версия 23.03.2019

Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 9.

Евклидовы и псевдоевклидовы пространства.

§1. Пространство с невырожденной симметрической билинейной функцией.

Пусть L — действительное конечномерное линейное пространство, $a : L \times L \rightarrow K$ — невырожденная симметрическая билинейная функция. Условие невырожденности означает, что для любого вектора $u \in L$ найдется вектор $v \in L$, для которого $a(u, v) \neq 0$.

В соответствии с рассмотрениями §3.4 пространство L сопряжено себе и функция a играет роль свертки. Но к новой ситуации мы можем применить и рассуждения предыдущей главы.

В частности, в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L форма имеет нормальный вид

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_r^2,$$

причем, так как функция невырождена, то ранг r матрицы формы совпадает с размерностью n пространства L , то есть, форма имеет вид

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

Число k есть положительный индекс нашей квадратичной функции.

Как мы помним, он не зависит от выбора базиса.

Если $k = n$, то линейное пространство L называется *евклидовым*.

Если $1 \leq k < n$, то линейное пространство L называется *псевдоевклидовым*.

Случай $k = 0$ заменой a на $(-a)$ сводится к евклидовому и мы

его рассматривать не будем, не делая в дальнейшем никаких оговорок по этому поводу. Если $k = n - 1$, то пространство L называется *пространством Минковского*.

Как легко видеть, *пространство L является евклидовым тогда и только тогда, когда квадратичная форма положительно определена*.

Вектор $u \in L$ называется *изотропным*, если $a(u, u) = 0$. Обычно подразумевается, что речь идет о ненулевых векторах. (Вспомним векторы асимптотического направления для гиперболы или гиперболоидов.)

Сравнивая определения, получаем: *пространство L является евклидовым тогда и только тогда, когда в нем нет ненулевых изотропных векторов*.

Вернемся назад. Пусть в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L форма $a(x, y)$ имеет нормальный вид

$$a(u, v) = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \dots - x_n y_n.$$

Тогда

$$a(e_i, e_j) = 0$$

при $i \neq j$,

$$a(e_i, e_i) = 1$$

при $i = 1, 2, \dots, k$,

$$a(e_i, e_i) = -1$$

при $i = k + 1, k + 2, \dots, n$.

Лемма 1.1. Пусть ненулевые неизотропные векторы $u_1, u_2, \dots, u_k \in L$ удовлетворяют условию: $a(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$. Тогда векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы.

Доказательство. Допустим, что

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \vec{0}.$$

Тогда для любого $i = 1, 2, \dots, k$

$$\lambda_1 a(u_i, u_1) + \lambda_2 a(u_i, u_2) + \dots + \lambda_k a(u_i, u_k) = a(u_i, \vec{0}) = 0.$$

Учитывая, что $a(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$ и $a(u_i, u_j) \neq 0$ при $i = j$, получаем:

$$\lambda_i a(u_i, u_i) = 0,$$

и, следовательно, $\lambda_i = 0$. Таким образом, линейная комбинация является тривиальной, что и означает линейную независимость векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть ненулевые неизотропные векторы $u_1, u_2, \dots, u_n \in L$ удовлетворяют условию: $a(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$. Тогда векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ составляют базис пространства L .

Утверждение 1.1. Пусть $L_i, i = 1, 2$ — n -мерные векторные пространства, $a_i, i = 1, 2$ — невырожденная билинейная симметрическая функция положительного индекса k на пространстве L_i . Тогда существует изоморфизм $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$, переводящий функцию a_1 в функцию a_2 .

Доказательство. Зафиксируем базисы $e_1, e_2, \dots, e_n$ в пространстве L_1 и $f_1, f_2, \dots, f_n$ в пространстве L_2 , в которых формы имеют нормальный вид.

Так как положительные индексы функций a_1 и a_2 совпадают (оба они равны k), то совпадают и формы, представляющие функции в этих базисах. Они имеют вид

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \dots - x_n y_n.$$

Изоморфизм $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ определим как отображение, сопоставляющее вектору $u \in L_1$, имеющему координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ вектор $v \in L_2$, имеющему координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Так как формы, представляющие функции в этих базисах совпадают, изоморфизм φ , переводит функцию a_1 в функцию a_2 , то есть,

$$a_2(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \dots - x_n y_n = a_1(u_1, u_2),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — координаты вектора u_1 в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ и вектора $\varphi(u_1)$ в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — координаты

вектора u_2 в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ и вектора $\varphi(u_2)$ в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$. Утверждение доказано.

Следствие. Для любых двух n -мерных евклидовых пространств существует изоморфизм, сохраняющий скалярное произведение.

