Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 14.

Гиперповерхности второго порядка.

§1. Функции, представляемые многочленами.

Пусть P — действительное аффинное, либо аффинно-евклидово пространство и в нем зафиксирована система координат.

Многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задает функцию $F(M)$, которая сопоставляет текущей точке M пространства с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ в этой зафиксированной системе координат действительное число $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Лемма 1.1. *Если многочлен $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ задает функцию, тождественно равную нулю, то все его коэффициенты равны нулю $a_k = a_{k-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$.*

Доказательство. Ненулевой многочлен степени k имеет не более k корней. Если функция, задаваемая многочленом тождественно равную нулю, то он обязан быть нулевым, дает требуемое. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Если многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задает на прямой функцию, тождественно равную нулю, то все его коэффициенты равны нулю.*

Доказательство поведем индукцией по n . При $n = 1$ доказываемое установлено в лемме 1.1.

Пусть утверждение доказано для $n - 1 \geq 1$. Докажем его для n . Сгруппируем слагаемые в многочлене $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по степеням x_n :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n^k f_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) +$$

$$+x_n^{k-1}f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + \dots + x_n f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + f_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

При фиксированных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ имеем многочлен

$$g(x_n) = a_k x_n^k + a_{k-1} x_n^{k-1} + \dots + a_1 x_n + a_0$$

с

$$\begin{cases} a_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ a_{k-1} = f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ \dots \\ a_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ a_0 = f_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

тождественно равный нулю. По лемме 1.1 $a_k = 0, a_{k-1} = 0, \dots, a_1 = 0, a_0 = 0$, то есть,

$$\begin{cases} f_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0 \\ f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0 \\ \dots \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0 \\ f_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

при всех $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

По предположению индукции все коэффициенты этих многочленов равны нулю, что и дает требуемое. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Если многочлены $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задают одну и ту же функцию, то они совпадают как многочлены, то есть, их соответствующие коэффициенты равны.*

Доказательство. Многочлен $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет функцию, тождественно равную нулю. По лемме 1.2 все его коэффициенты равны нулю, из чего следует требуемое. Лемма доказана.

При переходе к новой аффинной системе координат мы должны вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ подставить их линейные выражения через новые координаты. После приведения подобных членов мы получим многочлен такого же вида. В частности, его степень не возрастет.

Но по аналогичным причинам степень не может возрасти и при обратном переходе, когда мы вернемся к исходному многочлену. Поэтому во всех аффинных системах координат степени многочленов, представляющих нашу функцию точки, совпадают. Степень многочлена называется *порядком* представляемой им функции.

Мы в основном будем рассматривать *функции второго порядка*, то есть, функции, представляемые многочленами вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \dots + 2a_nx_n + a.$$

§2. Функция второго порядка как функция параметра прямой.

Пусть $F(M)$ — функция второго порядка, определенная на P .

В фиксированной системе аффинных координат она представлена многочленом второй степени. Пусть O — начало системы координат.

Для упрощения обозначений запишем функцию $F(M)$ в виде $F(M) = a(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}) + 2l(\overrightarrow{OM}) + a_0$, где a — билинейная функция, соответствующая квадратичной части нашего многочлена, $2l$ — линейная функция, соответствующая линейной части нашего многочлена, a_0 — свободный член многочлена.

Небольшая тонкость, связанная с этим представлением, состоит в том, что аргументами фигурирующих в этом представлении функций a и l являются не векторы, как классы равных направленных отрезков, а конкретные направленные отрезки. Поэтому остается вопрос, что изменится, если мы перенесем начало координат в другую точку. К этому вопросу мы вернемся чуть позже.

Пусть $L \subseteq P$ — прямая. Обозначим через F_L ограничение функции F на прямую L , то есть, значение $F_L(M)$ определяется для точки $M \in L$ и равно $F(M)$.

