

версия 23.03.2019

Просьба сообщить о всех замеченных опечатках,
описках, возникших вопросах, замечаниях
и т.д. на адрес vvfil@ mech.math.msu.su

Глава 13.

Поливекторы.

§1. Простые поливекторы.

Как мы помним, *простой поливектор* $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$ равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависимы.

Посмотрим содержание этого утверждения на отдельных примерах.

Пусть векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ принадлежат линейной оболочке векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$:

$$\begin{cases} v_1 = x_1^1 u_1 + x_1^2 u_2 + \dots + x_1^k u_k \\ v_2 = x_2^1 u_1 + x_2^2 u_2 + \dots + x_2^k u_k \\ \dots \\ v_k = x_k^1 u_1 + x_k^2 u_2 + \dots + x_k^k u_k. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k &= (x_1^1 u_1 + x_1^2 u_2 + \dots + x_1^k u_k) \wedge \\ &\wedge (x_2^1 u_1 + x_2^2 u_2 + \dots + x_2^k u_k) \wedge \dots \wedge (x_k^1 u_1 + x_k^2 u_2 + \dots + x_k^k u_k) = \\ &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_k}. \end{aligned}$$

Если какой-то индекс повторился, то $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_k} = 0$.

Соответствующие слагаемые можно опустить. Оставшиеся записываются в виде

$$x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} \dots x_k^{\sigma(k)} u_{\sigma(1)} \wedge u_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(k)} =$$

$$= (-1)^\sigma x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} \dots x_k^{\sigma(k)} u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k,$$

а сумма в целом — в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma} (-1)^\sigma x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} \dots x_k^{\sigma(k)} u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k = \\ & = \left(\sum_{\sigma} (-1)^\sigma x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} \dots x_k^{\sigma(k)} \right) u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k = \\ & = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^1 & x_k^2 & \dots & x_k^k \end{vmatrix} u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k. \end{aligned}$$

В итоге, если векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы, то векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^1 & x_k^2 & \dots & x_k^k \end{vmatrix} \neq 0,$$

что нам хорошо известно.

Пусть векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы, векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ также линейно независимы и

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = P u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k.$$

Тогда для любого $i = 1, 2, \dots, k$

$$v_i \wedge u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k = P^{-1} v_i \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = 0,$$

так как в последнем произведении сомножитель v_i встречается дважды.

Векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы. Векторы $v_i, u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависимы. Поэтому при каждом $i = 1, 2, \dots, k$

вектор v_i может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \dots$ и мы получаем систему:

$$\begin{cases} v_1 = x_1^1 u_1 + x_1^2 u_2 + \dots + x_1^n u_k \\ v_2 = x_2^1 u_1 + x_2^2 u_2 + \dots + x_2^k u_k \\ \dots \\ v_k = x_k^1 u_1 + x_k^2 u_2 + \dots + x_k^k u_k, \end{cases}$$

что возвращает нас к предыдущей ситуации.

Таким образом, равенство

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = P u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$$

где $P \neq 0$, для линейно независимых систем векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ и $v_1, v_2, \dots, v_k$ равносильно совпадению линейных оболочек этих систем.

С формулой, очень похожей на формулу

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^1 & x_k^2 & \dots & x_k^k \end{vmatrix} u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k,$$

мы уже встречались. Именно так связаны ориентированные объемы параллелепипедов, натянутых на векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ и $v_1, v_2, \dots, v_k$:

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^1 & x_k^2 & \dots & x_k^k \end{vmatrix} \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle.$$

В чем смысл этой схожести? Выведя представление

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = P u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$$

мы, собственно, показали еще раз, что пространство поливекторов порядка, совпадающего с размерностью пространства, одномерно.

P — это координата поливектора $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ в базисе, состоящем из поливектора $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$, а ориентированный объем является линейной функцией этой координаты. Если же ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на базисные векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ равен единице, то ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ просто равен координате P .

В дальнейшем будем говорить также *ориентированный объем поливектора* $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$, считая, что это то же самое, что и ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$.

§2. Поливекторы в трехмерном пространстве.

