Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 10.

Линейные операторы в евклидовых пространствах.

§1. Взаимные базисы в евклидовом пространстве.

Пусть L — евклидово линейное пространство. Как мы уже отметили в начале предыдущей главы, скалярное произведение в качестве свертки делает его сопряженным самому себе.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L . По нему указывается взаимный базис $e^1, e^2, \dots, e^n$ в сопряженном пространстве. Но в данном случае пространство L сопрягается с собой и поэтому $e^1, e^2, \dots, e^n$ — векторы того же пространства L .

Векторы взаимного базиса $e^1, e^2, \dots, e^n$ связаны с векторами исходного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ условиями

$$(e_i, e^j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Соответственно, основной и взаимный базисы совпадают, то есть, $e_i = e^i$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, тогда и только тогда, когда

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

то есть, тогда и только тогда, когда базис ортонормирован.

§2. Сопряженные и самосопряженные операторы.

Понятие сопряженных отображений было введено для сопряженных пар в §5.5. Так как евклидово пространство сопряжено себе, то

понятие сопряженности отображений распространяется на операторы, действующие в L , а именно, операторы $\varphi, \psi : L \rightarrow L$ сопряжены, если для любых векторов $u, v \in L$ имеет место равенство: $(\varphi(u), v) = (u, \psi(v))$.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства L . Как мы видели в §5.5 матрица оператора ψ совпадает с матрицей билинейной функции $a(u, v) = (u, \psi(v))$, а матрица оператора φ получается из этой матрицы транспонированием.

Оператор $\psi : L \rightarrow L$ называется *самосопряженным*, если он сопряжен себе, то есть, если для любых векторов $u, v \in L$ имеет место равенство: $(\psi(u), v) = (u, \psi(v))$. В силу сказанного выше, в этом случае матрица оператора ψ является симметричной и совпадает с матрицей билинейной функции $a(u, v) = (u, \psi(v))$.

В неортонормированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ скалярное произведение (u, v) в матричном виде записывается формулой $(u, v) = u_1^* G v_1$, где u_1^* — строка из координат вектора u , v_1 — столбец из координат вектора v , G — матрица скалярного произведения в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Пусть A — матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, B — матрица оператора ψ в том же базисе.

То есть, $u_2 = Au_1$, где u_1 — столбец из координат вектора u , u_2 — столбец из координат вектора $\varphi(u)$, $v_2 = Av_1$, где v_1 — столбец из координат вектора v , v_2 — столбец из координат вектора $\psi(v)$.

Для строк имеем: $u_2^* = u_1^* A^T$.

В этих обозначениях $(\varphi(u), v) = u_2^* G v_1 = u_1^* A^T G v_1$, $(u, \psi(v)) = u_1^* G v_2 = u_1^* G B v_1$. То есть, $u_1^* A^T G v_1 = u_1^* G B v_1$ для любых векторов u и v . Поэтому

$$A^T G = G B.$$

§3. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству самосопряженного оператора.

Теорема 3.1. *Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству самосопряженного оператора является инвариантным подпространством.*

Доказательство. Пусть L — евклидово линейное пространство, $\varphi : L \rightarrow L$ — самосопряженный оператор, L_1 — инвариантное подпространство.

Наша цель — доказать, что ортогональное дополнение $L_1^\perp$ к L_1 инвариантно относительно оператора φ . Пусть $u \in L_1^\perp$. Тогда для любого вектора $v \in L_1$ имеем:

$$(\varphi(u), v) = (u, \varphi(v)) = 0,$$

ибо вектор $\varphi(v)$ принадлежит L_1 , а u принадлежит ортогональному дополнению L_1 . Теорема доказана.

§4. Самосопряженный оператор обладает (ненулевым) собственным вектором.

При $n = 1$ сформулированное в названии параграфа утверждение очевидно: все векторы являются собственными.

При $n = 2$ рассмотрим матрицу оператора в ортонормированном базисе:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Его дискриминант

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

неотрицателен. Следовательно, характеристический многочлен имеет действительный корень и, соответственно, существует собственный вектор.

При $n > 2$ существует инвариантное подпространство L_1 размерности 1 или 2. Из предыдущего рассмотрения вытекает существование собственного вектора (ограничение самосопряженного

оператора на инвариантное подпространство является самосопряженным оператором).

§5. Самосопряженный оператор обладает ортонормированным базисом из собственных векторов.

Доказательство поведем индукцией по размерности n рассматриваемого пространства L .

При $n = 1$ доказываемое утверждение очевидно: все векторы являются собственными и поэтому любой базис удовлетворяет поставленному условию.

Пусть утверждение доказано для $n - 1 \geq 1$. Докажем его для n .

По замечанию предыдущего параграфа оператор обладает ненулевым собственным вектором u .