Введем на прямой L систему координат, указав начало M_0 и направляющий вектор u . Для вычисления функции F_L как функции параметра t прямой получаем формулу:

$$\varphi(t) = a(\overrightarrow{OM_0} + tu, \overrightarrow{OM_0} + tu) + 2l(\overrightarrow{OM_0} + tu) + a_0 =$$

$$\begin{aligned}
& a(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_0}) + 2a(\overrightarrow{OM_0}, tu) + a(tu, tu) + l(\overrightarrow{OM_0}) + l(tu) + a_0 = \\
& = a(u, u)t^2 + 2\left(a(\overrightarrow{OM_0}, u) + l(u)\right)t + a(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_0}) + l(\overrightarrow{OM_0}) + a_0 = \\
& = At^2 + 2Bt + C,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= a(u, u), \quad B = a(\overrightarrow{OM_0}, u) + l(u) \\
C &= a(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_0}) + l(\overrightarrow{OM_0}) + a_0 = F(M_0).
\end{aligned}$$

Функция F_L определена независимо от внешней системы координат на пространстве P . В силу единственности представления функции многочленом коэффициенты A , B и C многочлена $\varphi(t)$ определены однозначно и в силу только что сказанного не зависят от внешней системы координат на пространстве P .

Как следствие этого замечания имеем, что билинейная функция a , введенная нами только для обозначения квадратичной части конкретного многочлена, то теперь она оказывается билинейной функцией аргумента, пробегающего направляющее пространство пространства P .

Для сравнения — линейная часть многочлена зависит от системы координат: при перенесении начала в точку O_1 получаем:

$$\begin{aligned}
F(M) &= a(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}) + 2l(\overrightarrow{OM}) + a_0 = \\
&= a(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}) + 2l(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}) + a_0 = \\
&= a(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{OO_1}) + 2a(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{O_1M}) + a(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_1M}) + 2l(\overrightarrow{OO_1}) + 2l(\overrightarrow{O_1M}) + a_0 = \\
&= a(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_1M}) + 2\left(a(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{O_1M}) + l(\overrightarrow{O_1M})\right) + a(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{OO_1}) + l(\overrightarrow{OO_1}) + a_0 = \\
&= a(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_1M}) + 2l_1(\overrightarrow{O_1M}) + a_1,
\end{aligned}$$

где $l_1(\overrightarrow{O_1M}) = a(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{O_1M}) + l(\overrightarrow{O_1M})$ и $a_1 = a(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{OO_1}) + l(\overrightarrow{OO_1}) + a_0$.

Коэффициент B тоже получает определение как функции, зависящей от начальной точки M_0 прямой L и вектора u : $B =$

$B(M_0, u) = a(\overrightarrow{OM_0}, u) + l(u)$, причем зависимость от u является линейной.

§3. Центры симметрии функции второго порядка.

Значения квадратного трехчлена $At^2 + 2Bt + C$ симметричны относительно нуля (то есть, начала системы координат на прямой) тогда и только тогда, когда $B = 0$ (то есть, когда функция является четной).

Поэтому для того, чтобы значения функции $F(M)$ совпадали в точках, симметричных относительно точки M_0 , необходимо и достаточно, чтобы $B(M_0, u) = 0$ для любого вектора u .

Чтобы проанализировать это условие, распишем выражения для функции $B(M_0, u) = a(\overrightarrow{OM_0}, u) + l(u)$ во внешней системе координат:

$$\begin{aligned} B(M_0, u) &= a(\overrightarrow{OM_0}, u) + l(u) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\alpha_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\alpha_2 + \dots + \\ &+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)\alpha_n + \\ &+ (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_1)\alpha_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_2)\alpha_2 + \dots + \\ &+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_n)\alpha_n, \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ координаты точки M_0 .

Перебирая в качестве вектора u базисные векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$, получаем: если точка M_0 есть центр симметрии для функции $F(M)$, то в рассматриваемой системе координат

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_2 = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_n = 0. \end{cases}$$

С другой стороны, если координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ точки M_0 , удовлетворяют последней системе, то в силу указанной выше формулы для вычисления $B(M_0, u)$, $B(M_0, u) = 0$ для любого вектора u и, следовательно, точка M_0 есть центр симметрии для функции $F(M)$.

Функция F имеет единственный центр симметрии тогда и только тогда, когда полученная система имеет единственное решение, а это имеет место тогда и только тогда, когда определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. В дальнейшем случаи выполнения этого условия мы будем называть *центральными*.

§4. Вид многочлена, когда начало координат находится в центре.

Ответ получается просто: координаты начала системы координат, а они все равны нулю, должны удовлетворять выведенным в предыдущем параграфе уравнениям.

