Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 8.

Квадратичные функции.

§1. Билинейные симметрические и квадратичные функции.

С понятием билинейной функции мы познакомились в §3.3.

Сейчас мы займемся рассмотрением более узкого случая, когда аргументы билинейной функции $a : L \times L \rightarrow K$ принадлежат одному и тому же линейному пространству L .

Такая функция называется *симметрической*, если $a(u, v) = a(v, u)$ для любых $u, v \in L$, и *кососимметрической*, если $a(u, v) = -a(v, u)$ для любых $u, v \in L$.

Проверим, что множество $\mathbb{S}$ всех симметрических билинейных функций является подпространством пространства B всех билинейных функций $L \times L \rightarrow K$.

Пусть $a = a_1 + a_2$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{S}$. Тогда для любых $u, v \in L$ имеем: $a(u, v) = a_1(u, v) + a_2(u, v) = a_1(v, u) + a_2(v, u) = a(v, u)$.

Пусть $a = \lambda a_1$, где $a_1 \in \mathbb{S}$ и $\lambda \in K$. Тогда для любых $u, v \in L$ имеем: $a(u, v) = \lambda a_1(u, v) = \lambda a_1(v, u) = a(v, u)$.

Что и требовалось.

Проверим, что множество $\mathbb{K}$ всех кососимметрических билинейных функций является подпространством пространства B всех билинейных функций $L \times L \rightarrow K$.

Пусть $a = a_1 + a_2$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$. Тогда для любых $u, v \in L$ имеем: $a(u, v) = a_1(u, v) + a_2(u, v) = -a_1(v, u) - a_2(v, u) = -a(v, u)$.

Пусть $a = \lambda a_1$, где $a_1 \in \mathbb{K}$ и $\lambda \in K$. Тогда для любых $u, v \in L$ имеем: $a(u, v) = \lambda a_1(u, v) = -\lambda a_1(v, u) = -a(v, u)$.

Что и требовалось.

Теперь заметим, что если $a \in \mathbb{S} \cap \mathbb{K}$, то для любых $u, v \in L$ имеем одновременно: $a(u, v) = a(v, u)$ и $a(u, v) = -a(v, u)$. Тогда $a(v, u) = -a(v, u)$, а это возможно лишь если $a(u, v) = a(v, u) = 0$. То есть, $a \equiv 0$.

Таким образом, $\mathbb{S} \cap \mathbb{K} = \{\vec{0}\}$.

Но для любой билинейной функции a функция $b_1(u, v) = \frac{a(u, v) + a(v, u)}{2}$ является билинейной симметрической функцией, а функция $b_2(u, v) = \frac{a(u, v) - a(v, u)}{2}$ является билинейной кососимметрической функцией. При этом $a = b_1 + b_2$.

Поэтому $B = \mathbb{S} \oplus \mathbb{K}$.

Функция $f : L \rightarrow K$ называется квадратичной, если существует такая билинейная $a : L \times L \rightarrow K$, что $f(u) = a(u, u)$.

Чуть выше мы установили, что всякая билинейная $a : L \times L \rightarrow K$ однозначно представляется в виде суммы $a = b_1 + b_2$ билинейной симметрической функции b_1 и билинейной кососимметрической функции b_2 .

Но тогда

$$f(u) = a(u, u) = a_1(u, u) + a_2(u, u) = a_1(u, u) + 0 = a_1(u, u),$$

то есть, квадратичная функция f определяется только симметрической составляющей функции a и эта связь является уже взаимно однозначной.

Иногда говорят, симметрическая билинейная функция *а полярна* квадратичной функции f , если $f(u) = a(u, u)$. В системе координат и билинейная функция и квадратичная функция представлены однородными многочленами степени 2. Однородные многочлены называются *формами*. В соответствии с этим в системе координат билинейная функция представлена билинейной формой, а квадратичная функция — квадратичной формой. *Матрица квадратичной формы* — это тоже самое, что и матрица полярной ей симметрической билинейной формы.

