версия 23.03.2019

Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 11.

Пространство T_s^r .

§1. Тензорное произведение линейных пространств.

В этом параграфе мы продолжаем обсуждение темы, начатое в §5.1. В частности, все, что там написано, переносится на тензорное произведение произвольного конечного числа векторных пространств. Но все-таки мы покажем как это делается.

Пусть $L_1, L_2, \dots, L_k$ — линейные пространства над полем K .

Простым тензором назовем символ вида $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k$, где $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2, \dots, u_k \in L_k$.

Простые тензоры $(\lambda u_1) \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k, u_1 \otimes (\lambda u_2) \otimes \dots \otimes u_k, \dots, u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes (\lambda u_k)$, где $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2, \dots, u_k \in L_k, \lambda \in K$, будем считать равными.

В связи с этим произведение $\lambda(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k)$ простого тензора $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k$ на число $\lambda \in K$ определяется как простой тензор

$$(\lambda u_1) \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k = u_1 \otimes (\lambda u_2) \otimes \dots \otimes u_k = \dots = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes (\lambda u_k).$$

Из этого отождествления простых тензоров вытекает, что для любых $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2, \dots, u_k \in L_k$,

$$\begin{aligned} \vec{0} \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k &= (0 \cdot u_1) \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k = \\ &= u_1 \otimes (0 \cdot u_2) \otimes \dots \otimes u_k = u_1 \otimes \vec{0} \otimes \dots \otimes u_k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes (0 \cdot u_{k-1}) \otimes u_k = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes \vec{0} \otimes u_k = \\
&= u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_{k-1} \otimes (0 \cdot u_k) = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_{k-1} \otimes \vec{0} = \vec{0} \otimes \vec{0} \otimes \cdots \otimes \vec{0}.
\end{aligned}$$

Тензорное произведение $L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k$ линейных пространств $L_1, L_2, \dots, L_k$ состоит из формальных сумм t простых тензоров $u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_k$, где $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2, \dots, u_k \in L_k$:

$$t = u_{11} \otimes u_{12} \otimes \cdots \otimes u_{1k} + u_{21} \otimes u_{22} \otimes \cdots \otimes u_{2k} + \cdots + u_{l1} \otimes u_{l2} \otimes \cdots \otimes u_{lk}.$$

При этом две такие суммы считаются равными, если одна из них получается из другой

- 1) перестановкой слагаемых,
- 2) заменой слагаемого $A \otimes (u_1 + u_2) \otimes B$ на сумму $A \otimes u_1 \otimes B + A \otimes u_2 \otimes B$ или заменой суммы $A \otimes u_1 \otimes B + A \otimes u_2 \otimes B$ на слагаемое $A \otimes (u_1 + u_2) \otimes B$, где A и B обозначают сомножители простого тензора до и после того места, где стоят $u_1 + u_2, u_1, u_2$.
- 3) композицией шагов 1) и 2).

В этом множестве определены операции сложения (одна формальная сумма приписывается к другой через знак $+$) и умножения на числа из K (каждое слагаемое, являющееся простым тензором, умножается на это число по указанному выше правилу).

Как легко видеть, тензорное произведение $L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k$ с указанными операциями является линейным пространством. Роль нуля играет простой тензор $\vec{0} \otimes \vec{0} \otimes \cdots \otimes \vec{0}$ и $t + (-1)t = \vec{0} \otimes \vec{0} \otimes \cdots \otimes \vec{0}$ для любой такой суммы t .

Элементы тензорного произведения называются *тензорами*.

Сравним тензорные произведения $M = L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k$ и $M_1 \otimes M_2$, где $M_1 = L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_j$ и $M_2 = L_{j+1} \otimes L_{j+2} \otimes \cdots \otimes L_k$. Определим отображение $\varphi : M \rightarrow M_1 \otimes M_2$ следующим образом. Простому тензору $u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_k \in M$ сопоставим тензор $t_1 \otimes t_2$, где $t_1 = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_j \in M_1$ и $t_2 = u_{j+1} \otimes u_{j+2} \otimes \cdots \otimes u_k \in M_2$ и продолжим это соответствие по линейности на формальные суммы простых векторов.