Точка $M_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является центром симметрии для функции $F(M)$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_2 = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_n = 0. \end{cases}$$

Начало координат является центром симметрии для функции $F(M)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + \dots + a_{1n} \cdot 0 + a_1 = 0 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + \dots + a_{2n} \cdot 0 + a_2 = 0 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot 0 + a_{n2} \cdot 0 + \dots + a_{nn} \cdot 0 + a_n = 0. \end{cases}$$

То есть, когда $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$ и, следовательно, когда наш многочлен имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n + a.$$

§5. Сопряженные направления.

Как мы выяснили, квадратичная часть многочлена определяет симметрическую билинейную функцию $a(u, v)$. В соответствии с общими определениями векторы u и v называются *сопряженными* (относительно квадратичной части функции F), если $a(u, v) = 0$.

В координатах условие сопряженности векторов $u = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ и $v = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ имеет вид уравнения

$$(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1n}\beta_n)\alpha_1 + \\ + (a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \dots + a_{2n}\beta_n)\alpha_2 + \dots + \\ + (a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \dots + a_{nn}\beta_n)\alpha_n = 0.$$

Если векторы u и v сопряжены, то в силу билинейности функции ψ при любых числах λ и μ сопряжены и векторы λu и μv : $\psi(\lambda u, \mu v) = \lambda\mu\psi(u, v) = \lambda\mu 0 = 0$. Поэтому можно говорить о сопряженности направлений векторов.

Вектор u называется *самосопряженным* или *вектором асимптотического направления*, если $a(u, u) = 0$. В силу предыдущего замечания, если вектор u является самосопряженным, то при любом числе λ вектор u так же будет самосопряженным: $a(\lambda u, \lambda u) = \lambda^2 a(u, u) = 0$.

Направления всех других векторов называются *неасимптотическими*.

§6. Особые направления.

Будем говорить, что вектор $u = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ является вектором *особого направления*, если коэффициент $B = B(M_0, u)$

в квадратном трехчлене $\varphi(t) = At^2 + 2Bt + C$ не зависит от точки M_0 . Так как

$$\begin{aligned} B(M_0, u) &= a(\overrightarrow{OM_0}, u) + l(u) = \\ &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n)x_1 + \\ &+ (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n)x_2 + \dots + \\ &+ (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n)x_n + \\ &+ (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n), \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ координаты точки M_0 , то вектор u является вектором особого направления тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n = 0. \end{cases}$$

При этом для любого вектора $v = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n)\beta_1 + \\ &+ (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n)\beta_2 + \dots + \\ &+ (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n)\beta_n = \\ &= 0 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + \dots + 0 \cdot \beta_n = \vec{0}. \end{aligned}$$

То есть, вектор особого направления сопряжен любому вектору.

Верно и обратное: если вектор сопряжен любому вектору, то он является вектором особого направления. В самом деле,

$$a(u, e_i) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0$$

при любом $i = 1, 2, \dots, n$. То есть,

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n = 0, \end{cases}$$

что и дает требуемое.

В частности, *всякий вектор u особого направления является вектором асимптотического направления.*

§7. Неособые направления и сопряженные гиперплоскости.

Продолжая рассуждения предыдущего параграфа, будем говорить, что вектор u является вектором *неособого направления*, если коэффициент $B = B(M_0, u)$ в квадратном трехчлене $\varphi(t) = At^2 + 2Bt + C$ не является константой по отношению к аргументу M_0 .

Но

$$\begin{aligned} B(M_0, u) &= a(\overrightarrow{OM_0}, u) + l(u) = \\ &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n)x_1 + \\ &+ (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n)x_2 + \dots + \\ &+ (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n)x_n + \\ &+ (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n), \end{aligned}$$

зависит от точки $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из чисел

$$A_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n,$$

$$A_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n, \dots,$$

$$A_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n$$

отлично от нуля, то есть, когда направление вектора u не является особым.

Тогда уравнение $B(M_0, u) = 0$ получает в этой системе координат вид невырожденного линейного уравнения

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + D = 0,$$

где

$$D = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n.$$

Таким образом, при фиксированном u уравнение $B(M_0, u) = 0$ является уравнением гиперплоскости. Эта гиперплоскость называется гиперплоскостью, *сопряженной* вектору u .