Обычно говорят короче: *n -мерные евклидовы пространства изоморфны*, имея в виду, что соответствующее отображение сохраняет не только структуру линейного пространства, но и скалярное произведение, то есть, в итоге, сохраняет всю структуру евклидова пространства.

§2. Переход от основного базиса ко взаимному.

Пусть L — евклидово (или псевдоевклидово) линейное пространство. Как мы уже отметили в предыдущем параграфе, скалярное произведение (соотв., квадратичная форма псевдоевклидова пространства) в качестве свертки делает его сопряженным самому себе.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L . По нему указывается взаимный базис $e^1, e^2, \dots, e^n$ в сопряженном пространстве. Но в данном случае пространство L сопрягается с собой и поэтому $e^1, e^2, \dots, e^n$ — векторы того же пространства L .

Пусть

$$G_* = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица скалярного произведения в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Если $v = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \dots + y^n e_n$ — вектор пространства L , то

$$\begin{aligned} (e_i, v) &= g_{i1} y^1 + g_{i2} y^2 + \dots + g_{in} y^n = \\ &= g_{i1} e^1(v) + g_{i2} e^2(v) + \dots + g_{in} e^n(v). \end{aligned}$$

Это значит, что вектор e_i как элемент сопряженного пространства представляется в виде

$$e_i = g_{i1} e^1 + g_{i2} e^2 + \dots + g_{in} e^n.$$

В силу произвольности $i = 1, 2, \dots, n$ это означает, что матрица преобразования координат при переходе от базиса $e^1, e^2, \dots, e^n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

то есть, совпадает с матрицей G_* .

Аналогично, если

$$G^* = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & \cdots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & \cdots & g^{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g^{n1} & g^{n2} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица скалярного произведения в базисе $e^1, e^2, \dots, e^n$, то матрица преобразования координат при переходе от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e^1, e^2, \dots, e^n$ совпадает с матрицей G^* .

§3. Скалярное произведение и евклидова метрика.

Сохраним обозначения предыдущих параграфов, но предположим дополнительно, что положительный индекс билинейной функции $a(u, v)$ равен размерности пространства, то есть, что пространство L является евклидовым.

В этом случае билинейная функция $a(u, v)$ обычно называется *скалярным произведением* и обозначается (u, v) , а число $|u| = \sqrt{(u, u)}$ называется *длиной* или *нормой* вектора u . В силу положительной определенности скалярного произведения $|u| > 0$ для любого ненулевого вектора u .

В этих обозначениях неравенство Коши-Буняковского может быть записано в виде

$$(u, v)^2 < (u, u)(v, v)$$

для линейно независимых и в виде равенства

$$(u, v)^2 = (u, u)(v, v)$$

для линейно зависимых векторов u и v , или в виде

$$|(u, v)| \leq |u| \cdot |v|.$$

Поэтому

$$-1 \leq \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|} \leq 1$$

и мы однозначно определяем угол $\varphi \in [0, \pi]$ между векторами u и v , положив

$$\cos \varphi = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}.$$

Обращая определение угла между векторами, получаем:

$$(u, v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos \varphi.$$

Теорема 3.1 (косинусов). *Для любых векторов u и v*

$$|u - v|^2 = |u|^2 - 2|u| \cdot |v| \cos \varphi + |v|^2.$$

Доказательство.

$$|u - v|^2 = (u - v, u - v) = |u|^2 - 2(u, v) + |v|^2 = |u|^2 - 2|u| \cdot |v| \cos \varphi + |v|^2.$$

Следствие (теорема Пифагора). *Если векторы u и v перпендикулярны, то $|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2$.*

Для получения следствия достаточно заметить, что в этом случае $\cos \varphi = 0$.

Далее имеем:

$$\begin{aligned} |u + v|^2 &= (u + v, u + v) = |u|^2 + 2(u, v) + |v|^2 \leq \\ &\leq |u|^2 + 2|(u, v)| + |v|^2 \leq |u|^2 + 2|u| \cdot |v| + |v|^2 = (|u| + |v|)^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

(*неравенство треугольника*).

Функция $\rho(u, v) = |u - v|$ называется *метрикой* или *расстоянием*.

Она обладает следующими основными свойствами.

1. $\rho(u, v) = \rho(v, u) \geq 0$.
2. $\rho(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$.
3. $\rho(u, w) \leq \rho(u, v) + \rho(v, w)$ (другой вариант *неравенства треугольника*).

Выведем последнее свойство из неравенства треугольника для нормы:

$$\begin{aligned} \rho(u, w) &= |u - w| = |(u - v) + (v - w)| \leq \\ &\leq |u - v| + |v - w| = \rho(u, v) + \rho(v, w). \end{aligned}$$

Вернемся к обозначениям §1. Пусть в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ евклидова пространства L форма $a(x, y)$ имеет нормальный вид

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Тогда

$$(e_i, e_j) = 0$$

при $i \neq j$,

$$a(e_i, e_i) = 1$$

при всех $i = 1, 2, \dots, k$.