Положим:

$$e_1 = \frac{u}{|u|}.$$

По замечанию §3 ортогональное дополнение L_1 к $L(e_1)$ инвариантно. Его размерность равна $(n - 1)$. По предположению индукции существует ортонормированный базис $e_2, e_3, \dots, e_n$ подпространства L_1 , состоящий из собственных векторов рассматриваемого оператора. Векторы $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ имеют единичную длину и попарно перпендикулярны. По лемме 9.1.1 они линейно независимы. Так как их число совпадает с размерностью пространства L , то они составляют базис пространства L .

Матрица оператора в найденном базисе имеет диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Применяя уже обсужденную процедуру поиска собственных значений и собственных векторов, либо ссылаясь на уже отмеченные свойства диагонализируемых операторов, получаем:

Все собственные значения самосопряженного оператора действительны.

Сумма кратностей корней характеристического многочлена, то есть, собственных значений самосопряженного оператора равна размерности пространства.

Размерность пространства M_μ собственных векторов, соответствующих собственному значению μ равна кратности корня μ , то есть, алгебраическая кратность корня характеристического многочлена совпадает с его геометрической кратностью.

Добавим к этому, что если собственный вектор u_1 соответствует собственному значению λ_1 , собственный вектор u_2 соответствует собственному значению λ_2 , $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то векторы u_1 и u_2 перпендикулярны.

Для доказательства этого можно сослаться на то, что $u_1 \in M_{\lambda_1}$, $u_2 \in M_{\lambda_2}$, а подпространства M_{λ_1} и M_{λ_2} , будучи линейными оболочками векторов ортонормированного базиса, перпендикулярны.

Но для иллюстрации особенностей самосопряженных операторов мы дадим и независимое доказательство этого факта. В силу самосопряженности рассматриваемого оператора φ имеем:

$$(\varphi(u_1), u_2) = (u_1, \varphi(u_2)),$$

$$\lambda_1(u_1, u_2) = \lambda_2(u_1, u_2),$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0,$$

а так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(u_1, u_2) = 0$, что и требовалось.

§6. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве L кроме скалярного произведения зафиксирована еще одна билинейная симметрическая функция $a(u, v)$.

Понятие сопряженности векторов и определяемых ими направлений было уже определено: векторы u и v называются *сопряженными* (относительно билинейной симметрической функции $a(u, v)$ или относительно порожденной ею квадратичной функции), если $a(u, v) = 0$. Вектор u называется вектором *особого направления*, если он сопряжен любому вектору. Вектор u называется вектором *главного направления*, если он сопряжен любому перпендикулярному ему вектору.

Ясно, что *всякий вектор особого направления является вектором главного направления*.

Как легко видеть, направления осей координат являются главными тогда и только тогда, когда оси сопряжены и попарно перпендикулярны.

Пусть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица квадратичной функции $a(u, v)$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L .

В ней $a_{ij} = a(e_i, e_j)$. Поэтому оси координатной системы (то есть, их направляющие векторы, то есть, векторы базиса) сопряжены тогда и только тогда, когда матрица имеет диагональный вид.

Поэтому заголовок параграфа означает, что

Теорема 6.1. *Для любой билинейной симметрической функции $a(u, v)$ найдется ортонормированный базис, в котором матрица функции имеет диагональный вид.*

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $\psi : L \rightarrow L$, связанный с функцией $a(u, v)$ соотношением $a(u, v) = (u, \psi(v))$. Как мы знаем, в ортонормированных базисах матрицы функции $a(u, v)$ и оператора ψ совпадают.

Но мы уже знаем, что найдется ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет диагональный вид. В силу совпадения матриц функции и оператора матрица функции в этом базисе имеет диагональный вид. Теорема доказана.

§7. Совместное приведение двух квадратичных форм.

Отвлечемся от основной темы главы и сделаем небольшой комментарий к предыдущему параграфу.

Пусть в n -мерном линейном пространстве L заданы две билинейные симметрические функции $a(u, v)$ и $b(u, v)$, причем функция $b(u, v)$ положительно определена.

Пусть в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L матрицы форм имеют вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$B_e = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

соответственно.

Функцию $b(u, v)$ мы можем объявить скалярным произведением евклидова пространства L . В силу замечания предыдущего параграфа существует базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ пространства L , в котором матрица функции $b(u, v)$ есть единичная матрица E , то есть, базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ является ортонормированным относительно скалярного произведения $b(u, v)$, а матрица функции $a(u, v)$ имеет диагональный вид

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зададимся вопросом, как указать базис $f_1, f_2, \dots, f_n$. Из рассмотрений предыдущего параграфа вытекает схема, состоящая из двух шагов. Сначала строим некоторый ортонормированный базис $f'_1, f'_2, \dots, f'_n$, находим матрицу формы $a(u, v)$ в этом базисе, а уже потом, опираясь на рассуждения предыдущего параграфа, строим искомый базис $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Как обойтись без промежуточного шага, связанного с указанием базиса $f'_1, f'_2, \dots, f'_n$?

Чтобы ответить на этот вопрос, проанализируем, что мы получаем после построения базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Пусть λ_i — одно из чисел, стоящих на диагонали матрицы A_f . Пусть $f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_k}$ — все векторы базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$,

которых на соответствующих местах матрицы A_f стоит число λ_i .