Условие параллельности вектора $v = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ гиперплоскости

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + C = 0$$

имеет вид уравнения

$$A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + \dots + A_n\beta_n = 0,$$

то есть, совпадает с условием

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n)\beta_1 + \\ &+ (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n)\beta_2 + \dots + \\ &+ (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n)\beta_n = 0 \end{aligned}$$

сопряженности векторов u и v .

Возможны два случая:

1) Вектор u является вектором неасимптотического направления.

В этом случае точка M_0 лежит на сопряженной гиперплоскости тогда и только тогда, когда соответствующий, теперь обязательно невырожденный, квадратный трехчлен $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = At^2 + C$, а это имеет место тогда и только тогда, когда точка M_0 находится в вершине соответствующей параболы.

2) Вектор u является вектором асимптотического, но не особого направления. Тогда вектор u параллелен сопряженной гиперплоскости, $A(u) = 0$ и для любой точки M_0 сопряженной гиперплоскости $B(M_0, u) = 0$. Это означает, что функция φ является постоянной. То есть, функция $f(M)$ постоянна на любой прямой, лежащей в сопряженной гиперплоскости и параллельной вектору u .

Центры и сопряженные гиперплоскости.

Точка M_0 является центром функции второго порядка, если $B(M_0, u) = 0$ для любого вектора u . Точка M_0 лежит на гиперплоскости,

сопряженной вектору u , если $B(M_0, u) = 0$ для данного неособого вектора u . Поэтому *центр лежит на всех сопряженных гиперплоскостях*.

§8. Гиперповерхности второго порядка. Центры.

Пусть в пространстве P задана функция $F(M)$ второго порядка. Множество точек M , для которых $F(M) = 0$ называется *гиперповерхностью второго порядка*.

Если точка M_0 является центром функции $F(M)$ второго порядка, то она является центром симметрии и для гиперповерхности $F(M) = 0$. Но в общем случае центр симметрии гиперповерхности $F(M) = 0$ не обязан быть центром функции $F(M)$. Например, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ задает на плоскости пустое множество и для него любая точка плоскости является центром симметрии. В то же время многочлен $x^2 + y^2 + 1$ имеет один центр симметрии — точку $(0, 0)$.

§9. Взаимное расположение прямой и гиперповерхности второго порядка.

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, рассмотрим гиперповерхность второго порядка $F(M) = 0$.

Прямую L зададим указанием начальной точки M_0 и направляющего вектора u .

В соответствии с замечаниями §2 зависимость функции F от параметра t прямой записывается многочленом $\varphi(t) = At^2 + 2Bt + C$, коэффициенты которого зависят A — от u : $A = A(u)$, B — от M_0 и u : $B = B(M_0, u)$, C — от M_0 : $C = F(M_0)$. Точка прямой, соответствующая параметру t , тогда и только тогда принадлежит гиперповерхности, когда $\varphi(t) = 0$.

Возможны случаи:

1. Прямая L имеет неасимптотическое направление. Тогда квадратный трехчлен $\varphi(t) = At^2 + 2Bt + C$ может не иметь корней — прямая не пересекает гиперповерхность. Может иметь один корень (кратности 2) — прямая имеет одну общую точку с гиперповерхностью. Может иметь два корня — прямая пересекает

гиперповерхность в двух точках. (Точки пересечения соответствуют корням.)

Если прямая неасимптотического направления пересекает гиперповерхность в двух точках (то есть, является *секущей*), то середина соответствующей хорды лежит на сопряженной к этому направлению прямой так как середина отрезка между корнями квадратного трехчлена совпадает с вершиной квадратного трехчлена.

Если прямая неасимптотического направления имеет одну общую точку с гиперповерхностью, то эта точка лежит на сопряженной к этому направлению гиперплоскости, так как какое-то значение принимается квадратным трехчленом только один раз в том и только в том случае, если это значение соответствует вершине квадратного трехчлена. В этом случае прямая является *касательной*, хотя это определение не всегда соответствует обычному пониманию этого слова.