Пусть e_1, e_2, e_3 — базис трехмерного пространства,

$$\begin{cases} v_1 = x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + x_1^3 e_3 \\ v_2 = x_2^1 e_1 + x_2^2 e_2 + x_2^3 e_3. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 &= (x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + x_1^3 e_3) \wedge (x_2^1 e_1 + x_2^2 e_2 + x_2^3 e_3) = \\ &= x_1^1 x_2^1 e_1 \wedge e_1 + x_1^1 x_2^2 e_1 \wedge e_2 + x_1^1 x_2^3 e_1 \wedge e_3 + \\ &\quad + x_1^2 x_2^1 e_2 \wedge e_1 + x_1^2 x_2^2 e_2 \wedge e_2 + x_1^2 x_2^3 e_2 \wedge e_3 + \\ &\quad + x_1^3 x_2^1 e_3 \wedge e_1 + x_1^3 x_2^2 e_3 \wedge e_2 + x_1^3 x_2^3 e_3 \wedge e_3 = \\ &= 0 + x_1^1 x_2^2 e_1 \wedge e_2 + x_1^1 x_2^3 e_1 \wedge e_3 + x_1^2 x_2^1 e_2 \wedge e_1 + 0 + \\ &\quad + x_1^2 x_2^3 e_2 \wedge e_3 + x_1^3 x_2^1 e_3 \wedge e_1 + x_1^3 x_2^2 e_3 \wedge e_2 + 0 = \\ &= (x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1) e_1 \wedge e_2 + (x_1^1 x_2^3 - x_1^3 x_2^1) e_1 \wedge e_3 + (x_1^2 x_2^3 - x_1^3 x_2^2) e_2 \wedge e_3 = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_3 + \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Векторы v_1 и v_2 коллинеарны тогда и только тогда, когда $v_1 \wedge v_2 = 0$, то есть, *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} = 0$$

— “лемма о пропорциональных тройках” из курса аналитической геометрии.

Пусть в добавление к использованным обозначениям ориентированный объем тривектора $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ равен единице, t — бивектор и

$$u = y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3.$$

Тривектор $t \wedge u$ выражается через базисный по формуле

$$v_1 \wedge v_2 \wedge u = \varphi(t, u) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

причем координата $\varphi(t, u)$ линейно зависит от своих аргументов. То есть, в частности, при фиксированном t функция $\psi_t(u) = \varphi(t, u)$ является линейным функционалом.

Отображение $\Psi(t)$, сопоставляющее бивектору t линейный функционал $\psi_{v_1 \wedge v_2}$ линейно.

Пусть $t = v_1 \wedge v_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(v_1 \wedge v_2, u) &= \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} y^1 - \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix} y^2 + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} y^3. \end{aligned}$$

То есть, и координаты функционала $\varphi_{v_1 \wedge v_2, u}$ в базисе e^1, e^2, e^3 суть

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь этим, посчитаем образы базисных бивекторов:

$$\Psi(e_1 \wedge e_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e^1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} e^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^3 = e^3,$$

$$\Psi(e_1 \wedge e_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} e^3 = -e^2,$$

$$\Psi(e_2 \wedge e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^1 - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} e^3 = e^1.$$

То есть, базис переходит в базис и поэтому линейное отображение Ψ является изоморфизмом,

$$\Psi(v_1 \wedge v_2) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} e^3 - \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix} e^2 + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} e^3.$$

В случае евклидова пространства разница между векторами и линейными функционалами пропадает и Ψ оказывается изоморфизмом пространства бивекторов и пространства векторов.

Чтобы понять, как этот изоморфизм устроен, предположим, что базис e_1, e_2, e_3 является ортонормированным. Видим по нашим формулам, что определенный первоначально независимо от евклидовой структуры изоморфизм Ψ сопоставляет бивектору $v_1 \wedge v_2$ векторное произведение $[v_1, v_2]$.

§3. Координаты простых поливекторов.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L ,

$$\begin{cases} v_1 = x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + \dots + x_1^n e_n \\ v_2 = x_2^1 e_1 + x_2^2 e_2 + \dots + x_2^n e_n \\ \dots \\ v_k = x_k^1 e_1 + x_k^2 e_2 + \dots + x_k^n e_n. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k &= (x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + \dots + x_1^n e_n) \wedge \\ &\wedge (x_2^1 e_1 + x_2^2 e_2 + \dots + x_2^n e_n) \wedge \dots \wedge (x_k^1 e_1 + x_k^2 e_2 + \dots + x_k^n e_n) = \\ &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}. \end{aligned}$$

Здесь индексы $i_1, i_2, \dots, i_k$ меняются в пределах от 1 до n . Если какой-то индекс повторился, то $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$. Соответствующие слагаемые можно опустить. Оставшиеся разобьем на группы с одинаковыми наборами индексов, хотя и стоящих в разных порядках. Пусть $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ — один из таких наборов индексов.

