Тогда существует конечное подмножество $A_{Fin} \subset A$ такое, что $\cap\{K_\alpha : \alpha \in A_{Fin}\} \subset U$.

5.6. Докажите, что любое некомпактное метрическое пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подмножество.

5.7. Докажите, что на любом некомпактном метрическое пространстве X существует непрерывная функция $f : X \to (0, 1]$, для которой $\inf\{f(x) : x \in X\} = 0$.

5.8. Доказать, что любая непрерывная функция на метрическом компакте X равномерно непрерывна (т.е. для любой функции $f : X \to \mathbb{R}$ и любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что образ множества диаметра меньше δ имеет диаметр меньше ϵ).

5.9. (Теорема Лебега о покрытиях) Доказать, что для любого открытого покрытия ω метрического компакта X существует $\epsilon > 0$ такое, что покрытие X из открытых шаров радиуса ϵ вписано в покрытие ω. Можно ли условие компактности метрического пространства заменить условием рассмотрения конечных покрытий?

5.10. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) компактным пространством?

5.11. Какие подмножества прямой Зоргенфрея являются компактными?

5.12. Рассмотрите линейное упорядочение на квадрате I^2: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что квадрат с интервальной топологией заданного линейного порядка (лексикографически упорядоченный квадрат) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабелен.

5.13. Докажите, что подмножество $(0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1) \times \{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство "Две стрелки Александрова") компактно, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

5.14. Докажите, что непрерывное биективное открытое (соответственно замкнутое) отображение является гомеоморфизмом.

5.15. Докажите, что непрерывное сюръективное открытое (соответственно замкнутое) отображение является факторотображением.

5.16. Пусть $f : X \to Y$ — замкнутое отображение, $A \subset Y$, U — открытая окрестность $f^{-1}(A)$ в X. Докажите, что существует открытая окрестность V множества A в Y такая, что $f^{-1}(V) \subset U$.

5.17. Установите гомеоморфность канторова множества и счетного произведения дискретных двоеточий.

5.18. Докажите, что канторово множество C однородно, т.е. для любых точек $x, y \in C$ существует гомеоморфизм $h : C \to C$, при котором $h(x) = y$.

5.19. Пусть X или канторово множество, или гильбертов куб $Q = [0, 1]^\infty$. Докажите, что X^n гомеоморфно X для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

5.20. Какие из подмножеств пространства матриц $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ компактны:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$;

(c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$?

5.21. Докажите, что для любого компактного подмножества K метрического пространства X существуют точки $x, y \in K$ такие, что $\mathrm{diam} X = \rho(x, y)$.

5.22. Метрическое пространство полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел. Подмножество A метрического пространства вполне ограничено, если для любого $\epsilon > 0$ из семейства открытых шаров радиуса ϵ, покрывающего A, можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее A. Доказать, что подмножество A полного метрического пространства X компактно в том и только том случае, если оно замкнуто и вполне ограничено. Показать, что условие вполне ограниченности нельзя заменить на условие ограниченности.

Дополнительные задачи.

[1]Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

5.1х. Будут ли компактами пространство Бэра, метризуемый еж?

5.2х. *"Компактный еж"*. Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0,1]$, который обозначим через $[0,1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0,1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим топологию: на полуинтервалах $(0,1]_\lambda, \lambda \in \Lambda$ — обычная интервальная топология, базисными окрестностями $\{0\}$ являются объединения конечного числа полуинтервалов $[0, a(\lambda))_\lambda, 0 < a(\lambda), \lambda \in \Lambda_{Fin} \subset \Lambda$, и всех отрезков $[0,1]_\lambda$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_{Fin}$. Показать, что топология корректно задана, компактный еж — компактен. Сравнить топологии метризуемого и компактного ежей.

5.3х. Доказать сепарабельность метрического пространства $C(K)$ (непрерывных функций на метризуемом компакте K с топологией равномерной сходимости).