Как легко видеть, суммы равные по 1)-3) перейдут в суммы равные по 1)-3). Тем самым определен гомоморфизм $\varphi : M \rightarrow M_1 \otimes M_2$ линейных пространств.

Пусть $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m_1}$ — базис пространства L_1 , $e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2m_2}$ — базис пространства L_2 , $\dots$, $e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{km_k}$ — базис пространства L_k .

Любой вектор u из L_i разлагается по базису $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im_i}$. Разлагая простой тензор в соответствии с 1) – 3) получаем, что любой элемент пространства $L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k$ представляется в виде линейной комбинации тензоров вида

$$e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \dots \otimes e_{ki_k}.$$

Таким образом, любой простой тензор

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \in L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k$$

принадлежит линейной оболочке тензоров вида

$$e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \dots \otimes e_{ki_k}.$$

Но так как любой тензор есть линейная комбинация простых, то тензорное произведение

$$L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k$$

совпадает с линейной оболочкой тензоров вида

$$e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \dots \otimes e_{ki_k}.$$

Покажем, что тензоры вида

$$e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \dots \otimes e_{ki_k}.$$

составляют базис тензорного произведения

$$L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k.$$

В силу сказанного выше нам остается доказать, что эти тензоры линейно независимы. Докажем это индукцией по k . При $k = 2$ это доказано в §5.1.

При $k > 2$ воспользуемся указанным выше гомоморфизмом $\varphi : M \rightarrow M_1 \otimes M_2$. По предположению индукции тензоры вида

$$e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \cdots \otimes e_{ji_j}$$

составляют базис пространства M_1 , тензоры вида

$$e_{j+1i_{j+1}} \otimes e_{j+2i_{j+2}} \otimes \cdots \otimes e_{ki_k}$$

составляют базис пространства M_2 .

В силу замечаний §5.1 тензоры вида

$$(e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \cdots \otimes e_{ji_j}) \otimes (e_{j+1i_{j+1}} \otimes e_{j+2i_{j+2}} \otimes \cdots \otimes e_{ki_k})$$

составляют базис тензорного произведения $M_1 \otimes M_2$. В частности, эти тензоры линейно независимы. При гомоморфизме $\varphi : M \rightarrow M_1 \otimes M_2$ тензор

$$e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \cdots \otimes e_{ji_j} \otimes e_{j+1i_{j+1}} \otimes e_{j+2i_{j+2}} \otimes \cdots \otimes e_{ki_k}$$

переходит в тензор

$$(e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \cdots \otimes e_{ji_j}) \otimes (e_{j+1i_{j+1}} \otimes e_{j+2i_{j+2}} \otimes \cdots \otimes e_{ki_k}).$$

Так как линейно зависимая система векторов может перейти только в линейно зависимую систему векторов, а система

$$(e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \cdots \otimes e_{ji_j}) \otimes (e_{j+1i_{j+1}} \otimes e_{j+2i_{j+2}} \otimes \cdots \otimes e_{ki_k})$$

линейно независима, то и система

$$e_{1i_1} \otimes e_{2i_2} \otimes \cdots \otimes e_{ji_j} \otimes e_{j+1i_{j+1}} \otimes e_{j+2i_{j+2}} \otimes \cdots \otimes e_{ki_k}$$

линейно независима, что и требовалось.

§2. Пространство полилинейных функций как тензорное произведение сопряженных пространств.

Пересмотрим с точки зрения предыдущего параграфа содержание §5.2.

Пусть $L_1, L_2, \dots, L_k$ — линейные пространства над полем K , $L_1^*, L_2^*, \dots, L_k^*$ — сопряженные им пространства, P — пространство полилинейных функций

$$L_1 \times L_2 \times \dots \times L_k \rightarrow K.$$

Произведение

$$f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k : L_1 \times L_2 \times \dots \times L_k \rightarrow K$$

функционалов $f_i \in L_i^*$ определим по формуле

$$f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k(u_1, u_2, \dots, u_k) = f_1(u_1)f_2(u_2) \dots f_k(u_k).$$

Произведение

$$f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k$$

является полилинейной функцией, то есть, принадлежит пространству P .

Обычно, когда говорят о произведении функций, говорят о функциях с общей областью определения. При этом область определения произведения совпадает с общей областью определения функций-сомножителей. Здесь каждый сомножитель сохраняет свою область определения. В частности, из-за этого, это произведение функций некоммукативно.