Каждое такое слагаемое записывается в виде

$$\begin{aligned} & x_1^{\sigma(i_1)} x_2^{\sigma(i_2)} \dots x_k^{\sigma(i_k)} e_{\sigma(i_1)} \wedge e_{\sigma(i_2)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(i_k)} = \\ & = (-1)^\sigma x_1^{\sigma(i_1)} x_2^{\sigma(i_2)} \dots x_k^{\sigma(i_k)} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \end{aligned}$$

а сумма группы в целом — в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma} (-1)^\sigma x_1^{\sigma(i_1)} x_2^{\sigma(i_2)} \dots x_k^{\sigma(i_k)} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \\ & = \left(\sum_{\sigma} (-1)^\sigma x_1^{\sigma(i_1)} x_2^{\sigma(i_2)} \dots x_k^{\sigma(i_k)} \right) e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \\ & = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} & \dots & x_1^{i_k} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} & \dots & x_2^{i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^{i_1} & x_k^{i_2} & \dots & x_k^{i_k} \end{vmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}. \end{aligned}$$

В итоге

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} & \dots & x_1^{i_k} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} & \dots & x_2^{i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^{i_1} & x_k^{i_2} & \dots & x_k^{i_k} \end{vmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}.$$

§4. Аннуляторы и ортогональные дополнения.

Вернемся в более общих предположениях к фактам, затронутым при обсуждении векторного произведения в §2.

Пространство поливекторов порядка n в n -мерном пространстве одномерно. Пусть t — любой ненулевой поливектор порядка n .

Пусть v — поливектор порядка k , u — поливектор порядка $n - k$.

Поливектор $v \wedge u$ выражается через базисный поливектор t по формуле

$$v \wedge u = \varphi(v, u)t,$$

причем координата $\varphi(v, u)$ является билинейной функцией.

То есть, в частности, при фиксированном поливекторе v функция $\psi_v(u) = \varphi(v, u)$ является линейной и, следовательно, представляется внешней формой порядка $(n - k)$.

Отображение $\Psi(v)$, сопоставляющее поливектору v внешнюю форму ψ_v линейно. Это определение отображения Ψ не зависит от выбора системы координат. Но чтобы понять его строение предположим, что поливектор $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ ненулевой и продолжим систему векторов $e_1 = v_1, e_2 = v_2, \dots, e_k = v_k$ до базиса пространства L добавлением векторов $e_{k+1}, \dots, e_n$.

Пусть $e^1, e^2, \dots, e^n$ — взаимный базис пространства L^* .

Пусть $u = u_{k+1} \wedge u_{k+2} \wedge \dots \wedge u_n$ и

$$\begin{cases} u_{k+1} = x_{k+1}^1 e_1 + x_{k+1}^2 e_2 + \dots + x_{k+1}^n e_n \\ u_{k+2} = x_{k+2}^1 e_1 + x_{k+2}^2 e_2 + \dots + x_{k+2}^n e_n \\ \dots \\ u_n = x_n^1 e_1 + x_n^2 e_2 + \dots + x_n^n e_n. \end{cases}$$

Тогда $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \wedge u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{k+1}^1 & x_{k+1}^2 & \dots & x_k^{k+1} & x_{k+1}^{k+1} & x_{k+1}^{k+2} & \dots & x_n^{k+1} \\ x_{k+2}^1 & x_{k+2}^2 & \dots & x_k^{k+2} & x_{k+2}^{k+1} & x_{k+2}^{k+2} & \dots & x_n^{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_k^n & x_n^{k+1} & x_n^{k+2} & \dots & x_n^n \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_{k+1}^{k+1} & x_{k+1}^{k+2} & \dots & x_n^{k+1} \\ x_{k+2}^{k+1} & x_{k+2}^{k+2} & \dots & x_n^{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{k+1} & x_n^{k+2} & \dots & x_n^n \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \\
&= e^{k+1} \wedge e^{k+2} \wedge \dots \wedge e^n(u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \\
&= e^{k+1} \wedge e^{k+2} \wedge \dots \wedge e^n(u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n) \cdot p \cdot t,
\end{aligned}$$

где p — координата поливектора $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$.