2. Прямая L имеет неособое асимптотическое направление. Тогда многочлен $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = 2Bt + C$. Условие $B(M, u) = 0$ описывает гиперплоскость d , сопряженную вектору u . Условие параллельности вектора v гиперплоскости d совпадает с условием сопряженности вектора v вектору u , а так как вектор u самосопряжен, то он параллелен гиперплоскости d . Если L имеет общую точку M_0 с гиперплоскостью d , то $B(M_0, u) = 0$ и поэтому $\varphi(t) \equiv C = F(M_0)$ — вся прямая L лежит в d . Во всех точках плоскости, лежащих вне d , $B \neq 0$, поэтому $\varphi(t)$ является функцией первого порядка (не константа). Она обращается в нуль при единственном значении параметра t и, соответственно, прямая пересекает гиперповерхность в единственной точке. Для прямой d возможны два случая.

3. Прямая L имеет особое направление. Тогда многочлен $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = 2Bt + C$, где B не зависит от M_0 . Если при этом $B \neq 0$, то мы имеем функцию первого порядка. Она обращается в нуль при единственном значении параметра t и, соответственно, прямая пересекает гиперповерхность в единственной точке. (*Каждая прямая этого направления пересекает гиперповерхность в единственной точке.*) Если $B = 0$, то функция $\varphi(t)$ является константой: $\varphi(t) \equiv C$. Тогда, если $C = F(M_0) = 0$ (то есть, точка M_0 лежит на гиперповерхности), то вся прямая L лежит в

нашей гиперповерхности. Если $C = F(M_0) \neq 0$ (то есть, точка M_0 не лежит на гиперповерхности), то прямая L не имеет общих точек с гиперповерхностью.

Пусть $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$, — различные точки гиперповерхности, не лежащие в одной гиперплоскости и вектор $u \neq \vec{0}$ является вектором неасимптотического направления. Через точки $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$, проведем прямые $L_1, L_2, \dots, L_{n+1}$, соответственно, параллельные вектору u . Как прямая неасимптотического направления каждая из прямых $L_1, L_2, \dots, L_{n+1}$, имеет с гиперповерхностью только одну или две общие точки. В первом случае прямая оказывается касательной. Одновременно все три прямые касательными быть не могут, так как тогда точки касания $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$ оказываются лежащими в одной гиперплоскости, а именно, в гиперповерхности, сопряженной вектору u , а это противоречит первоначальному предположению относительно точек $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$. Таким образом, *если гиперповерхность не лежит целиком в некоторой гиперплоскости, то вектор $u \neq \vec{0}$ имеет неасимптотическое направление тогда и только тогда, когда существует прямая этого направления, пересекающая гиперповерхность ровно в двух различных точках. Гиперплоскость, сопряженная вектору u , есть гиперплоскость, проходящая через середины хорд и точки касания прямых, параллельных вектору u .*

§10. Упрощение вида многочлена второй степени.

Пусть рассматриваемое пространство P является евклидовым.

По теореме 10.6.1 найдется ортонормированный базис, в котором матрица функции билинейной симметрической функции $a(u, v)$ матрица функции имеет диагональный вид. В системе координат с таким базисом многочлен f , представляющий нашу функцию второго порядка имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \dots + 2a_nx_n + a.$$

Какие-то из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ могут оказаться нулевыми. Забудем про соответствующие слагаемые и переместим

соответствующие базисные векторы в конец списка. Пусть коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличны от нуля. Тогда

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{rr}x_r^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \dots + 2a_nx_n + a = \\
 &= a_{11} \left(x_1^2 + 2\frac{a_1}{a_{11}}x_1 + \left(\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 \right) + a_{22} \left(x_2^2 + 2\frac{a_2}{a_{22}}x_2 + \left(\frac{a_2}{a_{22}}\right)^2 \right) + \dots + \\
 &+ a_{rr} \left(x_r^2 + 2\frac{a_r}{a_{rr}}x_r + \left(\frac{a_r}{a_{rr}}\right)^2 \right) + 2a_{r+1}x_{r+1} + 2a_{r+2}x_{r+2} + \dots + 2a_nx_n + \\
 &\quad + \left(a - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} - \dots - \frac{a_r^2}{a_{rr}} \right) = \\
 &= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_1}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left(x_2 + \frac{a_2}{a_{22}} \right)^2 + \dots + a_{rr} \left(x_r + \frac{a_r}{a_{rr}} \right)^2 + \\
 &\quad + 2a_{r+1}x_{r+1} + 2a_{r+2}x_{r+2} + \dots + 2a_nx_n + \\
 &\quad + \left(a - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} - \dots - \frac{a_r^2}{a_{rr}} \right).
 \end{aligned}$$