То есть, в терминологии этого параграфа векторы базиса имеют единичную длину и попарно перпендикулярны. Верно и обратное, если векторы базиса евклидова пространства имеют единичную длину и попарно перпендикулярны, то скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Как и в курсе аналитической геометрии такие базисы называются *ортонормированными*, а соответствующая система координат — *прямоугольной*.

В прямоугольной системе координат длина вектора $u = \{x_1, \dots, x_n\}$ вычисляется по формуле

$$|u| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

а косинус угла между векторами $u = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $v = \{y_1, \dots, y_n\}$ — по формуле

$$\cos \varphi = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}.$$

§4. Аффинные евклидовы пространства.

Аффинное пространство P называется *евклидовым*, если его направляющее линейное пространство L является евклидовым, то есть, на L зафиксировано скалярное произведение.

Длина отрезка AB определяется как длина вектора $\overrightarrow{AB}$. По этому определению длина отрезка BA определяется как длина вектора $\overrightarrow{BA}$. Но $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ и поэтому $|\overrightarrow{BA}| = |-\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}|$. Поэтому длины отрезков AB и BA совпадают. Расстояние $\rho(A, B)$ между точками A и B определяется как длина отрезка AB , то есть, как длина вектора $\overrightarrow{AB}$.

При этом

1. $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \rho(B, A) \geq 0$.
2. $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, а это имеет место тогда и только тогда, когда $A = B$.
3. $\rho(A, C) = |\overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \rho(A, B) + \rho(B, C)$ (опять *неравенство треугольника*).

Если в прямоугольной системе координат $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то $\overrightarrow{AB} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n\}$ и

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Определенное ранее понятие угла между векторами переносится на направленные отрезки и далее на лучи.

Теорема косинусов приобретает вид, знакомый со школы:
 Для любых точек A, B, C пространства P

$$|BC|^2 = |AB|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cos \varphi + |AC|^2,$$

где φ — угол BAC .

Это же можно сказать и о теореме Пифагора:
 Пусть угол BAC — прямой. Тогда

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2.$$

§5. Ортогональное дополнение.

Сохраним обозначения предыдущего параграфа.

Скажем, что векторы $u, v \in L$ сопряжены относительно билинейной функции $a(u, v)$, или перпендикулярны, или ортогональны друг другу, если $a(u, v) = 0$.

Для любого подпространства $L_1 \subseteq L$ множество $L_1^\perp = \{u: u \in L, a(u, v) = 0 \text{ для любого } v \in L_1\}$ называется ортогональным дополнением подпространства L_1 .

Сравнивая определения, получаем, что ортогональное дополнение подпространства L_1 есть ни что иное как аннулятор подпространства L_1 относительно сверки $a(u, v)$. Поэтому $L_1^\perp$ есть подпространство пространства L и

$$\dim L_1 + \dim L_1^\perp = \dim L.$$

В случае псевдоевклидова пространства возможно, что пересечение

$$L_1 \cap L_1^\perp$$

нетривиально, то есть, содержит и ненулевые векторы.

Например, если u — изотропный вектор, то он сопряжен с собой и поэтому принадлежит ортогональному дополнению подпространства $L_1 = L(u)$. То есть, в этом случае пересечение $L_1 \cap L_1^\perp$ не совпадает с $\{\vec{0}\}$ и более того, $L_1 \subseteq L_1^\perp$.

С другой стороны, пусть пересечение

$$L_1 \cap L_1^\perp$$

нетривиально и u — ненулевой вектор из этого пересечения. Тогда $u \in L_1$ и $u \in L_1^\perp$. По определению ортогонального дополнения $a(u, u) = 0$, то есть, вектор u — изотропный.

В евклидовом пространстве нет изотропных векторов. В соответствии с проведенным рассуждением

$$L_1 \cap L_1^\perp = \{\vec{0}\}$$

для любого подпространства $L_1 \subseteq L$ пространства L . А так как

$$\dim L_1 + \dim L_1^\perp = \dim L,$$

то

$$L = L_1 \oplus L_1^\perp.$$

§6. Ортогональная проекция.

Пусть в обозначениях предыдущего параграфа $L_1 \subseteq L$ — подпространство евклидова пространства L . Соответственно, $L_1^\perp$ — его ортогональное дополнение. Как мы знаем $L = L_1 \oplus L_1^\perp$. Поэтому определена проекция π пространства L на подпространство L_1 , параллельно подпространству $L_1^\perp$. Она называется *ортогональной проекцией* пространства L на подпространство L_1 . Как мы помним, проекция π является линейным отображением.