Тогда матрица билинейной функции $a(u, v) - \lambda_i b(u, v)$ в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ имеет диагональный вид. На диагонали в местах, соответствующих векторам $f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_k}$ — стоят нули. На остальных местах диагонали стоят ненулевые разности $\lambda_{l_l} - \lambda_i$. Поэтому линейная оболочка $L(f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_k})$ базисных векторов $f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_k}$ совпадает с нулевым пространством M_{λ_i} билинейной функции $a(u, v) - \lambda_i b(u, v)$.

Будучи линейными оболочками базисных векторов ортонормированного базиса, подпространства M_{λ_i} попарно перпендикулярны.

В сумме они дают все пространство L : $L = M_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus M_{\lambda_i}$.

Но для нахождения нулевого пространства M_{λ_i} билинейной функции $a(u, v) - \lambda_i b(u, v)$ нет необходимости искать сначала базис $f'_1, f'_2, \dots, f'_n$.

В базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространство M_{λ_i} задается системой: Пусть

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i b_{11})x^1 + (a_{12} - \lambda_i b_{12})x^2 + \dots + (a_{1n} - \lambda_i b_{1n})x_n = 0 \\ (a_{12} - \lambda_i b_{12})x^1 + (a_{22} - \lambda_i b_{22})x^2 + \dots + (a_{2n} - \lambda_i b_{2n})x^n = 0 \\ \dots \\ (a_{1n} - \lambda_i b_{1n})x^1 + (a_{2n} - \lambda_i b_{2n})x^2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i b_{nn})x^n = 0 \end{cases}$$

с матрицей $A_e - \lambda_i B_e$.

Теперь ситуация проясняется. Сначала находим те λ , для которых система

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda b_{11})x^1 + (a_{12} - \lambda b_{12})x^2 + \dots + (a_{1n} - \lambda b_{1n})x_n = 0 \\ (a_{12} - \lambda b_{12})x^1 + (a_{22} - \lambda b_{22})x^2 + \dots + (a_{2n} - \lambda b_{2n})x^n = 0 \\ \dots \\ (a_{1n} - \lambda b_{1n})x^1 + (a_{2n} - \lambda b_{2n})x^2 + \dots + (a_{nn} - \lambda b_{nn})x^n = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель системы $\det(A_e - \lambda B_e)$ был равен нулю. После этого находим ортонормированный базис в пространстве M_λ решений

этой системы. В силу предшествовавших замечаний относительно базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ в сумме такие пространства дают все пространство L , а объединение их базисов составит ортонормированный базис пространства L .

Можно было бы назвать многочлен $\chi(\lambda) = \det(A_e - \lambda B_e)$ характеристическим многочленом. Действительно, он играет здесь аналогичную роль. Но надо иметь в виду, что он меняется при переходе к новому базису. При переходе к новому базису матрица $A_e - \lambda B_e$ квадратичной функции переходит в матрицу $C^T(A_e - \lambda B_e)C$. Соответственно, в новом базисе многочлен имеет вид:

$$\det(C^T \cdot (A_e - \lambda B_e) \cdot C) = \det C^T \cdot \det(A_e - \lambda B_e) \cdot \det C = (\det C)^2 \cdot \det(A_e - \lambda B_e).$$

То есть, многочлен умножается на число $(\det C)^2$. Правда корни и их кратности при этом не меняются.

§8. Ортогональные операторы.

Оператор $\varphi : L \rightarrow L$ называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение, то есть, если для любых векторов $u, v \in L$ имеет место равенство: $(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$.

Заметим, что из этого определения следует невырожденность ортогонального оператора: из сохранения скалярного произведения следует сохранение длины вектора и поэтому ненулевой вектор переходит в вектор ненулевой длины, то есть, в ненулевой вектор. Как следствие, *всегда определен обратный оператор φ^{-1}* .

Он тоже сохраняет скалярное произведение и поэтому также является ортогональным оператором: если $u_1 = \varphi^{-1}(u)$ и $v_1 = \varphi^{-1}(v)$, то

$$(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = (u_1, v_1) = (\varphi(u_1), \varphi(v_1)) = (u, v).$$

В силу того, что ортогональный оператор сохраняет длины, он называется также *изометрическим* оператором или преобразованием. Заметим, что если оператор сохраняет длины, то он сохраняет и скалярные произведения. Это следует из теоремы косинусов:

$$(\varphi(u + v), \varphi(u + v)) = (\varphi(u), \varphi(u)) + 2(\varphi(u), \varphi(v)) + (\varphi(v), \varphi(v))$$

и поэтому

$$\begin{aligned}(\varphi(u), \varphi(v)) &= \frac{1}{2}((\varphi(u+v), \varphi(u+v)) - (\varphi(u), \varphi(u)) - (\varphi(v), \varphi(v))) = \\ &= \frac{1}{2}(|\varphi(u+v)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(v)|^2).\end{aligned}$$

Равенство, использованное в определении ортогонального оператора, можно переписать в виде $(\varphi(u), w) = (u, \varphi^{-1}(w))$ (обозначили $\varphi(v)$ через w). Поэтому на языке сопряженности операторов определение можно сформулировать так: оператор $\varphi : L \rightarrow L$ называется ортогональным, если он сопряжен оператору φ^{-1} . В свою очередь, это имеет место тогда и только тогда, когда матрица A нашего оператора в ортонормированном базисе удовлетворяет равенству $A^{-1} = A^T$, то есть является ортогональной.