Сопоставим простому тензору

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_k \in L_1^* \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k^*$$

произведение

$$f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k \in P$$

и продолжим это сопоставление по линейности на все тензорное произведение

$$L_1^* \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k^*.$$

Как легко видеть, при элементарных преобразованиях тензоров 1)–3) из §1 сопоставляемая полилинейная функция не меняется и мы корректно определили гомоморфизм тензорного произведения

$$L_1^* \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k^*$$

в P .

Пусть $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im_i}$ — базис пространства L_i , $e_i^1, e_i^2, \dots, e_i^{m_i}$ — взаимный базис пространства L_i^* , $i = 1, 2, \dots, k$.

Лемма 2.1. Полилинейные функции

$$e_1^{i_1} \times e_2^{i_2} \times \dots \times e_k^{i_k}$$

$i_l = 1, 2, \dots, m_l$, составляют базис пространства P .

Доказательство. I. Пусть $a(u_1, u_2, \dots, u_k)$ полилинейная функция из P .

Пусть

$$u_\alpha = x_\alpha^1 e_{\alpha 1} + x_\alpha^2 e_{\alpha 2} + \cdots + x_\alpha^{m_\alpha} e_{\alpha m_\alpha},$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, k$.

Тогда

$$\begin{aligned} a(u_1, u_2, \dots, u_k) &= \sum \left\{ x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_k^{l_k} a(e_{1l_1}, e_{2l_2}, \dots, e_{kl_k}) : \right. \\ & \left. l_1 = 1, 2, \dots, m_1, \quad l_2 = 1, 2, \dots, m_2, \quad \dots, \quad l_k = 1, 2, \dots, m_k \right\} = \\ &= \sum \left\{ a_{l_1 l_2 \dots l_k} e_1^{l_1}(u_1) e_2^{l_2}(u_2) \dots e_k^{l_k}(u_k) : \right. \\ & \left. l_1 = 1, 2, \dots, m_1, \quad l_2 = 1, 2, \dots, m_2, \quad \dots, \quad l_k = 1, 2, \dots, m_k \right\}, \\ &= \sum \left\{ a_{l_1 l_2 \dots l_k} e_1^{l_1} \times e_2^{l_2} \times \cdots \times e_k^{l_k}(u_1, u_2, \dots, u_k) : \right. \\ & \left. l_1 = 1, 2, \dots, m_1, \quad l_2 = 1, 2, \dots, m_2, \quad \dots, \quad l_k = 1, 2, \dots, m_k \right\}, \end{aligned}$$

где $a_{l_1 l_2 \dots l_k} = a(e_{1l_1}, e_{2l_2}, \dots, e_{kl_k})$.

Опуская указание на аргументы, получаем:

$$a = \sum \left\{ a_{l_1 l_2 \dots l_k} e_1^{l_1} \times e_2^{l_2} \times \dots \times e_k^{l_k} : \begin{array}{l} l_1 = 1, 2, \dots, m_1, \\ l_2 = 1, 2, \dots, m_2, \quad \dots, \quad l_k = 1, 2, \dots, m_k \end{array} \right\}.$$

Мы показали, что любой элемент пространства P представим в виде линейной комбинации произведений

$$e_1^{l_1} \times e_2^{l_2} \times \dots \times e_k^{l_k}.$$

II. Покажем, что произведения

$$e_1^{l_1} \times e_2^{l_2} \times \dots \times e_k^{l_k}$$

линейно независимы в пространстве P . То есть, если линейная комбинация

$$a = \sum \left\{ a_{l_1 l_2 \dots l_k} e_1^{l_1} \times e_2^{l_2} \times \dots \times e_k^{l_k} : \begin{array}{l} l_1 = 1, 2, \dots, m_1, \quad l_2 = 1, 2, \dots, m_2, \quad \dots, \quad l_k = 1, 2, \dots, m_k \end{array} \right\}$$

равна нулю в пространстве P , то $a_{l_1 l_2 \dots l_k} = 0$ для всех допустимых наборов индексов.

Имеем $a(u_1, u_2, \dots, u_k) = 0$ для любых $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2, \dots, u_k \in L_k$.