5.4х. (Теорема Стоуна-Вейерштрасса) Доказать, что кольцо непрерывных вещественных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X, содержащее все постоянные функции, разделяющее точки и замкнутые подмножества (т.е. для любых точки x и замкнутого множества F, $x \notin F$ существует непрерывная функция $f : X \to I = [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$, $F \subset f^{-1}(1)$) и замкнутое в топологии равномерной сходимости совпадает с кольцом всех непрерывных функций.

5.5х. Докажите, что любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны (задают одну и ту же топологию). Верно ли утверждение для произвольного линейного пространства?

5.6х. Доказать, что для любого компактного подмножества K в $\mathbb{R}^\infty$ существует гомеоморфизм $\mathbb{R}^\infty$, при котором K отображается в подмножество, проекция которого на один из сомножителей одноточечна.

5.7х. (Теорема Банаха от открытом отображении) Линейное непрерывное сюръективное отображение банаховых пространств открыто.

5.8х. Приведите пример пространства X такого, что X^n гомеоморфно X для любого $n \in \mathbb{N}$, а X^∞ не гомеоморфно X.

5.9х. Докажите, что подмножество $X = \{x \in \ell_2 : |x_n| \leq 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ компактно. Гомеоморфно ли оно гильбертову кубу?

5.10х. Какие подмножества прямой Зоргенфрея ей гомеоморфны?

B. *Метризуемость (Определение 4.11). Эквивалентные метрики (Определение 4.12).*

5.23. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x,y) \leq k_2\rho_2(x,y)$ и $\rho_2(x,y) \leq k_1\rho_1(x,y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

5.24. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$, заданные формулами $\rho_1(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ и $\rho_2(x,y) = \rho(x,y)/(1+\rho(x,y))$, эквивалентны метрике ρ.

5.25. Эквивалентны ли метрики из задачи 1.2?

5.26. Будут ли эквивалентны метрики в задаче 1.8?

5.27. Доказать, что две метрики на одном и том же множестве эквивалентны тогда и только тогда, когда всякая последовательность точек этого множества, которая сходится в одной метрике, сходится и в другой.

5.28. Покажите, что любое нормальное пространство со счетной базой является всюду плотным подмножеством метризуемого компакта.

5.29. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^\infty$ — линейное топологическое пространство (естественно определенные операции сложения и умножения на вещественные числа непрерывны).

5.30. Докажите, что любое подпространство $\mathbb{R}^\infty$, содержащее подмножество $\{x \in \mathbb{R}^\infty : |\{x_n \neq 0\}| < \infty\}$, не нормируемо.

5.31. Докажите, что топология ℓ_2 сильнее топологии на ℓ_2 как на подпространстве $\mathbb{R}^\infty$.

5.32. Доказать, что метризуемое пространство X компактно в том и только том случае, если любая вещественная функция на X ограничена.

5.33. Доказать, что для метризуемых пространств условия компактности и секвенциальной компактности (любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность) эквивалентны.

5.34. Доказать, что метризуемый компакт сепарабелен и удовлетворяет второй аксиоме счетности.

5.35. Доказать, что для любых метрик ρ_1 и ρ_2 на метризуемом компакте X выполнено следующее условие: для любого $\epsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для любых точек $x, y \in X$ $\rho_2(x,y) < \epsilon$ как только $\rho_1(x,y) < \delta_1$ и $\rho_1(x,y) < \epsilon$ как только $\rho_2(x,y) < \delta_2$.

Дополнительные задачи.

5.11х. Покажите, что любой метризуемый компакт является непрерывным образом канторова множества (т.е. является диадическим компактом).

5.12х. Метризуема ли прямая в топологии Зарисского? Прямая Зоргенфрея?

5.13х. Доказать, что регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.

5.14x. (Теорема Стоуна) Доказать, что каждое метризуемое пространство паракомпактно (Определение 19.5x).

5.15x. Пространство полно метризуемо, если существует полная метрика, порождающая топологию пространства. Привести пример метризуемого не полно метризуемого пространства.