Сравнивая формулы

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \wedge u = \varphi(v, u)t,$$

и

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \wedge u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n = e^{k+1} \wedge e^{k+2} \wedge \dots \wedge e^n(u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n) \cdot p \cdot t,$$

получаем

$$\psi_{v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k}(u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n) = e^{k+1} \wedge e^{k+2} \wedge \dots \wedge e^n(u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n)$$

и, следовательно,

$$\Psi(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) = p \cdot e^{k+1} \wedge e^{k+2} \wedge \dots \wedge e^n.$$

Но векторы $e^{k+2}, \dots, e^n$ составляют базис аннулятора линейной оболочки $L(v_1, v_2, \dots, v_k) = L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$.

В случае евклидова пространства ортогональное дополнение совпадает с аннулятором.

Уточним в этом случае проведенное выше построение. Векторы $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$ выберем попарно ортогональными (при этом они будут перпендикулярны векторам $e_1, e_2, \dots, e_k$) и затем перейдем к положительно ориентированному ортонормированному базису $f_1, f_2, \dots, f_n$, в котором $f_{k+1} = e_{k+1}, f_{k+2} = e_{k+2}, \dots, f_n = e_n$ и наборы векторов $f_1, f_2, \dots, f_k$ и $v_1, v_2, \dots, v_k$ ориентированы одинаково. Тогда

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle \cdot f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k,$$

$$\begin{aligned}\Psi(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) &= \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle \cdot \Psi(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k) = \\ &= \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle \cdot f_{k+1} \wedge f_{k+2} \wedge \cdots \wedge f_n\end{aligned}$$

— ориентированный объем поливектора $\Psi(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k)$ совпадает с ориентированным объемом поливектора $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$.

§5. Бивекторы.

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Любой бивектор t может быть представлен в виде суммы простых бивекторов*

$$t = u_1 \wedge v_1 + u_2 \wedge v_2 + \cdots + u_k \wedge v_k,$$

где векторы $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ линейно независимы и $2k$ есть ранг бивектора t .

На самом деле это есть следствие теоремы 10.10.2, но в этом параграфе мы приведем доказательство, опирающееся на свойства бивекторов.

Начнем с предварительного замечания

Лемма 5.1. *Определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1k} \\ a^{21} & a^{22} & \cdots & a^{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{k1} & a^{k2} & \cdots & a^{kk} \end{vmatrix}$$

— такая матрица. В силу косой симметрии матрицы умножение на -1 дает тот же результат, что и транспонирование. Определитель при этом не меняется. С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} -a^{11} & -a^{12} & \cdots & -a^{1k} \\ -a^{21} & -a^{22} & \cdots & -a^{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a^{k1} & -a^{k2} & \cdots & -a^{kk} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1k} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{k1} & a^{k2} & \dots & a^{kk} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При четном k здесь нет никаких противоречий, а при нечетном это влечет равенство определителя нулю. Лемма доказана.

Бивекторы — это кососимметрические элементы тензорного произведения T_0^2 . Поэтому при фиксировании любого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L координаты бивектора t выстраиваются в матрицу

$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n1} & a^{n2} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = -a_{ji}$ ввиду косой симметрии тензора t .

Этот же тензор мы можем рассматривать как тензор билинейной функции $a : L^* \times L^* \rightarrow K$ и как тензор линейного отображения $\Phi_a : L^* \rightarrow L$, см. §5.4-5. Ранг матрицы (билинейной функции, линейного отображения) не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом бивектора t* .

Лемма 5.2. *Ранг бивектора четен.*

Доказательство. Пусть $L_1 \subseteq L$ — образ линейного отображения $\Phi_a : L^* \rightarrow L$. Его размерность k равна рангу матрицы отображения. Выберем какой-то базис $e_1, e_2, \dots, e_k$ подпространства L_1 и затем добавлением векторов $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$ продолжим его до базиса пространства L .

Пусть $e^1, e^2, \dots, e^n$ взаимный базис пространства L^* .