При $i_1 \neq l_1$, или $i_2 \neq l_2, \dots$, или $i_k \neq l_k$,

$$e_1^{i_1} \times e_2^{l_2} \times \dots \times e_k^{i_k}(e_{1l_1}, e_{2l_2}, \dots, e_{kl_k}) = e_1^{i_1}(e_{1l_1}) e_2^{i_2}(e_{2l_2}) \dots e_k^{i_k}(e_{kl_k}) = 0.$$

С другой стороны,

$$e_1^{i_1} \times e_2^{l_2} \times \dots \times e_k^{i_k}(e_{1i_1}, e_{2i_2}, \dots, e_{ki_k}) = e_1^{i_1}(e_{1i_1}) e_2^{i_2}(e_{2i_2}) \dots e_k^{i_k}(e_{ki_k}) = 1.$$

Поэтому $a(e_{1l_1}, e_{2l_2}, \dots, e_{kl_k}) = a_{l_1 l_2 \dots l_k}$ и $a_{l_1 l_2 \dots l_k} = 0$.

Таким образом, наша линейная комбинация оказалась тривиальной.
Лемма доказана.

При указанном выше гомоморфизме тензорного произведения

$$L_1^* \otimes L_2^* \otimes \cdots \otimes L_k^*$$

на пространство P полилинейных функций базис

$$\left\{ e_1^{i_1} \otimes e_2^{i_2} \otimes \cdots \otimes e_k^{i_k} : \begin{array}{l} i_1 = 1, 2, \dots, m_1, \\ i_2 = 1, 2, \dots, m_2, \quad \dots, \quad i_k = 1, 2, \dots, m_k \end{array} \right\}$$

тензорного произведения переводится в базис

$$\left\{ e_1^{i_1} \times e_2^{i_2} \times \cdots \times e_k^{i_k} : \begin{array}{l} i_1 = 1, 2, \dots, m_1, \\ i_2 = 1, 2, \dots, m_2, \quad \dots, \quad i_k = 1, 2, \dots, m_k \end{array} \right\}$$

пространства полилинейных функций.

§3. Двойственность в тензорных произведениях.

Продолжим обсуждение темы, начатой в §5.3.

Собственно, там мы доказали, что $(L_1 \otimes L_2)^* = L_1^* \otimes L_2^*$.

Тогда в обозначениях предыдущего параграфа $M^* = M_1^* \otimes M_2^*$. Но M_1^* и M_2^* сами могут являться тензорными произведениями и эта же формула применима и к ним. Повторяя, в итоге получаем:

$$(L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k)^* = L_1^* \otimes L_2^* \otimes \cdots \otimes L_k^*.$$

Но это означает, что определена свертка пространств $L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k$ и $L_1^* \otimes L_2^* \otimes \cdots \otimes L_k^*$.

Мы не будем вычислять эту свертку по проведенному выше рассуждению и дадим ее прямое описание.

В предыдущем параграфе мы указали связь между тензорным произведением $L_1^* \otimes L_2^* \otimes \cdots \otimes L_k^*$ и пространством P полилинейных функций, определенных на $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_k$.

Так как для $a \in P$ и $\lambda \in K$

$$a(\lambda u_1, u_2, \dots, u_k) = a(u_1, \lambda u_2, \dots, u_k) = \dots = a(u_1, u_2, \dots, \lambda u_k),$$

то полилинейная функция a определяет отображение ξ_a множества простых тензоров. Продолжая ξ_a по линейности на множество формальных сумм простых тензоров, мы получаем отображение, значения которого не меняются при преобразованиях 1) – 3) §1. Тем самым, продолженное отображение ξ_a можем считать определенным на тензорном произведении $L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k$. При этом оно линейно.

Сопоставляя элементу t тензорного произведения $L_1^* \otimes L_2^* \otimes \dots \otimes L_k^*$, полилинейную функцию $a \in P$, а ей — линейную функцию

$$\xi_a : L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k \rightarrow K,$$

мы задаем отображение

$$\Xi : L_1^* \otimes L_2^* \otimes \dots \otimes L_k^* \rightarrow (L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k)^*, \quad \Xi(t) = \xi_a.$$

Как и в аналогичном случае в §5.3 доказывается линейность отображения Ξ .