5.16x. Доказать, что полно метризуемое пространство является G_δ-подмножеством (т.е. пересечением счетного числа открытых подмножеств) любого содержащего его компактного пространства.

5.17x. Существует ли метризуемое, не полно метризуемое пространство, и счетное семейство открытых всюду плотных подмножеств, пересечение которых всюду плотно (т.е. выполено свойство Бэра)?

5.18x. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве вполне ограничена, то пространство компактно.

5.19x. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве полна, то пространство компактно.

Задание N 6[1]

C. *Связность (Определение 12.1), Компонента связности (Определение 12.4), Вполне несвязные пространства (Определение 12.5), Линейная связность (Определение 14.2), Компонента линейной связности (Определение 14.5).*

6.1. Докажите, что объединение семейства попарно пересекающихся связных подмножеств связно.

6.2. Пусть $A \cap B$ и $A \cup B$ — связные множества. Верно ли, что A и B — связные множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?

6.3. Пусть $A \cap B$ и $A \cup B$ — линейно связные множества. Верно ли, что A и B — линейно связные множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?

6.4. Верно ли, что пересечение связных множеств связно? Будет ли счетное пересечение связных множеств A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно?

6.5. Докажите, что счетное пересечение связных компактных подмножеств хаусдорфова пространства A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно.

6.6. Будет ли внутренность (линейно) связного множества (линейна) связна?

6.7. Будет ли замыкание линейно связного множества линейно связно?

6.8. Будет ли прообраз при непрерывном отображении связного множества связен, если прообраз любой точки связен?

6.9. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ монотонно, если все прообразы $f^{-1}(y)$ точек связны. Докажите, что при монотонном фактороотображении прообраз открытого связного множества связен.

6.10. Доказать, что произведение (линейно) связных пространств (линейно) связно.

6.11. Пусть I и O — замкнутая и открытая компоненты линейной связности компакта $X = $ "$\sin 1/x$". Докажите, что если при непрерывном отображении $f : X \to X$ существует точка $x \in O$, для которой $f(x) \in I$, то и $f(X) \subset I$.

6.12. Докажите, что счетное нормальное пространство несвязно. Оцените снизу мощность бесконечного нормального связного пространства.

6.13. Доказать связность отрезка, пространств $\mathbb{R}^n$ и сфер S^n, $n \in \mathbb{N}$.

6.14. Доказать, что открытое подмножество прямой $\mathbb{R}^1$ имеет счетное число компонент связности.

6.15. Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, не гомеоморфны.

6.16. Докажите, что канторово множество и прямая Зоргенфрея вполне несвязны.

6.17. Докажите, что для подмножеств прямой связность и линейная связность эквивалентны.

6.18. Найти компоненты связности и линейной связности следующих подпространств вещественных матриц:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A$ — ортогональная матрица $\}$;

(c) $\mathrm{Symm}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A\}$?

Дополнительные задачи.

6.1x. Верно ли утверждение, что функция на отрезке непрерывна в том и только том случае, если образ любого отрезка отрезок?

6.2x. Постройте счетное хаусдорфово связное пространство.

6.3x. Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существует единственная прямая, параллельная фиксированной прямой l, которая делит A на два множества равной площади.

6.4x. Докажите, что если A и B — открытые связные ограниченные множества на плоскости, то существует прямая, которая делит каждое из множеств A и B на два множества равной площади.

6.5x. Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существуют две перпендикулярные прямые, которые делят A на четыре множества равной площади.

6.6x. Найти компоненты связности и линейной связности следующих подпространств комплексных матриц:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A$ — унитарная матрица $\}$;

(c) $\mathrm{Herm}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A^T = \bar{A}\}$?

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

6.7x. Доказать, что связный компакт нельзя представить в виде объединение счётного числа непустых попарно непересекающихся связных замкнутых подмножеств. Можно ли отказаться от условия компактности?