Заметим, что полярная симметрическая форма однозначно восстанавливается по квадратичной, ибо

$$f(u+v) = a(u+v, u+v) = a(u, u) + 2a(u, v) + a(v, v) = f(u) + 2a(u, v) + f(v)$$

и поэтому

$$a(u, v) = \frac{f(u+v) - f(u) - f(v)}{2}.$$

§2. Матрица квадратичной формы.

Канонический и нормальный вид квадратичной формы.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис рассматриваемого пространства L .

Временно для упрощения обозначений откажемся от использования верхнего регистра для нумерации координат.

Как мы знаем в этом базисе рассматриваемая билинейная функция представлена формой

$$\begin{aligned} a(u, v) = & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \dots + \\ & + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n, \end{aligned}$$

где

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

и

$$v = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n.$$

Это же равенство можно записать в матричной форме

$$\begin{aligned} a(u, v) = & x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n) + \\ & + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n) + \dots + \\ & + x_n(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n) = \\ = & (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \\
&= (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица нашей билинейной функции.

Соответствующая квадратичная функция представлена формой

$$\begin{aligned}
f(u) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\
&+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + \\
&+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}$$

или в матричной форме

$$f(u) = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что

$$a_{ij} = a(e_i, e_j),$$

а так как билинейная функция $a(u, v)$ симметрична, то $a_{ij} = a_{ji}$, что означает симметричность матрицы A . Поэтому квадратичную форму, представляющую функцию f , чаще записывают в виде

$$f(u) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n +$$

$$+a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n.$$

**Преобразование матрицы билинейной функции
при переходе к новому базису.
Ранг матрицы билинейной функции.**

Пусть A — матрица билинейной функции a в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L . В соответствии с замечаниями предыдущего параграфа билинейная функция может быть задана матричным уравнением

$$a(u, v) = u_1 A v_1,$$

где u_1 — строка из координат вектора u в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L , v_1 — столбец из координат вектора v в том же базисе.

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ — другой базис пространства L .

При переходе от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$ координаты преобразуются по формулам

$$v_1 = C v_2,$$

где v_2 — столбец из координат вектора v в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$, C — матрица преобразования координат при переходе от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$. Транспонируя это равенство получаем формулу преобразования строк из координат векторов:

$$u_1 = u_2 C^T,$$

где u_2 — строка из координат вектора u в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$. Подставляя эти равенства в формулу

$$a(u, v) = u_1 A v_1,$$

получаем:

$$a(u, v) = u_2 C^T A C v_2.$$

То есть, для матрицы B нашей билинейной функции в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ имеем:

$$B = C^T A C.$$

Ранг матрицы при умножении ее на невырожденную матрицу не меняется. Поэтому одним из следствий полученной формулы сохранение ранга матрицы билинейной формы при переходе к новому базису: *ранг матрицы билинейной формы не меняется при переходе к новому базису.*

Если квадратичная функция приведена к каноническому или нормальному виду, то ранг матрицы совпадает с числом ненулевых элементов диагонали. Таким образом, это число не зависит от выбора базиса.

Канонический и нормальный вид квадратичной формы.

Говорят, что форма, представляющая функцию f , имеет *канонический вид*, если ее матрица имеет диагональный вид. То есть, форма канонического вида есть многочлен

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

Теорема 2.1. *Для любой квадратичной функции на пространстве L существует базис, в котором она представлена формой канонического вида.*

Доказательство поведем индукцией по размерности n рассматриваемого пространства.

Но сначала заметим, что если функция тождественно равна нулю, то тождественно равна нулю и полярная ей билинейная функция и в любом базисе представляющая ее форма будет иметь канонический вид. Это же относится к любой функции, если размерность рассматриваемого пространства равна единице: $n = 1$.