Простые тензоры

$$e_1^{i_1} \otimes e_2^{i_2} \otimes \dots \otimes e_k^{i_k} : \quad i_1 = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$i_2 = 1, 2, \dots, m_2, \quad \dots, \quad i_k = 1, 2, \dots, m_k$$

составляют базис тензорного произведения

$$L_1^* \otimes L_2^* \otimes \dots \otimes L_k^*.$$

Под действием отображения Ξ тензор $e_1^{i_1} \otimes e_2^{i_2} \otimes \dots \otimes e_k^{i_k}$ переходит в линейный функционал, значение которого на базисном тензоре $e_{1l_1} \otimes e_{2l_2} \otimes \dots \otimes e_{kl_k}$ произведения $L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_k$ равно единице тогда и только тогда, когда $i_j = l_j$ при всех $j = 1, 2, \dots, k$ и нулю во всех остальных случаях:

$$e_1^{i_1} \otimes e_2^{i_2} \otimes \dots \otimes e_k^{i_k} (e_{1l_1}, e_{2l_2}, \dots, e_{kl_k}) = e_1^{i_1} (e_{1l_1}) e_2^{i_2} (e_{2l_2}) \dots e_k^{i_k} (e_{kl_k}).$$

То есть, отображение Ξ переводит базис пространства

$$L_1^* \otimes L_2^* \otimes \cdots \otimes L_k^*$$

в базис пространства

$$(L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k)^*$$

и, следовательно, линейное отображение Ξ является изоморфизмом.

Но пространство

$$L_1^* \otimes L_2^* \otimes \cdots \otimes L_k^*$$

и пространство полилинейных функций на

$$L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_k$$

изоморфны. Таким образом, мы указали изоморфизм между пространством полилинейных функций на

$$L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_k$$

и пространством линейных функций на

$$L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k.$$

Связанные этим соответствием функции характеризуются тем, что они совпадают на простых тензорах (отождествленных с соответствующими элементами из $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_k$).

§4. Гомоморфизм тензорных произведений и свертка.

Пусть $\varphi_1 : L_1 \rightarrow M_1$, $\varphi_2 : L_2 \rightarrow M_2$, $\dots$, $\varphi_k : L_k \rightarrow M_k$ — гомоморфизмы линейных пространств над полем K .

Сопоставляя простому тензору

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_k \in L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k$$

простой тензор

$$\varphi_1(u_1) \otimes \varphi_2(u_2) \otimes \cdots \otimes \varphi_k(u_k) \in M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_k$$

и затем продолжая его по линейности на формальные суммы простых тензоров, мы получим (линейное) отображение, перестановочное с элементарными преобразованиями 1) – 3) из §1 сумм простых тензоров, то есть, мы получим гомоморфизм

$$\Phi : L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k \rightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_k.$$

Заметим, что $L \otimes K$ изоморфно L : простому тензору $u \otimes \lambda \in L \otimes K$ изоморфизм сопоставляет $\lambda u \in L$. Поэтому, линейный функционал $\varphi_2 : L_2 \rightarrow K$ порождает гомоморфизм $\Phi : L_1 \otimes L_2 \rightarrow L_1$ по формуле $\Phi(u_1 \otimes u_2) = \varphi_2(u_2) \cdot u_1$.

Пусть теперь сомножители L_{k-1} и L_k в тензорном произведении $L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k$ сопряжены, $a(u, v)$ — их свертка.

Приведенная выше конструкция дает нам гомоморфизм

$$\Phi : L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k \rightarrow L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_{k-2},$$

задаваемый на простых тензорах формулой

$$\Phi(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_k) = a(u_{k-1} \otimes u_k) \cdot u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_{k-2}$$

— свертка тензорного произведения $L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k$ по сомножителям L_{k-1} и L_k .

Здесь для простоты обозначений мы “свернули” сомножители L_{k-1} и L_k . Но свертку тензорного произведения можно провести по сомножителям, стоящим на любых позициях.

§5. Пространство T_s^r .

Символом T_s^r обозначается тензорное произведение

$$L \otimes L \otimes \cdots \otimes L \otimes L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^*,$$

в котором r сомножителей вида L и s сомножителей вида L^* . Число r называется *контравариантной валентностью* элементов T_s^r , число s — *ковариантной валентностью*.