Аналогом ортогонального оператора в курсе аналитической геометрии являются движения, сохраняющие положение начала координат.

В соответствии с проведенным там анализом ортогональный оператор на прямой это либо тождественное отображение (в собственном случае), либо симметрия относительно начала (в несобственном случае).

Соответственно, ортогональный оператор на плоскости это либо поворот (в собственном случае) и его матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

либо симметрия относительно координатной оси (в несобственном случае) и его матрица в соответствующем базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Переходя к более высоким размерностям, докажем, что

Теорема 8.1. *Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству ортогонального оператора является инвариантным подпространством.*

Доказательство. Пусть L — наше евклидово линейное пространство, $\varphi : L \rightarrow L$ — ортогональный оператор, L_1 — инвариантное подпространство.

Наша цель — доказать, что ортогональное дополнение $L_1^\perp$ к L_1 инвариантно. Пусть $u \in L_1^\perp$. Тогда для любого вектора $v \in L_1$ имеем:

$$(\varphi(u), v) = (u, \varphi^{-1}(v)) = 0,$$

ибо вектор $\varphi^{-1}(v)$ принадлежит L_1 (ограничение φ на L_1 , как уже сказано выше, невырождено), а u принадлежит ортогональному дополнению L_1 . Теорема доказана.

Докажем, что ортогональный оператор обладает ортонормированным базисом, в котором матрица оператора имеет следующий вид. Вдоль диагонали стоят либо одномерные клетки с ± 1 , либо двумерные клетки вида

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

На остальных позициях стоят нули.

Доказательство поведем индукцией по размерности n рассматриваемого пространства L .

При $n = 1$ и при $n = 2$ доказываемое было установлен выше.

Пусть утверждение доказано для всех размерностей, не превосходящих $n - 1 \geq 2$. Докажем его для n .

Как и любой линейный оператор наш оператор обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством L_1 .

В силу сделанных замечаний существует ортонормированный базис A_1 подпространства L_1 , в котором матрица ограничения нашего оператора на L_1 имеет нужный вид.

По теореме 8.1 ортогональное дополнение L_2 к L_1 инвариантно. Его размерность не больше $(n - 1)$. По предположению индукции существует ортонормированный базис A_2 подпространства L_2 , в котором матрица ограничения нашего оператора на L_2 имеет нужный вид.

Теперь $A_1 \cup A_2$ есть базис пространства L , в котором матрица нашего оператора имеет нужный вид.

Фактически анализ уже проведен, но сделаем еще одно небольшое формальное добавление.

Если в указанном виде матрицы нашего оператора на диагонали стоят две единицы, то матрица ограничения нашего оператора на линейную оболочку соответствующих базисных векторов может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}.$$

Если в указанном виде матрицы нашего оператора на диагонали стоят две “минус единицы”, то матрица ограничения нашего оператора на линейную оболочку соответствующих базисных векторов может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}.$$

В силу этого ортогональный оператор обладает ортонормированным базисом, в котором матрица оператора имеет следующий вид. Вдоль диагонали стоят не более одной одномерной клетки с 1, не более одной одномерной клетки с -1 и двумерные клетки вида

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

На остальных позициях стоят нули.

§9. Представление произвольного оператора в виде композиции ортогонального и самосопряженного.

Пусть $\psi : L \rightarrow L$ — линейный оператор, $\varphi : L \rightarrow L$ — сопряженный ему линейный оператор.

Покажем, что оператор $\varphi\psi$ является самосопряженным. Для любых $u, v \in L$

$$(u, \varphi\psi(v)) = (\psi(u), \psi(v)) = (\varphi\psi(u), v),$$

что и утверждалось.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства L , в котором матрица самосопряженного оператора $\varphi\psi$ имеет диагональный вид. Пусть $\varphi\psi(e_i) = \lambda_i e_i$.

Покажем, что образы $\psi(e_i)$ базисных векторов попарно перпендикулярны. В самом деле

$$(\psi(e_i), \psi(e_j)) = (\varphi\psi(e_i), e_j) = \lambda_i (e_i, e_j) = \lambda_i \cdot 0 = 0,$$

что и требовалось.

Пронормируем систему векторов $\psi(e_1), \psi(e_2), \dots, \psi(e_n)$.