Положение подпространств L_1 и $L_1^\perp$ симметрично, поэтому проекция пространства L на подпространство $L_1^\perp$, параллельно подпространству L_1 является ортогональной проекцией пространства L на подпространство $L_1^\perp$.

Пусть подпространство L_1 есть линейная оболочка вектора e единичной длины, $v = \lambda e$ (вспомним аналитическую геометрию: λ есть алгебраическое значение $\langle v \rangle$ вектора v на оси с направляющим вектором e). Тогда

$$(u, e) = (v, e) + (w, e) = (\lambda e, e) + 0 = \lambda.$$

То есть, $(u, e) = \langle \pi(u) \rangle$.

§7. Процесс ортогонализации.

Пусть, как и раньше, L — евклидово пространство.

В этом параграфе по системе линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ мы построим ортогональную систему $f_1, f_2, \dots, f_k$, полагая $f_1 = e_1$ и при $i > 1$ заменяя вектор e_i на вектор $f_i = e_i - u_i$, где $u_i \in L(e_1, e_2, \dots, e_{i-1})$.

Эти замены имеют вид элементарных преобразований и в соответствии с наблюдениями §8.3 $L(e_1, e_2, \dots, e_i) = L(f_1, f_2, \dots, f_i)$.

Так как векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ линейно независимы, то при переходе от i к $(i + 1)$ размерность линейной оболочки $L(e_1, e_2, \dots, e_i)$ возрастает на единицу.

На очередном $(i + 1)$ шаге берем в качестве вектора $u_{i+1} \in L(e_1, e_2, \dots, e_i)$ ортогональную проекцию вектора e_{i+1} на подпространство $L(e_1, e_2, \dots, e_i)$. Так как $e_{i+1} = f_{i+1} + u_{i+1}$, то $f_{i+1} \in L^\perp(e_1, e_2, \dots, e_i)$. Эти векторы f_{i+1} и u_{i+1} определены однозначно.

Собственно, на этом можно было бы и остановиться. Система $f_1, f_2, \dots, f_k$ описана.

Но когда мы будем реализовывать эту схему и реально вычислять векторы $f_1, f_2, \dots, f_k$, мы оказываемся у развилки.

Первая возможность — вычислять векторы $f_1, f_2, \dots, f_k$ как линейные комбинации векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$:

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_2 + p_{21}e_1 \\ \dots \\ f_k = e_k + p_{k2}e_2 + \dots + p_{kk-1}e_{k-1}. \end{cases}$$

Возникнет система, очень похожая на использованную в методе Якоби. Собственно, отличие состоит в том, что вместо рассмотрения условия $(f_i, e_i) = 1$ метода Якоби мы фиксируем коэффициент в первом слагаемом правой части, полагая его равным единице.

Вторая возможность — воспользоваться схемой §8.3, что мы сейчас и сделаем. Пользуясь равенством $L(f_1, f_2, \dots, f_i) = L(e_1, e_2, \dots, e_i)$, будем искать векторы $f_1, f_2, \dots, f_k$ в виде

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_2 + p_{21}f_1 \\ \dots \\ f_i = e_i + p_{i1}f_1 + p_{i2}f_2 + \dots + p_{ii-1}f_{i-1} \\ \dots \\ f_k = e_k + p_{k1}f_1 + p_{k2}f_2 + \dots + p_{kk-1}f_{k-1}. \end{cases}$$

Будем “вычислять” векторы $f_1, f_2, \dots, f_k$ последовательно, обеспечивая на каждом шаге построения ортогональность вновь находимого вектора предыдущим. Сначала полагаем $f_1 = e_1$. При указании вектора f_i , пользуясь тем, что векторы f_j и f_l при $j < l < i$ перпендикулярны друг другу, получаем

$$\begin{aligned} (f_j, f_i) &= (f_j, e_i) + p_{i1}(f_j, f_1) + p_{i2}(f_j, f_2) + \dots + p_{ii-1}(f_j, f_{i-1}) = \\ &= (f_j, e_i) + p_{ij}(f_j, f_j). \end{aligned}$$

Так как наша цель — проследит выполнение условия

$$(f_j, f_i) = 0,$$

то

$$(f_j, e_i) + p_{ij}(f_j, f_j) = 0,$$

$$p_{ij} = -\frac{(f_j, e_i)}{(f_j, f_j)}.$$

Все.

§8. Ортогональные и k -ортогональные матрицы.

Пусть $s(u, v)$ невырожденная билинейная симметрическая функция положительного индекса k на линейном n -мерном пространстве L

($k \leq n$). Существует базис, в котором соответствующая квадратичная форма имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

Матрица этой формы имеет вид:

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где единицы стоят на первых k позициях диагонали.