Группировка сомножителей — сначала сомножители L , затем сомножители L^* условна и принята нами для удобства обозначений.

Заметим, что T_0^1 есть другое обозначение для L , а T_1^0 есть другое обозначение для L^* . Пространство T_2^0 дает тензорное описание пространства билинейных функций $L \times L \rightarrow K$, а пространство T_1^1 дает тензорное описание пространства линейных операторов $L \rightarrow L$.

В соответствии с замечаниями §3 пространством, двойственным к пространству T_s^r является тензорное произведение

$$L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^* \otimes L \otimes L \otimes \cdots \otimes L,$$

то есть, пространство T_r^s .

Все, сказанное выше о тензорных произведениях, применимо к указанному нами сейчас случаю.

Но есть и особенности. В частности, введя систему координат в пространстве L , мы сразу же получаем системы координат во всех объектах, связанных с T_s^r . При этом в сомножителях L^* мы берем базис, взаимный к базису в L .

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L , $e^1, e^2, \dots, e^n$ — взаимный базис пространства L^* .

В соответствии со сказанным в §1 простые тензоры

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

составляют базис пространства T_s^r .

Соответственно, любой тензор $t \in T_s^r$ однозначно представляется в виде линейной комбинации

$$t = \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} : \right. \\ \left. i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Координаты свертки тензора.

Каждый из сомножителей L тензорного произведения

$$T_s^r = L \otimes L \otimes \cdots \otimes L \otimes L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^*$$

связан сверткой с каждым из сомножителей L^* .

В соответствии с замечаниями предыдущего параграфа свертка по двум сомножителям продолжается до гомоморфизма

$$T_s^r \rightarrow T_{s-1}^{r-1}.$$

Посмотрим какой тензор этот гомоморфизм сопоставляет тензору

$$t = \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} : \right. \\ \left. i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Для удобства обозначений будем считать, что производится свертка последнего, то есть, r -того сомножителя из сомножителей L и последнего, то есть, s -того сомножителя из сомножителей L^* .

Базисный тензор

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_{s-1}} \otimes e^{j_s} \in T_s^r$$

переходит в тензор

$$a(e_{i_r} \otimes e^{j_s}) e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_{s-1}} \in T_{s-1}^{r-1},$$

где $a(e_{i_r} \otimes e^{j_s})$ — свертка в $L \otimes L^*$. То есть, $a(e_{i_r} \otimes e^{j_s}) = 0$, если $i_r \neq j_s$ и $a(e_{i_r} \otimes e^{j_s}) = 1$, если $i_r = j_s$. Приводя подобные члены, видим, что тензор

$$t = \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} : \right. \\ \left. i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}$$

переходит в тензор

$$t' = \sum \left\{ b_{j_1 j_2 \dots j_{s-1}}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_{s-1}} : \right. \\ \left. i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, j_1, j_2, \dots, j_{s-1} = 1, 2, \dots, n \right\},$$

где

$$b_{j_1 j_2 \dots j_{s-1}}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} = a_{j_1 j_2 \dots j_{s-1} 1}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} 1} + a_{j_1 j_2 \dots j_{s-1} 2}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} 2} + \dots + a_{j_1 j_2 \dots j_{s-1} n}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} n}.$$

§6. Преобразование координат тензора при переходе к новой системе координат.

Введем в обсуждение темы главы факты, установленные в §3.6.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$ — базисы пространства L , $e^1, e^2, \dots, e^n$ и $f^1, f^2, \dots, f^n$ — взаимные им базисы пространства L^* .

Сравним разложения тензора

$$t = \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : \right. \\ \left. i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}$$

по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ и

$$t = \sum \left\{ b_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \dots \otimes f_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes f^{j_2} \otimes \dots \otimes f^{j_s} : \right. \\ \left. i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}$$