Для этого сначала для ненулевых векторов $\psi(e_i)$ положим

$$f_i = \frac{\psi(e_i)}{|\psi(e_i)|},$$

а затем расширим эту систему до ортонормированного базиса, произвольно заполнив места для индексов, соответствующих нулевым векторам $\psi(e_i)$. Получим систему векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$, связанную с предыдущей соотношениями вида

$$\begin{cases} \psi(e_1) = \mu_1 f_1 \\ \psi(e_2) = \mu_2 f_2 \\ \dots \\ \psi(e_n) = \mu_n f_n. \end{cases}$$

Рассмотрим два линейных оператора. Пусть оператор O переводит ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ — в ортонормированный базис $f_1, f_2, \dots, f_n$, а оператор S переводит ортонормированный базис $f_1, f_2, \dots, f_n$, в систему попарно перпендикулярных векторов

$$\begin{cases} \psi(e_1) = \mu_1 f_1 \\ \psi(e_2) = \mu_2 f_2 \\ \dots \\ \psi(e_n) = \mu_n f_n. \end{cases}$$

Оператор O является ортогональным, оператор S является самосопряженным и $\psi = SO$. Мы получили требуемое.

§10. Косопряженные операторы.

Оператор $\psi : L \rightarrow L$ называется *косопряженным*, если для любых векторов $u, v \in L$ имеет место равенство: $(\psi(u), v) = -(u, \psi(v))$.

Сразу ясно, что у косопряженного оператора нет ненулевых собственных значений, ибо если u — ненулевой собственный вектор, соответствующий собственному значению λ , то

$$(\psi(u), u) = -(u, \psi(u)),$$

$$\lambda(u, u) = -\lambda(u, u),$$

$$\lambda = -\lambda$$

и поэтому $\lambda = 0$. Поэтому в одномерном случае косопряженный оператор тождественно равен нулю.

Матрица косопряженного оператора в ортонормированном базисе должна быть кососимметрической, поэтому в двумерном случае матрица косопряженного оператора в ортонормированном базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим два частных случая. При $\alpha = -1$ матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— поворот на $\frac{\pi}{2}$.

При $\alpha = 1$ матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

— поворот на $-\frac{\pi}{2}$.

При произвольном α один из этих поворотов совмещается с гомотетией с коэффициентом α .

В более высоких размерностях мы пройдем путь, уже пройденный для самосопряженных и ортогональных операторов.

Теорема 10.1. *Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству кососопряженного оператора является инвариантным подпространством.*

Доказательство. Пусть L — евклидово линейное пространство, $\varphi : L \rightarrow L$ — кососопряженный оператор, L_1 — инвариантное подпространство.

Наша цель — доказать, что ортогональное дополнение $L_1^\perp$ к L_1 инвариантно. Пусть $u \in L_1^\perp$. Тогда для любого вектора $v \in L_1$ имеем:

$$(\varphi(u), v) = -(u, \varphi(v)) = 0,$$

ибо вектор $\varphi(v)$ принадлежит L_1 , а u принадлежит ортогональному дополнению L_1 . Теорема доказана.

Докажем теперь, что кососопряженный оператор обладает ортонормированным базисом, в котором матрица оператора имеет следующий вид. Вдоль диагонали стоят либо одномерные клетки с 0, либо двумерные клетки вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

На остальных позициях стоят нули.

Доказательство поведем индукцией по размерности n рассматриваемого пространства L .

При $n = 1$ и при $n = 2$ доказываемое было установлен выше.

Пусть утверждение доказано для всех размерностей, не превосходящих $n - 1 \geq 2$. Докажем его для n .

Как и любой линейный оператор наш оператор обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством L_1 .

В силу сделанных замечаний существует ортонормированный базис A_1 подпространства L_1 , в котором матрица ограничения нашего оператора на L_1 имеет нужный вид.

По теореме 10.1 ортогональное дополнение L_2 к L_1 инвариантно. Его размерность не больше $(n-1)$. По предположению индукции существует ортонормированный базис A_2 подпространства L_2 , в котором матрица ограничения нашего оператора на L_2 имеет нужный вид.

Теперь $A_1 \cup A_2$ есть базис пространства L , в котором матрица нашего оператора имеет нужный вид.

Посмотрим теперь, что это дает в размерности $n = 3$. Если оператор тождественно равен нулю, то ситуация ясна. Если оператор ψ ненулевой, то есть двумерное инвариантное подпространство, на котором он невырожден и его матрица в некотором ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

с $\alpha \neq 0$. Дополним этот базис до ортонормированного базиса пространства, поместив его на первое место для удобства восприятия ситуации. В этом ортонормированном базисе матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравним этот оператор с оператором, заданным формулой $\varphi(u) = [n, u]$, где $n = \{\alpha, 0, 0\}$, а $[n, u]$ обозначает векторное произведение n и u . Для $u = \{x_1, x_2, x_3\}$ имеем:

$$[n, u] = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \right\} = \{0, -\alpha x_3, \alpha x_2\}.$$

Поэтому матрица определенного нами оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

то есть, совпадает с матрицей в этом же базисе оператора ψ .