Как мы видели в §8.3 при переходе к новому базису матрица билинейной функции преобразуется по формуле:

$$B = C^T A C,$$

где C — матрица преобразования координат при переходе к новому базису.

Соответственно, для того, чтобы при переходе к новому базису наша квадратичная форма сохраняла указанный нормальный вид, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$C^T E_k C = E_k.$$

Матрица C называется k -ортогональной, если

$$C^T E_k C = E_k.$$

В этих терминах предыдущее наблюдение выглядит так: для того, чтобы при переходе к новому базису наша квадратичная

форма сохраняла указанный нормальный вид, необходимо и достаточно, чтобы матрица преобразования координат была k -ортогональной.

В евклидовом случае $k = n$ матрица $E_k = E_n$ есть единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица C называется *ортогональной*, если

$$C^T C = E \quad \text{или} \quad C = (C^T)^{-1}.$$

Для того, чтобы при переходе к новому базису положительно определенная квадратичная форма сохраняла нормальный вид, необходимо и достаточно, чтобы матрица преобразования координат была ортогональной.

Множество k -ортогональных (соответственно, ортогональных) матриц порядка n образует группу (подгруппу группы все невырожденных матриц порядка n). В самом деле, если C_1 и C_2 — две k -ортогональные матрицы порядка n , то для их произведения $C = C_1 C_2$ имеем:

$$\begin{aligned} C^T E_k C &= (C_1 C_2)^T E_k (C_1 C_2) = C_2^T C_1^T E_k C_1 C_2 = \\ &= C_2^T (C_1^T E_k C_1) C_2 = C_2^T E_k C_2 = E_k, \end{aligned}$$

что и требовалось.

§9. Гиперболические повороты плоскости.

Посмотрим, как выглядят невырожденные линейные операторы на плоскости, сохраняющие основную структуру плоскости Минковского, то есть, операторы сохраняющие квадратичную форму $x_1^2 - x_2^2$.

Соответствующий вопрос для евклидовой плоскости был рассмотрен в курсе аналитической геометрии. Мы доказали, что матрица собственного движения плоскости с сохранением начала имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

При действии невырожденного линейного оператора наш базис перейдет в некоторую линейно независимую систему векторов, то есть, опять в некоторый базис.

Оператор сохранит рассматриваемую форму тогда и только тогда, когда матрица формы в новом базисе будет совпадать с матрицей формы в исходном базисе. См. также §6.5.

Поэтому вопрос сводится к рассмотренному в предыдущем параграфе вопросу о сохранении формы при переходе к этому новому базису.

В соответствии с замечаниями предыдущего параграфа для сохранения квадратичной формы $x_1^2 - x_2^2$ необходимо и достаточно, чтобы матрица преобразования координат (совпадающая с матрицей оператора, см. §6.5)

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

была 1-ортогональной, то есть удовлетворяла матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем левую часть этого равенства:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ -\beta & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & \alpha\gamma - \beta\delta \\ \alpha\gamma - \beta\delta & \gamma^2 - \delta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сравнивая результат с матрицей, стоящей в правой части равенства, получаем систему:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 1 \\ \alpha\gamma - \beta\delta = 0 \\ \gamma^2 - \delta^2 = -1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы означает, что конец образа f_1 первого базисного вектора e_1 старого базиса лежит на гиперболе $x^2 - y^2 = 1$.

Последнее уравнение системы означает, что конец образа f_2 второго базисного вектора e_2 старого базиса лежит на гиперболе $x^2 - y^2 = -1$.

Первая строка матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

является ненулевой: так как $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, то $\alpha \neq 0$. Так как

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta\delta = 0,$$

то строки матрицы пропорциональны и при некотором λ

$$\begin{cases} \delta = \lambda\alpha \\ \gamma = \lambda\beta \end{cases}.$$

Считаем:

$$1 = \delta^2 - \gamma^2 = \lambda^2(\alpha^2 - \beta^2) = \lambda^2,$$

$\lambda = \pm 1$.

Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

либо

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

В первом случае

$$\det C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 = 1$$

— переход с сохранением ориентации. Во втором случае

$$\det C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \beta^2 = -1$$

— ориентация меняется на противоположную.

Повороты на евклидовой плоскости сохраняют ориентацию. Соответственно, и сейчас мы займемся преобразованиями, сохраняющими ориентацию, то есть, преобразованиями с матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Функция “гиперболический синус”

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

является монотонно возрастающей и принимает все значения на интервале $(-\infty, \infty)$. Поэтому найдется такое значение $\theta \in \mathbb{R}$, что $\beta = \operatorname{sh} \theta$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha^2 = 1 + \beta^2 &= 1 + \frac{(e^\theta - e^{-\theta})^2}{4} = 1 + \frac{e^{2\theta} - 2 + e^{-2\theta}}{4} = \\ &= \frac{e^{2\theta} + 2 + e^{-2\theta}}{4} = \frac{(e^\theta + e^{-\theta})^2}{4} = \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Функция “гиперболический косинус” задается формулой

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

В силу предыдущей выкладки $\alpha = \pm \operatorname{ch} \theta$.