по базису $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Нам понадобятся следующие формулы §3.6:

$$\begin{cases} e_1 = q_1^1 f_1 + q_1^2 f_2 + \dots + q_1^n f_n \\ e_2 = q_2^1 f_1 + q_2^2 f_2 + \dots + q_2^n f_n \\ \dots \\ e_n = q_n^1 f_1 + q_n^2 f_2 + \dots + q_n^n f_n \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} e^1 = p_1^1 f^1 + p_2^1 f^2 + \dots + p_n^1 f^n \\ e^2 = p_1^2 f^1 + p_2^2 f^2 + \dots + p_n^2 f^n \\ \dots \\ e^n = p_1^n f^1 + p_2^n f^2 + \dots + p_n^n f^n. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения, получаем:

$$\begin{aligned} t &= \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : \right. \\ &\quad \left. i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\} = \\ &= \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} (q_{i_1}^1 f_1 + q_{i_1}^2 f_2 + \dots + q_{i_1}^n f_n) \otimes \right. \\ &\otimes (q_{i_2}^1 f_1 + q_{i_2}^2 f_2 + \dots + q_{i_2}^n f_n) \otimes \dots \otimes (q_{i_r}^1 f_1 + q_{i_r}^2 f_2 + \dots + q_{i_r}^n f_n) \otimes \\ &\otimes (p_1^{j_1} f^1 + p_2^{j_1} f^2 + \dots + p_n^{j_1} f^n) \otimes (p_1^{j_2} f^1 + p_2^{j_2} f^2 + \dots + p_n^{j_2} f^n) \otimes \\ &\quad \otimes \dots \otimes (p_1^{j_s} f^1 + p_2^{j_s} f^2 + \dots + p_n^{j_s} f^n) : \\ &\quad \left. i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов, получаем:

$$\begin{aligned} t &= \sum \left\{ \left(\sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} q_{i_1}^{i'_1} q_{i_2}^{i'_2} \dots q_{i_r}^{i'_r} p_{j_1}^{j'_1} p_{j_2}^{j'_2} \dots p_{j_s}^{j'_s} : i_1, i_2, \dots, i_r, \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\} \right) f_{i'_1} \otimes f_{i'_2} \otimes \dots \otimes f_{i'_r} \otimes f^{j'_1} \otimes f^{j'_2} \otimes \dots \otimes f^{j'_s} : \right. \\ &\quad \left. i'_1, i'_2, \dots, i'_r, j'_1, j'_2, \dots, j'_s = 1, 2, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

В силу единственности разложения по базису

$$\begin{aligned} b_{j'_1 j'_2 \dots j'_s}^{i'_1 i'_2 \dots i'_r} &= \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} q_{i_1}^{i'_1} q_{i_2}^{i'_2} \dots q_{i_r}^{i'_r} p_{j_1}^{j'_1} p_{j_2}^{j'_2} \dots p_{j_s}^{j'_s} : \right. \\ &\quad \left. i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

§7. Изменение валентности тензоров
в псевдоевклидовых и евклидовых пространствах.

Рассмотрим тензорное произведение

$$T_s^r = L \otimes L \otimes \cdots \otimes L \otimes L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^*,$$

в случае, когда пространство L является псевдоевклидовым.

Тогда L и L^* суть одно и то же пространство L . Разница между этими обозначениями состоит в том, что фиксируя основной базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в пространстве L в первой группе сомножителей мы берем этот базис, а во второй группе, члены которой обозначены через L^* , мы берем взаимный базис $e^1, e^2, \dots, e^n$.

Поэтому перевод сомножителя в произведении

$$L \otimes L \otimes \cdots \otimes L \otimes L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^*$$

из статуса L в статус L^* или обратно сводится к изменению базиса: либо мы берем основной базис пространства L , либо мы берем взаимный базис.

Посмотрим, что при этом происходит с координатами тензоров. Не будем выписывать общие громоздкие формулы и для простоты обозначений ограничимся случаем, когда статус меняет последний сомножитель первой группы и обратно.

Указанный переход связывает пространства T_s^r и T_{s+1}^{r-1} .

Сравним разложения тензора

$$t = \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} : \right. \\ \left. i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}$$

и

$$t = \sum \left\{ b_{i_r j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e^{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} : \right. \\ \left. i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}$$

в T_s^r и T_{s+1}^{r-1} .