Таким образом, произвольный *кососопряженный линейный оператор в трехмерном пространстве имеет вид векторного умножения на фиксированный вектор n* . Это верно и для оператора, тождественно равного нулю: в этом случае надо взять $n = \vec{0}$.

Упрощение матрицы билинейной кососимметрической формы.

Пусть в векторном пространстве L задана билинейная функция $a(u, v)$.

Замечание 10.1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица функции $a(u, v)$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L : $a_{ij} = a(e_i, e_j)$. Если функция $a(u, v)$ *кососимметрична* ($a(u, v) = -a(v, u)$), то матрица A *кососимметрична*: $A^T = -A$: $a_{ij} = a(e_i, e_j) = -a(e_j, e_i) = -a_{ji}$.

Замечание 10.2. Пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

функции $a(u, v)$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L ($a_{ij} = a(e_i, e_j)$) *кососимметрична*: $A^T = -A$, то есть $a_{ij} = -a_{ji}$. Тогда *функция $a(u, v)$ кососимметрична*: $a(u, v) = -a(v, u)$. Это легко следует, например, из матричного представления билинейной функции $a(u, v)$:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= u_1^T A v_1, \\ a(v, u) &= v_1^T A u_1 = (u_1^T A^T v_1)^T = (u_1^T (-A) v_1)^T = \\ &= -(u_1^T A^T v_1)^T = -(a(u, v))^T = -a(u, v), \end{aligned}$$

где u_1 — столбец из координат векторов u , u_1^T — строка из координат векторов u , v_1 — столбец из координат векторов v , v_1^T — строка из координат векторов v .

Замечание 10.3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица кососимметрической функции $a(u, v)$ в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L . Рассмотрим линейный оператор $\psi : L \rightarrow L$, матрица которого в этом базисе совпадает с матрицей A : $a(u, v) = (u, \psi(v))$, см. §6.

Как мы знаем, в ортонормированных базисах матрицы функции $a(u, v)$ и оператора ψ совпадают.

По замечаниям первой части этого параграфа найдется ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет следующий вид: вдоль диагонали стоят либо одномерные клетки с 0, либо двумерные клетки вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

На остальных позициях стоят нули. Но эта матрица является одновременно матрицей нашей билинейной кососимметрической функции $a(u, v)$.

Замечание 10.4. Предположим теперь что L — векторное пространство и в нем не зафиксировано векторное произведение, то есть, наше пространство не является евклидовым. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица кососимметрической функции $a(u, v)$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L . Введем в пространстве L структуру евклидова пространства, взяв в качестве скалярного произведения

билинейную функцию (u, v) , матрица которой в этом базисе совпадает с единичной матрицей E . Наш базис оказывается ортонормированным.

По замечанию 10.4 найдется ортонормированный базис, в котором матрица билинейной кососимметрической функции $a(u, v)$ имеет следующий вид: вдоль диагонали стоят либо одномерные клетки с 0, либо двумерные клетки вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

На остальных позициях стоят нули.

Формулы преобразования координат при переходе к новому базису — это просто система линейных уравнений, в которых скалярное произведение никак не участвует. Поэтому мы можем совершить переход от первого базиса ко второму, забыв о временно введенном скалярном произведении, только в рамках векторной структуры пространства L . Поэтому найдется базис пространства L , в котором матрица билинейной кососимметрической функции $a(u, v)$ имеет вид: вдоль диагонали стоят либо одномерные клетки с 0, либо двумерные клетки вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

На остальных позициях стоят нули. Переставим векторы базиса так, чтобы векторы, соответствующие таким ненулевым клеткам, оказались в начале списка. Тогда i -той такой клетке будут соответствовать базисные векторы e_{2i-1}, e_{2i} .

Заметим, кстати, что если таких клеток оказалось r , то ранг нашей матрицы равен $2r$.

Если поменять местами векторы e_{2i-1}, e_{2i} в списке базисных векторов, соответствующие клетке

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

то эта клетка транспонируется. Поэтому переставив, если необходимо, векторы базиса, мы можем добиться выполнения дополнительного

условия: $\alpha_i = a(e_{2i-1}, e_{2i}) > 0$ на соответствующей позиции в такой клетке. При переходе к новому базису по формулам

$$e_{2i-1} = \sqrt{\alpha_i} \cdot f_{2i-1},$$

$$e_{2i} = \sqrt{\alpha_i} \cdot f_{2i}$$

при $i \leq r$ и

$$e_i = f_i$$

при $2r < i \leq n$ наша матрица перейдет в аналогичную матрицу, но в новой матрице новые числа $\alpha_i = a(f_{2i-1}, f_{2i})$ будут равны 1, а наша билинейная функция будет задаваться формой

$$x^1 y^2 - x^2 y^1 + x^3 y^4 - x^4 y^3 + \dots + x^{2r-1} y^{2r} - x^{2r} y^{2r-1},$$

где $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ — координаты первого аргумента нашей билинейной функции, $y^1, y^2, y^3, \dots, y^n$ — координаты второго аргумента.