Формулы

$$\begin{cases}
 y_1 = x_1 + \frac{a_1}{a_{11}} \\
 y_2 = x_2 + \frac{a_2}{a_{22}} \\
 \dots \\
 y_r = x_r + \frac{a_r}{a_{rr}} \\
 y_{r+1} = x_{r+1} \\
 \dots \\
 y_n = x_n
 \end{cases}$$

соответствуют перенесению начала системы координат с сохранением базиса. В этой новой системе координат многочлен, представляющий нашу функцию второго порядка имеет вид:

$$\begin{aligned}
 &a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \dots + a_{rr}y_r^2 + \\
 &+ 2a_{r+1}y_{r+1} + 2a_{r+2}y_{r+2} + \dots + 2a_ny_n +
 \end{aligned}$$

$$+ \left(a - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} - \dots - \frac{a_r^2}{a_{rr}} \right).$$

Если $a_{r+1} = a_{r+2} = \dots = a_n = 0$, то закончим на этом наши выкладки.

В противном случае рассмотрим базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ нашей системы координат. Обозначим через f_{r+1} единичный вектор, сонаправленный с ненулевым вектором $w = a_{r+1}e_{r+1} + a_{r+2}e_{r+2} + \dots + a_n e_n$ и подберем векторы $f_{r+2}, \dots, f_n$ так, чтобы система $f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_n$ составляла ортонормированный базис подпространства $L(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$. Векторы $f_1 = e_1, f_2 = e_2, \dots, f_r = e_r, f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_n$ имеют единичную длину и попарно перпендикулярны. Следовательно, они составляют базис.

Для радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки $M = \{y_1, y_2, \dots, y_r, y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n\}$ имеем:

$$\left(\overrightarrow{OM}, w \right) = a_{r+1}y_{r+1} + a_{r+2}y_{r+2} + \dots + a_n y_n,$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{OM}, f_{r+1} \right) &= \left(\overrightarrow{OM}, \frac{w}{|w|} \right) = \frac{1}{|w|} \left(\overrightarrow{OM}, w \right) = \\ &= \frac{1}{|w|} (a_{r+1}y_{r+1} + a_{r+2}y_{r+2} + \dots + a_n y_n). \end{aligned}$$

Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ — координаты точки M в базисе $f_1 = e_1, f_2 = e_2, \dots, f_n$. Тогда

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 \\ \dots \\ z_r = y_r \\ z_{r+1} = \left(\overrightarrow{OM}, f_{r+1} \right) = \frac{1}{|w|} (a_{r+1}y_{r+1} + a_{r+2}y_{r+2} + \dots + a_n y_n) \end{cases}$$

(i -тая координата вектора u в ортонормированном базисе равна скалярному произведению вектора u и i -того вектора базиса). Таким образом,

$$a_{r+1}y_{r+1} + a_{r+2}y_{r+2} + \dots + a_n y_n = |w| \cdot z_{r+1}.$$

В последней системе координат многочлен, представляющий нашу функцию второго порядка имеет вид:

$$a_{11}z_1^2 + a_{22}z_2^2 + \dots + a_{rr}z_r^2 + 2|w|z_{r+1} + \left(a - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} - \dots - \frac{a_r^2}{a_{rr}} \right).$$

Возвращаясь к основным обозначениям, получаем: для функции второго порядка $F(M)$ существует прямоугольная система координат, в которой функция представлена многочленом вида

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{rr}x_r^2 + 2a_{r+1}x_{r+1} + a.$$

§11. Ортогональные инварианты функции второго порядка.

Разберемся, какие характеристики многочленов, представляющих функцию второго порядка, не меняются при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат.

Одним из таких инвариантов является *характеристический многочлен* $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, где A — матрица квадратичной части многочлена, представляющего нашу функцию второго порядка в рассматриваемой прямоугольной системе координат.

Чтобы убедиться в ортогональной инвариантности характеристического многочлена, вспомним, что в ортонормированном базисе его матрица совпадает с матрицей соответствующего самосопряженного оператора. Соответственно, мы имеем совпадение характеристических многочленов.