В §9.2 мы выяснили, что формулы перехода между основным и взаимным базисами псевдоевклидова пространства имеют вид:

$$\begin{cases} e_1 = g_{11}e^1 + g_{12}e^2 + \dots + g_{1n}e^n \\ e_2 = g_{21}e^1 + g_{22}e^2 + \dots + g_{2n}e^n \\ \dots \\ e_n = g_{n1}e^1 + g_{n2}e^2 + \dots + g_{nn}e^n, \end{cases}$$

причем матрица

$$G_* = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

этой системы совпадает с матрицей скалярного произведения в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ и

$$\begin{cases} e^1 = g^{11}e_1 + g^{12}e_2 + \dots + g^{1n}e_n \\ e^2 = g^{21}e_1 + g^{22}e_2 + \dots + g^{2n}e_n \\ \dots \\ e^n = g^{n1}e_1 + g^{n2}e_2 + \dots + g^{nn}e_n, \end{cases}$$

причем матрица

$$G^* = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & \dots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & \dots & g^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g^{n1} & g^{n2} & \dots & g^{nn} \end{pmatrix}$$

этой системы совпадает с матрицей скалярного произведения в базисе $e^1, e^2, \dots, e^n$.

Подставив в представление

$$t = \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : \right.$$

$$i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \}$$

на место r -того сомножителя выражения

$$\begin{cases} e_1 = g_{11}e^1 + g_{12}e^2 + \dots + g_{1n}e^n \\ e_2 = g_{21}e^1 + g_{22}e^2 + \dots + g_{2n}e^n \\ \dots \\ e_n = g_{n1}e^1 + g_{n2}e^2 + \dots + g_{nn}e^n, \end{cases}$$

получаем:

$$\begin{aligned} t &= \sum \left\{ a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \right. \\ &\otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes (g_{i_r 1}e^1 + g_{i_r 2}e^2 + \dots + g_{i_r n}e^n) \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : \\ &\left. i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\} = \\ &= \sum \left\{ \left(a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} 1} g_{1 i_r} + a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} 2} g_{2 i_r} + \dots + a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} n} g_{n i_r} \right) e_{i_1} \otimes \right. \\ &\left. \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : \right. \\ &\left. i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

В силу единственности разложения по базису

$$b_{i_r j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} = a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} 1} g_{1 i_r} + a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} 2} g_{2 i_r} + \dots + a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} n} g_{n i_r}.$$

Обратный переход. Подставив в представление

$$\begin{aligned} t &= \sum \left\{ b_{i_r j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e^{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : \right. \\ &\left. i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

на место первого сомножителя второй группы выражения

$$\begin{cases} e^1 = g^{11}e_1 + g^{12}e_2 + \dots + g^{1n}e_n \\ e^2 = g^{21}e_1 + g^{22}e_2 + \dots + g^{2n}e_n \\ \dots \\ e^n = g^{n1}e_1 + g^{n2}e_2 + \dots + g^{nn}e_n, \end{cases}$$

получаем:

$$\begin{aligned}
t &= \sum \left\{ b_{i_r j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} e_{i_1} \otimes \right. \\
&\otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes (g^{i_r 1} e_1 + g^{i_r 2} e_2 + \dots + g^{i_r n} e_n) \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : \\
&\quad \left. i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\} = \\
&= \sum \left\{ \left(b_{1 j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} g^{1 i_r} + b_{2 j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} g^{2 i_r} + \dots + b_{n j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} g^{n i_r} \right) e_{i_1} \otimes \right. \\
&\quad \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : \\
&\quad \left. i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n \right\}.
\end{aligned}$$

В силу единственности разложения по базису

$$a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \left(b_{1 j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} g^{1 i_r} + b_{2 j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} g^{2 i_r} + \dots + b_{n j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} g^{n i_r} \right).$$

Естественно, все сказанное сохраняет силу и в случае, когда пространство L является евклидовым.

При этом ситуация сильно упрощается, когда основной базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L является ортонормированным. Тогда этот базис совпадает со своим взаимным базисом $e^1, e^2, \dots, e^n$:

$$\begin{cases} e^1 = e_1 \\ e^2 = e_2 \\ \dots \\ e^n = e_n, \end{cases}$$

а матрицы G_* и G^* являются единичными. Соответственно, полученные выше формулы приобретают вид:

$$a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1} i_r} = b_{i_r j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_{r-1}}.$$

Повторяя эту операцию, приходим к формулам вида

$$a_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} = a^{i_1 i_2 \dots i_r j_1 j_2 \dots j_s} = a_{i_1 i_2 \dots i_r j_1 j_2 \dots j_s}.$$