Пусть утверждение доказано для $n - 1 \geq 1$. Докажем его для n . Как уже было отмечено если рассматриваемая функция f тождественно равна нулю, то утверждение верно. Поэтому

достаточно рассмотреть случай, когда для некоторого вектора u_1 значение $f(u_1)$ отлично от нуля. Рассмотрим линейный функционал $\varphi(v) = a(u_1, v)$, где a — полярная f билинейная функция. Функционал φ является ненулевым: $\varphi(u_1) = f(u_1) \neq 0$. Поэтому уравнение $\varphi(u) = 0$ описывает подпространство L_1 размерности $(n - 1)$. По предположению индукции существует базис $u_2, u_3, \dots, u_n$ подпространства L_1 , в котором матрица функции a имеет диагональный вид. Это означает, что $a(u_i, u_j) = 0$ при $2 \leq i < j \leq n$. Но если $1 = i < j \leq n$, то $a(u_1, u_j) = \varphi(u_j) = 0$, так как вектор u_j принадлежит подпространству L_1 , описываемому уравнением $\varphi(u) = 0$. Вектор u_1 не принадлежит подпространству L_1 и поэтому векторы $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ составляют базис пространства L . В силу сказанного выше $a(u_i, u_j) = 0$ при $1 \leq i < j \leq n$. Это означает, что в этом базисе матрица билинейной функции a и квадратичной функции f имеет диагональный вид. Теорема доказана.

В комплексном случае канонический вид квадратичной формы называется *нормальным*, если в многочлене

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

коэффициенты a_{ii} принимают только значения 1 и 0. Переход от канонического вида к нормальному можно провести заменой $y_i = \sqrt{a_{ii}} \cdot x_i$, если $a_{ii} \neq 0$, и $y_i = x_i$, если $a_{ii} = 0$.

В действительном случае канонический вид квадратичной формы называется *нормальным*, если в многочлене

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

коэффициенты a_{ii} принимают только значения ± 1 и 0. Переход от канонического вида к нормальному можно провести заменой $y_i = \sqrt{|a_{ii}|} \cdot x_i$, если $a_{ii} \neq 0$, и $y_i = x_i$, если $a_{ii} = 0$.

Перестановкой базисных векторов форму нормального вида можно привести к виду:

$$x_1^2 + \dots + x_r^2$$

в комплексном случае и к виду

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

в действительном случае.

§3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (процесс ортогонализации).

Обсуждая в предыдущем параграфе возможность приведения квадратичной формы к каноническому виду мы **доказывали существование** базиса, в котором форма имеет канонический вид, не обсуждая, как указать этот базис, имея описание интересующей нас формы в каком-то исходном базисе.

Мы начнем с замечания, относящегося к полилинейным кососимметрическим функциям. Напомним, что функция $f : L \times L \times \cdots \times L \rightarrow K$, где L — векторное пространство, называется полилинейной кососимметрической функцией, если она линейна по каждому аргументу и $f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma f(u_1, u_2, \dots, u_k)$ для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \dots, k\}$, см. §6.2. Примером такой функции является определитель. Он является полилинейной кососимметрической функцией и от набора своих строк, и от набора своих столбцов.

Лемма 3.1. *Значение полилинейной кососимметрической функции $f(u_1, u_2, \dots, u_k)$ не меняется при элементарном преобразовании системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$.*

Элементарным преобразованием здесь называется замена одного из векторов u_i системы $u_1, u_2, \dots, u_k$ на вектор вида

$$u = u_i - \lambda_1 u_1 - \cdots - \lambda_{i-1} u_{i-1} - \lambda_{i+1} u_{i+1} - \cdots - \lambda_k u_k,$$

при котором наша система векторов $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k$ заменяется на систему векторов $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k$.

Доказательство. Имеем:

$$f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k) =$$

$$\begin{aligned}
& f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + \\
& \quad + \lambda_{i+1} u_{i+1} + \dots + \lambda_k u_k, u_{i+1}, \dots, u_k) = \\
& \quad = f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k) + \\
& \quad + f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \lambda_1 u_1, u_{i+1}, \dots, u_k) + \dots + \\
& \quad + f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \lambda_{i-1} u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k) + \\
& \quad + f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \lambda_{i+1} u_{i+1}, u_{i+1}, \dots, u_k) + \dots + \\
& \quad + f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \lambda_k u_k, u_{i+1}, \dots, u_k) = \\
& \quad = f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k) + \\
& \quad + \lambda_1 f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_1, u_{i+1}, \dots, u_k) + \dots + \\
& \quad + \lambda_{i-1} f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k) + \\
& \quad + \lambda_{i+1} f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_{i+1}, \dots, u_k) + \dots + \\
& \quad + \lambda_k f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_k, u_{i+1}, \dots, u_k).
\end{aligned}$$