Но α — это абсцисса вектора f_1 . Поэтому равенство $\alpha = \operatorname{ch} \theta$ означает, что конец вектора f_1 лежит на правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 1$. При этом α является и ординатой вектора f_2 . Поэтому равенство $\alpha = \operatorname{ch} \theta$ означает, что конец вектора f_2 лежит на верхней ветви гиперболы $x^2 - y^2 = -1$.

В этих обозначениях матрица нашего преобразования имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \theta & \operatorname{sh} \theta \\ \operatorname{sh} \theta & \operatorname{ch} \theta \end{pmatrix}.$$

Соответственно, равенство $\alpha = -\operatorname{ch} \theta$ означает, что конец вектора f_1 лежит на левой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, а конец вектора f_2 лежит на нижней ветви гиперболы $x^2 - y^2 = -1$.

В этом случае матрица нашего преобразования имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{ch} \theta & \operatorname{sh} \theta \\ \operatorname{sh} \theta & -\operatorname{ch} \theta \end{pmatrix}.$$

§10. Ориентированный и неориентированный объем.

В этом параграфе мы не будем уходить глубоко в обсуждение всех нюансов, связанных с измерениями объемов, и примем за точку старта формулу, по которой n -мерный объем n -мерного параллелепипеда A вычисляется как произведение $(n-1)$ -мерного объема параллелепипеда B являющегося основанием параллелепипеда A на соответствующую высоту параллелепипеда A . При этом объем параллелепипеда, натянутого на векторы ортонормированного базиса, принимается равным единице.

Начнем с обсуждения высоты параллелепипеда, то есть, расстояния между гиперплоскостями, содержащими верхнее и нижнее основания параллелепипеда.

Пусть теперь $P_1 \ni O$ — гиперплоскость в пространстве P , L_1 — ее направляющее пространство, $L_1^\perp$ — ортогональное дополнение к L_1 .

Для любой точки $M \in P$ вектор $\overrightarrow{OM}$ единственным образом представляется в виде $\overrightarrow{OM} = u_M + v_M$, где $u_M \in L_1$, $v_M \in L_1^\perp$.

Если O_1 — другая точка плоскости P_1 , то

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{O_1O} + u_M) + v_M,$$

где $\overrightarrow{O_1O} \in L_1$ и $v_M \in L_1^\perp$. То есть, вектор v_M не зависит от выбора точки O . Реализуем вектор u_M в виде направленного отрезка с началом в точке O : $u_M = \overrightarrow{OM'}$. В силу того, что

$$\overrightarrow{OM} = u_M + v_M = \overrightarrow{OM'} + v_M$$

и

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M},$$

имеем:

$$v_M = \overrightarrow{M'M}.$$

То есть, направленный отрезок $\overrightarrow{M'M}$ перпендикулярен гиперплоскостям P_1 и P_2 .

По теореме Пифагора

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM'}|^2 + |\overrightarrow{M'M}|^2.$$

Поэтому, если $O \neq M'$, то

$$|\overrightarrow{OM}|^2 > |\overrightarrow{M'M}|^2,$$

$$\rho(O, M) > \rho(M'M).$$

Но точка O может быть нами выбрана произвольно, поэтому расстояние от точки M до точки M' меньше, чем расстояние от точки M до любой другой точки плоскости P_1 . Из этого следует, что точка определена однозначно (ортогональная проекция точки M на плоскость P_1).

Так как $v_M \in L_1^\perp$, то отрезок MM' перпендикулярен плоскости P_1 и точка M' есть основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость P_1 .

Пусть теперь направляющее пространство L_2 плоскости P_2 лежит в L_1 (то есть, плоскость P_2 параллельна плоскости P_1 и $\dim P_2 \leq \dim P_1$) и $M_1, M_2 \in P_2$.