6.8x. **Веер Кнастера-Куратовского.** Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy на плоскости $\mathbb{R}^2$. На отрезке $[0, 1]$ оси Ox рассмотрим стандартное канторово множество $\mathcal{C}$. Соединим прямолинейным отрезком каждую точку x множества $\mathcal{C}$ с точкой $a = (1/2, 1/2)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ и обозначим этот отрезок через $[a, x]$. Если точка $x \in \mathcal{C}$ первого рода (т.е. она является концом смежного к $\mathcal{C}$ интервала), то на отрезке $[a, x]$ берём все точки, у которых вторая координата рациональна, в противном случае на отрезке $[a, x]$ берём все точки, у которых вторая координата иррациональна. Все выбранные точки и составляют веер Кнастера-Куратовского, который обозначим через $\mathcal{K}$. Доказать связность построенного пространства. Является ли подмножество $\mathcal{K} \setminus \{a\} \subset \mathcal{K}$ вполне несвязным? а индуктивно-нульмерным?

6.9x. Доказать, что множество точек гильбертова пространства ℓ_2 все координаты которых рациональны вполне несвязно, но не индуктивно-нульмерно.

6.10x. Докажите, что любой индуктивно-нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек гомеоморфен канторову множеству.

6.11x. Докажите, что любое счетное метризуемое пространство без изолированных точек гомеоморфно пространству рациональных чисел.

6.12x. Точка x связного пространства X называется разбивающей, если $X \setminus \{x\}$ — несвязно. Докажите, что если сепарабельный связный метризуемый компакт имеет ровно две неразбивающие точки, то X гомеоморфно отрезку $[0, 1]$.

6.13x. Построить пространство, все точки которого разбивающие порядка n, $n \in \mathbb{N}$. Может ли пространство быть компактным? метризуемым?

6.14x. Докажите, что связный и локально связный метризуемый компакт линейно связен.

6.15x. Докажите, что любое непрерывное отображение компакта $X =$ "$\sin 1/x$" на себя имеет неподвижную точку.

6.16x. Приведите пример двух связных компактов, каждый из которых нельзя сюръективно и непрерывно отобразить на другой.

6.17x. Докажите, что любое открытое связное подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, линейно связно. Можно ли откзаться от требования открытости?

6.18x. Существуют ли три связных открытых подмножества плоскости с общей границей?

6.19x. Докажите, что любое связное конечное пространство линейно связно.

Задание N 7[1]

A. *Пространства непрерывных отображений (S 25.1x.), Компактно-открытая топология (Определение 25.2x.), Метрика равномерной сходимости (Определение 25.4x.), Отображения $X \times Y \to Z$ и $X \to C(X,Y)$ (Определение 25.6x.), Пути (Определение 14.1.), Петли (Определение 32.1.).*

7.1. $C(X,Y)$ — множество непрерывных отображений из пространства X в пространство Y. Когда мощность множества $C(X,Y)$ совпадает с мощностью пространства Y?

7.2. Можно ли в определении компактно-открытой топологии на множестве отображений заменить компактные подмножества на конечные подмножества?

7.3. Пусть X — метризуемое пространство. Доказать, что множество путей (петель) в компактно-открытой топологии метризуемо.

7.4. Доказать, что пространство гомеоморфизмов отрезка $[0,1]$ имеет две компоненты связности.

Дополнительные задачи.

7.1x. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, Y — метрическое пространство. Доказать, что компактно-открытая топология на множестве $C(X,Y)$ совпадает с топологией равномерной сходимости.

7.2x. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, а Y — полное метрическое пространство. Тогда множество $C(X,Y)$ в компактно-открытой топологии является полным метрическим пространством.

7.3x. Пусть X — метризуемое компактное пространство, Y — сепарабельное метризуемое пространство. Доказать, что множество $C(X,Y)$ в компактно-открытой топологии сепарабельно.

7.4x. Семейство функций $\mathcal{F} \subset C(X)$ на метрическом пространстве X называется равностепенно непрерывным в точке x, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ для любых $f \in \mathcal{F}$, $t \in X$, $\rho(x,t) < \delta$.