Характеристический многочлен оператора не меняется при переходе к любому новому базису, см. §6.1. В силу только что отмеченного совпадения матриц квадратичной функции и оператора в ортонормированном базисе мы получаем сохранение характеристического многочлена при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат. То есть, *характеристический многочлен* $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, где A — матрица квадратичной части многочлена, является *ортогональным инвариантом*.

Посмотрим с этой точки зрения на матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a \end{pmatrix}$$

многочлена в целом. Имеем:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ &+ \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + \dots + 2a_nx_n + a = \\ &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n + a_1) + \\ &+ x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n + a_2) + \\ &+ x_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n + a_3) + \dots + \\ &+ x_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \dots + a_{nn}x_n + a_n) + \\ &+ (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n + a) = \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n \ 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n + a_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n + a_2 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n + a_3 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \dots + a_{nn}x_n + a_n \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n + a \end{pmatrix} = \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n \ 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При переходе к новой аффинной системе координат в пространстве формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 + \dots + c_{1n}y_n + c_1 \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 + \dots + c_{2n}y_n + c_2 \\ x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 + \dots + c_{3n}y_n + c_3 \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \dots + c_{nn}y_n + c_n \end{cases}$$

Чтобы можно было сопоставить формулы преобразования координат с матрицей функции, порядок которой равен $n+1$, дополняем эту систему равенством $1 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 + \dots + c_{1n}y_n + c_1 \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 + \dots + c_{2n}y_n + c_2 \\ x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 + \dots + c_{3n}y_n + c_3 \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \dots + c_{nn}y_n + c_n \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Перейдем к матричной форме записи последней системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Матрицу

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

обозначим через C . Транспонируя, получаем:

$$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n \ 1) = (y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_n \ 1)C^T.$$

Подставляя эти выражения в матричную запись многочлена f , получаем:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) &= \\ &= (y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_n \ 1) \cdot C^T A C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $g(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ — многочлен, представляющий нашу функцию второго порядка в координатах $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Но связь между многочленом и его матрицей является взаимно однозначной. Так как матрица $C^T A C$ симметрична (не изменяется при транспонировании), то она может быть только матрицей B многочлена g : $B = C^T A C$.

Предположим теперь, что мы переходим от одной прямоугольной системы координат к другой тоже прямоугольной системе координат. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

является ортогональной. Имеем:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \pm 1,$$

$$\det B = \det C^T \det A \det C = (\det C)^2 \det A = \det A$$

и, следовательно, определитель матрицы многочлена является ортогональным инвариантом.

Аналог же характеристического многочлена

$$X(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} - \lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a - \lambda \end{vmatrix}$$

не является ортогональным инвариантом.

Но если мы переходим от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат и сохраняем начало, то формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 + \dots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 + \dots + c_{2n}y_n \\ x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 + \dots + c_{3n}y_n \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

и матрица C оказывается ортогональной:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(сумма попарных произведений соответствующих элементов различных столбцов равна нулю, а сумма квадратов элементов в каждом столбце равна единице). Поэтому

$$\det(B - \lambda E) = \det(C^T AC - \lambda C^T EC) = \det(C^T (A - \lambda E) C) =$$

$$= \det C^T \det(A - \lambda E) \det C = \det(A - \lambda E)(\det C)^2 = \det(A - \lambda E).$$

Таким образом, при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат с сохранением начала многочлен $X(\lambda)$ не меняется.

§12. Определение простого вида многочлена по ортогональным инвариантам.

Простой вид многочлена, представляющего функцию второго порядка, можно найти, не повторяя поиска соответствующих систем координат.

Точнее, для его нахождения достаточно выписать многочлены $\chi(\lambda)$ и $X(\lambda)$.

Докажем это индукцией по размерности n рассматриваемого пространства. Для $n = 1, 2, 3$ это было установлено в курсе аналитической геометрии.

В общем случае сначала считаем определители $\delta = \chi(0)$ и $\Delta = X(0)$ для некоторой прямоугольной системы координат.

Мы знаем, что переходя к новому ортонормированному базису с сохранением начала мы можем привести матрицу квадратичной части многочлена к диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

На диагонали стоят корни характеристического многочлена $\chi(\lambda)$.