Пусть $M'_1, M'_2 \in P_1$ — ортогональные проекции точек M_1 и M_2 на плоскость P_1 . Тогда $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM'_1} + \overrightarrow{M'_1M_1}$ и $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM'_2} + \overrightarrow{M'_2M_2}$,

$$\overrightarrow{OM'_1} + \overrightarrow{M'_1M_1} = \overrightarrow{M'_2M_2} + \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{OM'_2}.$$

$$\overrightarrow{M'_1M_1} - \overrightarrow{M'_2M_2} = \overrightarrow{M_2M_1} - \overrightarrow{OM'_1} + \overrightarrow{OM'_2}.$$

Вектор $\overrightarrow{M'_1M_1} - \overrightarrow{M'_2M_2}$, стоящий в левой части этого равенства принадлежит $L_1^\perp$. Вектор $\overrightarrow{M_2M_1} - \overrightarrow{OM'_1} + \overrightarrow{OM'_2}$, стоящий в правой части равенства принадлежит L_1 . Так как общим для этих подпространств является только нулевой вектор $\vec{0}$, то $\overrightarrow{M'_1M_1} - \overrightarrow{M'_2M_2} = \vec{0}$, $\overrightarrow{M'_1M_1} = \overrightarrow{M'_2M_2}$. В силу произвольности точек M_1 и $M_2 \in P_2$ это означает, что все точки плоскости P_2 равноудалены от плоскости P_1 , или что длины всех перпендикуляров, опущенных из точек плоскости P_2 на плоскость P_1 имеют одинаковую длину.

Итак, для векторов $u_1, u_2, \dots, u_n$ обозначим через $V(u_1, u_2, \dots, u_n)$ объем параллелепипеда, натянутого на векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$. В случае, если векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ линейно зависимы полагаем $V(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$.

Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ линейно зависимы, *ориентированный объем* $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ полагаем равным нулю.

Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ линейно независимы и ориентация этой система положительна, *ориентированный объем* $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ полагаем равным $V(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ линейно независимы и ориентация этой система отрицательна, *ориентированный объем* $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ полагаем равным $-V(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Фигурирующие ниже векторы будем представлять себе направленными отрезками с началом в $\vec{0} \in L$. Предположим, что векторы $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ линейно независимы. Тогда их линейная оболочка $L_1 = L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ является $(n-1)$ -мерным подпространством пространства L , а ортогональное дополнение $L_1^\perp$ к ней — одномерным подпространством пространства L и

$$L = L_1 \oplus L_1^\perp.$$

Поэтому вектор u_i представляется в виде суммы

$$u_i = v_1 + v,$$

где $v \in L_1^\perp$ и $v_1 \in L_1$. В силу принадлежности $v_1 \in L_1 = L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ вектор v_1 представляется в виде линейной комбинации

$$v_1 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + \lambda_{i+1} u_{i+1} + \dots + \lambda_n u_n$$

и поэтому

$$v = u_i - \lambda_1 u_1 - \dots - \lambda_{i-1} u_{i-1} - \lambda_{i+1} u_{i+1} - \dots - \lambda_n u_n.$$

По лемме 8.3.3 (для определителей Грама скалярного произведения)

$$G(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = G(u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_n).$$

В последнем определителе Грама вектор v перпендикулярен векторам $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ и поэтому $G(u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_n) =$

$$= \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_{i-1}) & (u_1, v) & (u_1, u_{i+1}) & \dots & (u_1, u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_{i-1}, u_1) & \dots & (u_{i-1}, u_{i-1}) & (u_{i-1}, v) & (u_{i-1}, u_{i+1}) & \dots & (u_{i-1}, u_n) \\ (v, u_1) & \dots & (v, u_{i-1}) & (v, v) & (v, u_{i+1}) & \dots & (v, u_n) \\ (u_{i+1}, u_1) & \dots & (u_{i+1}, u_{i-1}) & (u_{i+1}, v) & (u_{i+1}, u_{i+1}) & \dots & (u_{i+1}, u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_n, u_1) & \dots & (u_n, u_{i-1}) & (u_n, v) & (u_n, u_{i+1}) & \dots & (u_n, u_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_{i-1}) & 0 & (u_1, u_{i+1}) & \dots & (u_1, u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_{i-1}, u_1) & \dots & (u_{i-1}, u_{i-1}) & 0 & (u_{i-1}, u_{i+1}) & \dots & (u_{i-1}, u_n) \\ 0 & \dots & 0 & (v, v) & 0 & \dots & 0 \\ (u_{i+1}, u_1) & \dots & (u_{i+1}, u_{i-1}) & 0 & (u_{i+1}, u_{i+1}) & \dots & (u_{i+1}, u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_n, u_1) & \dots & (u_n, u_{i-1}) & 0 & (u_n, u_{i+1}) & \dots & (u_n, u_n) \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по i -тому столбцу получаем:

$$G(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = G(u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_n) =$$

$$= (v, v) \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_{i-1}) & (u_1, u_{i+1}) & \dots & (u_1, u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_{i-1}, u_1) & \dots & (u_{i-1}, u_{i-1}) & (u_{i-1}, u_{i+1}) & \dots & (u_{i-1}, u_n) \\ (u_{i+1}, u_1) & \dots & (u_{i+1}, u_{i-1}) & (u_{i+1}, u_{i+1}) & \dots & (u_{i+1}, u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_n, u_1) & \dots & (u_n, u_{i-1}) & (u_n, u_{i+1}) & \dots & (u_n, u_n) \end{vmatrix} =$$

$$= (v, v)G(u_1 \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) = |v|^2 G(u_1 \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