(Теорема Арцела–Асколи.) Докажите, что замкнутое подмножество $\mathcal{F} \subset C(K)$, где K — метризуемый компакт, компактно в том и только том случае, когда оно равностепенно непрерывно в каждой точке K и ограничено.

B. *Гомотопия отображений (Определение 30.2), Гомотопическая эквивалентность (Определение 39.1), Стягиваемое пространство (Определение 39.6).*

7.5. Докажите гомотопность любых непрерывных не сюръективных отображений $f, g : X \to \mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

7.6. Будут ли гомотопны любые два непрерывных отображения в линейно связное пространство?

7.7. Когда гомотопны два постоянных отображения?

7.8. Если $h : A \to X, f, f' : X \to Y, g : Y \to B$ — непрерывные отображения, и $F : X \times I \to Y$ — гомотопия между f и f', то $g \circ F \circ (h \times id)$ — гомотопия между $g \circ f \circ h$ и $g \circ f' \circ h : A \to B$, где id — тождественное отображение отрезка I.

7.9. Непрерывные отображения $f, g : X \to Y \times Z$ гомотопны в том и только том случае, если гомотопны пары композиций $pr_Y \circ f$, $pr_Y \circ g$ и $pr_Z \circ f$, $pr_Z \circ g$, где pr_Y и pr_Z — проекции в произведении на соответствующие сомножители.

7.10. Докажите, что все отображения отрезка в сферу S^2 гомотопны.

7.11. Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств совпадает число компонент (линейной) связности.

7.12. Найдите счетное число попарно гомотопически эквивалентных пространств, не являющихся попарно гомеоморфными.

7.13. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) окружности S^1 и плоскости с выкинутой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$;

(2) окружности S^1 и ленты Мебиуса.

7.14. Докажите, что стягиваемое пространство линейно связно. Верна ли обратная импликация?

7.15. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между их гомотопическими классами отображений в произвольное пространство.

7.16. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений произвольного пространства Z в X и Y соответственно.

7.17. Доказать, что для линейно связного пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) X — стягиваемо;

(2) $\pi(X,Y)$ тривиально для любого линейно связного пространства Y;

(3) $\pi(Y,X)$ тривиально для любого пространства Y.

[1]Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

7.18. Сколько гомотопических классов отображений стягиваемого пространства в произвольное пространство?

7.19. Докажите, что произведение $X \times Y$ пространств X и Y стягиваемо в том и только том случае, если пространства X и Y стягиваемы. Верен ли аналогичный результат для счетного (произвольного) числа сомножетелей?

7.20. Докажите, что любое линейное пространство над полем вещественных чисел стягиваемо.

7.21. Докажите, что ректракт стягиваемого пространства стягиваем.

7.22. Доказать, что $\mathrm{Con}(X)$ стягиваем для любого пространства X.

Дополнительные задачи.

7.5x. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) тора T^2 с замкнутыми дисками B^2, приклеенными по границе с меридианом и по границе с параллелью, и сферы S^2;

(2) пространства невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ и ортогональных матриц $O(n)$.

7.6x. Докажите, что бесконечномерная сфера S^∞ (сфера в гильбертовом пространстве) стягиваема.

7.7x. Доказать, что любая связная конечномерная группа Ли (множество, на котором заданы согласованные структуры группы и гладкого многообразия) гомотопически эквивалентна компактной группе Ли.

C. *Фундаментальная группа (Определение 32.1 и Определение 32.3), Односвязность (Определение 32.6).*

7.23. Вычислить фундаментальную группу:

(1) дискретного пространства;

(3) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(3) S^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

(4) $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

7.24. Докажите, что если пространство X односвязно, то любое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} : D^2 \to X$.

7.25. Доказать, что для любого непрерывного отображения f пространств с отмеченными точками отображение f_* является гомоморфизмом их фундаментальных групп.
Доказать, что для любых гомотопных непрерывных отображений f и g пространств с отмеченными точками $f_* = g_*$.
Доказать, что фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

7.26. Докажите гомотопическую эквивалентность тора T^2 с вырезанным диском D^2 (т.е. ручки) и букета двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$.