Нами доказана

Теорема 10.2. *Для любой кососимметрической билинейной функции $a(u, v)$, заданной на векторном пространстве L , найдется базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L в котором функция $a(u, v)$ задается формой*

$$x^1 y^2 - x^2 y^1 + x^3 y^4 - x^4 y^3 + \dots + x^{2r-1} y^{2r} - x^{2r} y^{2r-1},$$

где $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ — координаты первого аргумента нашей билинейной функции, $y^1, y^2, y^3, \dots, y^n$ — координаты второго аргумента, $2r$ — ранг матрицы функции $a(u, v)$.

§11. Поле скоростей тела с неподвижной точкой.

Начнем с замечания, относящегося к дифференцированию произведения матриц. Пусть элементы матриц

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1^1(t) & b_2^1(t) & \dots & b_n^1(t) \\ b_1^2(t) & b_2^2(t) & \dots & b_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^p(t) & b_2^p(t) & \dots & b_n^p(t) \end{pmatrix}$$

и

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & a_2^1(t) & \dots & a_m^1(t) \\ a_1^2(t) & a_2^2(t) & \dots & a_m^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n(t) & a_2^n(t) & \dots & a_m^n(t) \end{pmatrix}$$

являются дифференцируемыми функциями действительного параметра t , матрица

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1^1(t) & c_2^1(t) & \dots & c_m^1(t) \\ c_1^2(t) & c_2^2(t) & \dots & c_m^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^p(t) & c_2^p(t) & \dots & c_m^p(t) \end{pmatrix}$$

является произведением матриц $A(t)$ и $B(t)$: $C(t) = B(t)A(t)$. Введем также в рассмотрение матрицы $B'(t)$, $A'(t)$ и $C'(t)$, составленные из соответствующих производных элементов матриц $A(t)$ и $B(t)$:

$$B(t) = \begin{pmatrix} (b_1^1)'(t) & (b_2^1)'(t) & \dots & (b_n^1)'(t) \\ (b_1^2)'(t) & (b_2^2)'(t) & \dots & (b_n^2)'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_1^p)'(t) & (b_2^p)'(t) & \dots & (b_n^p)'(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} (a_1^1)'(t) & (a_2^1)'(t) & \dots & (a_m^1)'(t) \\ (a_1^2)'(t) & (a_2^2)'(t) & \dots & (a_m^2)'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_1^n)'(t) & (a_2^n)'(t) & \dots & (a_m^n)'(t) \end{pmatrix}$$

и

$$C(t) = \begin{pmatrix} (c_1^1)'(t) & (c_2^1)'(t) & \dots & (c_m^1)'(t) \\ (c_1^2)'(t) & (c_2^2)'(t) & \dots & (c_m^2)'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (c_1^p)'(t) & (c_2^p)'(t) & \dots & (c_m^p)'(t) \end{pmatrix}.$$

По определению произведения матриц

$$c_j^i(t) = b_1^i(t)a_j^1(t) + b_2^i(t)a_j^2(t) + \dots + b_n^i(t)a_j^n(t).$$

Дифференцируя получаем:

$$(c_j^i)'(t) = (b_1^i)'(t)a_j^1(t) + b_1^i(t)(a_j^1)'(t) + (b_2^i)'(t)a_j^2(t) +$$

$$\begin{aligned}
& +b_2^i(t)(a_j^2)'(t) + \cdots + (b_n^i)'(t)a_j^n(t) + b_n^i(t)(a_j^n)'(t) = \\
& = ((b_1^i)'(t)a_j^1(t) + (b_2^i)'(t)a_j^2(t) + \cdots + (b_n^i)'(t)a_j^n(t)) + \\
& + (b_1^i(t)(a_j^1)'(t) + b_2^i(t)(a_j^2)'(t) + \cdots + b_n^i(t)(a_j^n)'(t)).
\end{aligned}$$

Но сумма

$$(b_1^i)'(t)a_j^1(t) + (b_2^i)'(t)a_j^2(t) + \cdots + (b_n^i)'(t)a_j^n(t)$$

стоит в клетке с индексами i и j в матрице $B'(t)A(t)$, а сумма

$$b_1^i(t)(a_j^1)'(t) + b_2^i(t)(a_j^2)'(t) + \cdots + b_n^i(t)(a_j^n)'(t)$$

стоит в клетке с индексами i и j в матрице $B(t)A'(t)$. То есть, матрица $C'(t)$ является суммой матриц $B'(t)A(t)$ и $B(t)A'(t)$:

$$(B(t)A(t))' = C'(t) = B'(t)A(t) + B(t)A'(t)$$

— формула, аналогичная формуле производной произведения двух функций.

Перейдем теперь к основной теме параграфа. Пусть в трехмерном пространстве движется тело, причем какая-то его точка остается неподвижной.