Так как образы всех векторов при отображении Φ_a являются линейными комбинациями базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$, то их координаты, начиная с $(k+1)$ -ой, равны нулю. Поэтому строки матрицы в этих базисах, начиная с $(k+1)$ -ой, состоят из нулей. Но в силу косой симметрии матрицы и столбцы, начиная с $(k+1)$ -

ого, состоят из нулей:

$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{k1} & a^{k2} & \dots & a^{kk} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В столбцах матрицы стоят координаты образов векторов $e^1, e^2, \dots, e^n$. В силу того, что столбцы, начиная с $(k+1)$ -ого, являются нулевыми, образ L_1 отображения Φ_a есть линейная оболочка векторов $\Phi_a(e^1), \Phi_a(e^2), \dots, \Phi_a(e^k)$. Если эти векторы линейно зависимы, то размерность их линейной оболочки меньше k . Но по нашему определению $k = \dim L_1$. Поэтому векторы $\Phi_a(e^1), \Phi_a(e^2), \dots, \Phi_a(e^k)$ линейно независимы и

$$\begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1k} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{k1} & a^{k2} & \dots & a^{kk} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В силу леммы 5.1 число k четно. Лемма доказана.

Если тензор t является простым, то есть, имеет вид $t = u_1 \otimes u_2$, то ему соответствует линейное отображение $L^* \rightarrow L$, сопоставляющее вектору $v \in L^*$ вектор $u_2(v) \cdot u_1 \in L$. То есть, соответствующее пространство L_1 лежит в линейной оболочке $L(u_1)$.

Если тензор t является простым бивектором, то есть, имеет вид $t = u_1 \wedge u_2 = u_1 \otimes u_2 - u_2 \otimes u_1$, то соответствующее пространство L_1 лежит в линейной оболочке $L(u_1, u_2)$.

Соответственно, для произвольного бивектора $t = u_1 \wedge v_1 + u_2 \wedge v_2 + \dots + u_k \wedge v_k$ соответствующее пространство L_1 лежит в линейной оболочке $L(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k)$ и, следовательно, ранг бивектора не больше $2k$.

Доказательство теоремы 5.1 поведем индукцией по рангу бивектора, помня, что ранг $r = 2k$ бивектора четен. При $k = 1$ в соответствующем базисе матрица бивектора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & a^{12} & 0 & \dots & 0 \\ -a^{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а сам бивектор — вид $t = (a^{12}e_1) \wedge e_2$, что и дает требуемое в этом случае.

Пусть утверждение доказано для $k - 1 \geq 1$. Докажем его для k . Воспользуемся уже установленным фактом существования базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, в котором матрица тензора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & a^{12} & \dots & a^{1r} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^{21} & 0 & \dots & a^{2r} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{r1} & a^{r2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая пара симметричных элементов матрицы $a^{ij} = -a^{ji}$, $i < j$, дает слагаемое $a^{ij}e_i \otimes e_j = a^{ij}e_i \wedge e_j$ в рассматриваемом тензоре t , а сам тензор имеет вид

$$\begin{aligned} & a^{12}e_1 \wedge e_2 + a^{13}e_1 \wedge e_3 + \dots + a^{1r}e_1 \wedge e_r + \\ & + a^{23}e_2 \wedge e_3 + \dots + a^{2r}e_2 \wedge e_r + \\ & \dots \dots \dots + a^{2r}e_{r-1}e_r = \\ & = e_1 \wedge (a^{12}e_2 + a^{13}e_3 + \dots + a^{1r}e_r) + \\ & + a^{23}e_2 \wedge e_3 + \dots + a^{2r}e_2 \wedge e_r + \dots + a^{2r}e_{r-1} \wedge e_r = \end{aligned}$$

$$= e_1 \wedge v_1 + a^{23} e_2 \wedge e_3 + \cdots + a^{2r} e_2 \wedge e_r + \cdots + a^{2r} e_{r-1} \wedge e_r,$$

где

$$v_1 = a^{12} e_2 + a^{13} e_3 + \cdots + a^{1r} e_r.$$

Ранг бивектора

$$t_1 = a^{23} e_2 \wedge e_3 + \cdots + a^{2r} e_2 \wedge e_r + \cdots + a^{2r} e_{r-1} \wedge e_r$$

не превосходит количества векторов, участвующих в его представлении (это суть векторы $e_2, e_3, \dots, e_r$). То есть, ранг не превосходит $r - 1$. То есть, ранг не превосходит $2k - 2$.

По предположению индукции

$$t_1 = u_2 \wedge v_2 + \cdots + u_k \wedge v_k.$$

Тогда

$$t = u_1 \wedge v_1 + u_2 \wedge v_2 + \cdots + u_k \wedge v_k,$$

где $u_1 = e_1$.

Векторы $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ линейно независимы, так как ранг бивектора не превосходит размерности их линейной оболочки. Теорема доказана.