7.27. (Теорема Брауэра о неподвижной точке.) Докажите, что любое непрерывное отображение замкнутого диска B^2 в себя имеет неподвижную точку.

7.28. Доказать, что при любом гомеоморфизме B^2 точки из границы S^1 отображаются в точки из границы.

7.29. Доказать, что не существует ретракции замкнутого диска B^2 на граничную окружность S^1.

7.30. Доказать основную теорему алгебры: любой многочлен над полем комплексных чисел степени ≥ 1 имеет корень.

7.31. Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Замкнутое подмножество C называется перегородкой между A и B в X, если $X \setminus C = O \cup U$, где
$O \cap U = \emptyset$, $A \subset O$, $B \subset U$.
Докажите, что любые две перегородки C_1, C_2 между $A_1 = \{0\} \times I$ и $A_2 = \{1\} \times I$, и $B_1 = I \times \{0\}$ и $B_2 = I \times \{1\}$ в I^2 соответственно, пересекаются.

7.32. Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^1$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

Дополнительные задачи.

7.8x. Пусть множества U и V открыты в X. Докажите, что если множества $U \cap V$ и $U \cup V$ односвязны, то и множества U и V односвязны.

7.9x. Привести пример линейно связного пространства, фундаментальная группа которого не абелева.

7.10x. Докажите формулу:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

7.11x. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы абелева.

7.12x. Привести пример односвязного линейно связного пространства, которое не стягиваемо.

7.13x. Верно ли, что пространство стягиваемо, если все его гомотопические группы (классы гомотопических эквивалентностей отображений сфер S^n в пространство) тривиальны?

7.14x. Докажите гомотопическую эквивалентность сферы S^2 с отождествленной парой точек и букета сферы и окружности $S^2 \bigvee S^1$.

7.15x. Докажите, что связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

7.16x. Привести пример пространств X и Y, подмножества A пространства X и непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ таких, что $f|_A = g|_A$, которые гомотопны, но не A-гомотопны.

7.17x. Вычислить фундаментальную группу букета окружностей.

7.18x. Вычислить фундаментальные группы двумерных компактных поверхностей.

7.19x. Вычислить фундаментальные группы проективных пространств $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$.

7.20x. Какие группы реализуются как фундаментальные группы связных конечных графов?

7.21x. Вычислить фундаментальную группу:

(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$;

(b) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$;

(c) $\mathrm{SU}(n, \mathbb{R})$.

7.22x. Пусть $f : S^1 \to S^1$ такое непрерывное отображение, что $f(t) \neq f(-t)$ для любой точки $t \in S^1$. Докажите, что $f \sim \mathrm{id}$.

7.23x. (Теорема Борсука–Улама.) Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^2 \to \mathbb{C}$ существует точка $t \in S^2$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

7.24x. Докажите, что для любой пары непрерывных функций $f_1, f_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^2$ такая, что $f_1(t) = f_2(-t)$.

7.25x. Докажите, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$.

7.26x. Докажите, что не существует пространства X такого, что $X \times X$ гомеоморфно $\mathbb{R}$.

7.27x. Докажите, что в любом замкнутом покрытии $\{F, T\}$ окружности S^1 существует элемент, содержащий пару противоположных точек. Сформулируйте и докажите соответствующее утверждении для сферы S^2.

7.28x. Непрерывным касательным векторным полем на сфере $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ называется непрерывное отображение $V : S^2 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $x \in S^2$ и $f(x)$ ортогональны.

(Теорема Пуанкаре.) У любого непрерывного касательного векторного поля V на сфере S^2 существует точка $x \in S^2$, в которой $V(x) = (0, 0, 0)$.

7.29x. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f : S^2 \to S^2$ или существует неподвижная точка, или точка, для которой $f(x) = -x$.