Центральный случай.

Все корни характеристического многочлена отличны от нуля тогда и только тогда, когда $\delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0$. Сдвигом

начала координат многочлен приводится к виду $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + a$. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} \cdot a = \delta \cdot a \text{ и поэтому}$$

$$a = \frac{\Delta}{\delta},$$

то есть, в этой системе координат наша функция второго порядка представлена многочленом

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \frac{\Delta}{\delta}.$$

В центральном случае вопрос исчерпан.

Параболический случай.

Если все корни характеристического многочлена отличны от нуля, кроме одного, a_{11} , то сдвигом начала координат многочлен приводится к виду $a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_1x_1 + a$. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= -2a_1^2 \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то $a_1 \neq 0$ и сдвигом начала координат многочлен приводится к виду: $a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_1x_1$. То есть, к виду

$$a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2x_1\sqrt{\frac{-2a_1}{a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}}}.$$

Здесь вопрос исчерпан.

Если $\Delta = 0$, то $a_1 = 0$ и многочлен приводится к виду: $a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + a$. То есть, наша функция зависит только от координат $x_2, x_3, \dots, x_n$ и не зависит от координаты x_1 . Анализ этого случая мы продолжим ниже.

Цилиндрический случай.

Рассмотрим случай, когда $\delta = 0$ и $\Delta = 0$. Случай, когда только один корень характеристического многочлена равен нулю, был разобран выше. Пусть не менее двух корней характеристического многочлена равны нулю. Пусть это будут, в частности, a_{11} и a_{22} . Тогда многочлен приводится к виду $a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + \dots + 2a_nx_n + a$. Тогда матрица многочлена имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a \end{pmatrix}.$$

Если одно из чисел a_1 или a_2 равно нулю, то одна из строк матрицы оказывается нулевой и многочлен не зависит от соответствующей координаты.

Рассмотрим случай, когда числа a_1 или a_2 отличны от нуля. Вектор $u = \{a_2, -a_1, 0, \dots, 0\}$ является вектором особого направления. Для прямых этого направления $A = 0$,

$$B = (0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n + a_1) \cdot a_2 +$$

$$\begin{aligned}
& +(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n + a_2) \cdot (-a_1) + \\
& +(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n + a_3) \cdot 0 + \dots + \\
& +(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + a_{nn} \cdot x_n + a_1) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

То есть, на всех прямых этого направления наша функция второго порядка постоянна. Сохраняя начало координат, возьмем ортонормированный базис, первый базисный вектор которого сонаправлен с вектором u . В этой системе координат наша функция второго порядка представлена многочленом $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, значения которого не меняются с изменением x_1 . То есть, $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$. В силу единственности многочлена, представляющего функцию это означает, что в многочлене нет слагаемых, содержащих x_1 .

Таким образом, если $\delta = 0$ и $\Delta = 0$, то существует прямоугольная система координат с тем же началом, в которой многочлен не зависит от x_1 и, соответственно,

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} & \\ 0 & a_{23} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} - \lambda & \end{vmatrix} = \\
&= (-\lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{23} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\chi_{n-1}(\lambda),
\end{aligned}$$

Где $\chi_{n-1}(\lambda)$ — характеристический многочлен квадратичной многочлена $g(x_2, x_3, \dots, x_n) = f(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$ от $(n-1)$ координат,

$$X(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ 0 & a_{23} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} - \lambda & a_1 \\ 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} - \lambda & a_1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) X_{n-1}(\lambda),$$

Где $X_{n-1}(\lambda)$ — аналог многочлена $X(\lambda)$ для многочлена $g(x_2, x_3, \dots, x_n) = f(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$ от $(n-1)$ координат. То есть,

$$\chi_{n-1}(\lambda) = \frac{\chi(\lambda)}{-\lambda}$$

и

$$X_{n-1}(\lambda) = \frac{X(\lambda)}{-\lambda}.$$

По предположению индукции по многочленам $\chi_{n-1}(\lambda)$ и $X_{n-1}(\lambda)$ мы можем написать простой вид многочлена $g(x_2, x_3, \dots, x_n)$. Соответствующие манипуляции с системами координат не затрагивают первую координат. Это дает нам требуемое в цилиндрическом случае.