Примером такого движения является вращение с постоянной скоростью вокруг оси. Зафиксируем прямоугольную систему координат, ось абсцисс которой совпадает с осью вращения. В соответствующих цилиндрических координатах наше движение описывается системой

$$\begin{cases} x = \text{const} \\ \varphi = \varphi_0 + \alpha t \\ r = \text{const} . \end{cases}$$

Возвращаясь к основной прямоугольной системе координат, получаем

$$\begin{cases} x = \text{const} \\ y = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \text{const} \\ y = r \cos(\varphi_0 + \alpha t) \\ z = r \sin(\varphi_0 + \alpha t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \text{const} \\ y = r \cos \varphi_0 \cos(\alpha t) - r \sin \varphi_0 \sin(\alpha t) \\ z = r \sin \varphi_0 \cos(\alpha t) + r \cos \varphi_0 \sin(\alpha t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \cos(\alpha t) - z_0 \sin(\alpha t) \\ z = y_0 \sin(\alpha t) + z_0 \cos(\alpha t), \end{cases}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки в начальном положении, x, y, z — координаты точки в момент времени t . Для скоростей имеем:

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = -\alpha y_0 \sin(\alpha t) - \alpha z_0 \cos(\alpha t) \\ z'(t) = \alpha y_0 \cos(\alpha t) + \alpha z_0 \sin(\alpha t). \end{cases}$$

Соответственно,

$$\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = -\alpha z_0 \\ z'(0) = \alpha y_0. \end{cases}$$

То есть, отображение, сопоставляющее радиусу-вектору точки ее скорость при вращении, есть линейный оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Это есть кососопряженный оператор вида, изученного в предыдущем параграфе.

Перейдем к общему случаю движения тела, при котором какая-то его точка остается неподвижной. Зафиксируем в пространстве ортонормированную систему координат A , началом которой является эта неподвижная точка.

Одновременно зафиксируем ортонормированную систему координат $B(t)$, жестко связанную с движущимся телом, началом которой опять является эта неподвижная точка и которая при $t = 0$ совпадает с A : $B(0) = A$.

Так как эти системы координат имеют общее начала, то формулы преобразования координат при переходе от A к $B(t)$ имеют вид:

$$\begin{cases} x^1(t) = c_1^1(t)s^1 + c_2^1(t)s^2 + c_3^1(t)s^3 \\ x^2(t) = c_1^2(t)s^1 + c_2^2(t)s^2 + c_3^2(t)s^3 \\ x^3(t) = c_1^3(t)s^1 + c_2^3(t)s^2 + c_3^3(t)s^3, \end{cases}$$

где $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$ — координаты точки в неподвижном базисе A (они меняются со временем), s^1 , s^2 , s^3 — координаты этой же точки в подвижном базисе B , матрица

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1^1(t) & c_2^1(t) & c_3^1(t) \\ c_1^2(t) & c_2^2(t) & c_3^2(t) \\ c_1^3(t) & c_2^3(t) & c_3^3(t) \end{pmatrix}$$

является ортогональной, то есть, $C^T C = E$.

Для скоростей имеем:

$$\begin{cases} (x^1)'(t) = (c_1^1)'(t)s^1 + (c_2^1)'(t)s^2 + (c_3^1)'(t)s^3 \\ (x^2)'(t) = (c_1^2)'(t)s^1 + (c_2^2)'(t)s^2 + (c_3^2)'(t)s^3 \\ (x^3)'(t) = (c_1^3)'(t)s^1 + (c_2^3)'(t)s^2 + (c_3^3)'(t)s^3. \end{cases}$$

Соответственно,

$$\begin{cases} (x^1)'(0) = (c_1^1)'(0)s^1 + (c_2^1)'(0)s^2 + (c_3^1)'(0)s^3 \\ (x^2)'(0) = (c_1^2)'(0)s^1 + (c_2^2)'(0)s^2 + (c_3^2)'(0)s^3 \\ (x^3)'(0) = (c_1^3)'(0)s^1 + (c_2^3)'(0)s^2 + (c_3^3)'(0)s^3. \end{cases}$$

То есть, отображение, сопоставляющее радиусу-вектору точки ее скорость при вращении, есть линейный оператор с матрицей

$$C'(t) = \begin{pmatrix} (c_1^1)'(0) & (c_2^1)'(0) & (c_3^1)'(0) \\ (c_1^2)'(0) & (c_2^2)'(0) & (c_3^2)'(0) \\ (c_1^3)'(0) & (c_2^3)'(0) & (c_3^3)'(0) \end{pmatrix}.$$

Продифференцируем равенство $C^T C = E$:

$$C'(t)^T C(t) + C(t)^T C'(t) = 0.$$

Так как при $t = 0$ имеем $C(0) = E$, то

$$C'(0)^T + C'(0) = 0$$

— матрица $C'(0)$ является кососимметрической, а соответствующий линейный оператор (его уже не обязательно связывать с системами координат) — кососопряженным.

Как следствие предыдущих рассмотрений получаем, что распределение скоростей при нашем движении идентично распределению скоростей при вращении вокруг некоторой оси. В проведенной выше выкладке это проверено для $t = 0$, но начальный момент отсчета времени мы можем назначить произвольно и поэтому заключение верно при всех t .