или

$$(1) \quad \frac{\sqrt{G(u_1 \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)}}{|v| \cdot \sqrt{G(u_1 \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)}}.$$

Исходя из замечание первого абзаца этого параграфа покажем индукцией по размерности пространства, что неориентированный объем $V(u_1, \dots, u_n)$ параллелепипеда, натянутого на векторы $u_1, \dots, u_n$, равен $\sqrt{G(u_1, \dots, u_n)}$.

В размерности 1 это очевидно: $V(u_1) = |u_1| = \sqrt{(u_1, u_1)} = \sqrt{G(u_1)}$.

Если в общем случае $L_1 = L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ есть плоскость нижнего основания рассматриваемого параллелепипеда, то плоскость его верхнего основания имеет вид $u_i + L_1 = v + L_1$, а вектор v есть общий перпендикуляр к этим плоскостям, начало которого $\vec{0}$ лежит в L_1 , а конец — в $u_i + L_1$, то есть, он является высотой нашего параллелепипеда. В соответствии с нашим определением равенство (1) означает, что объем $V(u_1, \dots, u_n)$, равный произведению площади (то есть, $(n-1)$ -мерного объема) основания на соответствующую высоту, вычисляется по формуле

$$V(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{G(u_1, \dots, u_n)}$$

и это не зависит от того, какое из оснований $L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ (то есть, при каком $i = 1, 2, \dots, n$) нашего параллелепипеда мы берем.

Проведенное выше рассуждение корректно в предположении линейной независимости векторов $u_1, \dots, u_n$. Если же векторы $u_1, \dots, u_n$ линейно зависимы, то наш "параллелепипед" оказывается лежащим в $(n-1)$ -мерном подпространстве и его (n -мерный) объем естественно считать равным нулю. При этом равенство

$$V(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{G(u_1, \dots, u_n)}$$

опять оказывается верным. .

Зафиксируем теперь ортонормированный базис пространства L : $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пусть

$$\begin{cases} u_1 = x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + \dots + x_1^n e_n \\ u_2 = x_2^1 e_1 + x_2^2 e_2 + \dots + x_2^n e_n \\ \dots \\ u_n = x_n^1 e_1 + x_n^2 e_2 + \dots + x_n^n e_n \end{cases}$$

Тогда $V^2(u_1, u_2, \dots, u_n) = G(u_1, u_2, \dots, u_n) =$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_n) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & \dots & (u_2, u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_n, u_1) & (u_n, u_2) & \dots & (u_n, u_n) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^1 x_1^1 + \dots + x_1^n x_1^n & x_1^1 x_2^1 + \dots + x_1^n x_2^n & \dots & x_2^1 x_1^1 + \dots + x_1^n x_2^n \\ x_2^1 x_1^1 + \dots + x_2^n x_1^n & x_2^1 x_2^1 + \dots + x_2^n x_2^n & \dots & x_2^1 x_2^1 + \dots + x_2^n x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 x_1^1 + \dots + x_n^n x_1^n & x_n^1 x_2^1 + \dots + x_n^n x_2^n & \dots & x_n^1 x_2^1 + \dots + x_n^n x_2^n \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle^2 = V^2(u_1, u_2, \dots, u_n) =$

$$= \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}^2.$$

То есть числа $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ и

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

равны по абсолютной величине. Оба они одновременно положительны, если система векторов $u_1, u_2, \dots, u_n$ ориентирована положительно, или одновременно отрицательны, если система векторов $u_1, u_2, \dots, u_n$ ориентирована отрицательно. То есть, всегда $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle =$

$$(1) \quad = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Для неортонормированного базиса

Теорема 10.1. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L ,

$$\begin{cases} u_1 = c_1^1 e_1 + c_1^2 e_2 + \dots + c_1^n e_n \\ u_2 = c_2^1 e_1 + c_2^2 e_2 + \dots + c_2^n e_n \\ \dots \\ u_n = c_n^1 e_1 + c_n^2 e_2 + \dots + c_n^n e_n \end{cases}$$

Тогда

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{vmatrix} \cdot \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle.$$

Доказательство В силу равенства (1) ориентированный объем $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ является кососимметрической функцией аргументов $u_1, u_2, \dots, u_n$ и линейно зависит от каждого из них. Поэтому доказательство сводится к ссылке на леммы 6.2.2.