В выражении, стоящем в конце цепочки равенств, в списках аргументов функции f , кроме первого слагаемого, есть совпадающие. Поэтому значения функции f на этих наборах аргументов равны нулю и

$$\begin{aligned}
& f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k) = \\
& = f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k) + 0 + \dots + 0 + 0 + \dots + 0 = \\
& = f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависимы, то $f(u_1, u_2, \dots, u_k) = 0$.

В самом деле, один из векторов системы представляется в виде линейной комбинации остальных:

$$u_i = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + \lambda_{i+1} u_{i+1} + \dots + \lambda_k u_k.$$

Совершаем элементарное преобразование, меняя вектор u_i на вектор

$$u = u_i - \lambda_1 u_1 - \cdots - \lambda_{i-1} u_{i-1} - \lambda_{i+1} u_{i+1} - \cdots - \lambda_k u_k = \vec{0}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k) &= \\ = f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \vec{0}, u_{i+1}, \dots, u_k) &= 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство — в силу линейности функции f по i -тому аргументу.

Замечание 3.1. Для дальнейшего полезно отметить, что при элементарном преобразовании линейная оболочка системы векторов не меняется. В самом деле, если в системе векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ мы заменяем вектор u_i на вектор вида

$$u = u_i - \lambda_1 u_1 - \cdots - \lambda_{i-1} u_{i-1} - \lambda_{i+1} u_{i+1} - \cdots - \lambda_k u_k,$$

то есть, от системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k$ переходим к системе векторов $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k$, то из определения вектора u следует, что $L(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k) \subseteq L(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k)$. Но формулу, определяющую вектор u можно обратить:

$$u_i = u + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + \lambda_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \lambda_k u_k,$$

и поэтому $L(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k) \subseteq L(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k)$.

Вместе эти два включения и означают совпадение $L(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k) = L(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_k)$.

Пусть теперь на произведении $L_1 \times L_2$ векторных пространств L_1 и L_2 задана билинейная функция $a(u, v)$.

Для системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1, v_1, v_2, \dots, v_k \in L_2$ положим: $A(u_1, u_2, \dots, u_k; v_1, v_2, \dots, v_k) =$

$$\begin{vmatrix} a(u_1, v_1) & a(u_1, v_2) & \dots & a(u_1, v_k) \\ a(u_2, v_1) & a(u_2, v_2) & \dots & a(u_2, v_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(u_k, v_1) & a(u_k, v_2) & \dots & a(u_k, v_k) \end{vmatrix}$$

Заметим, что

Лемма 3.2. *Значение функции $A(u_1, u_2, \dots, u_k; v_1, v_2, \dots, v_k)$ не меняется при элементарном преобразовании системы векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$.*

Доказательство. При фиксированных векторах $u_1, \dots, u_k \in L_1$ функция $f(v_1, v_2, \dots, v_k) = A(u_1, u_2, \dots, u_k; v_1, v_2, \dots, v_k)$ является полилинейной кососимметрической функцией от аргументов $v_1, v_2, \dots, v_k \in L_2$ и мы получаем требуемое из леммы 3.1. Лемма доказана.

Из леммы 3.2 или из следствия леммы 3.1 вытекает

Следствие. *Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависимы, то $A(u_1, u_2, \dots, u_k; v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$.*

Аналогично лемме 3.2 доказываем

Лемма 3.2'. *Значение функции $A(u_1, u_2, \dots, u_k; v_1, v_2, \dots, v_k)$ не меняется при элементарном преобразовании системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$.*

Из леммы 3.2' или из следствия леммы 3.1 вытекает

Следствие. *Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ линейно зависимы, то $A(u_1, u_2, \dots, u_k; v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$.*

Перейдем к более узкому случаю.

Пусть в линейном пространстве L задана билинейная симметрическая функция $a(u, v)$. Для системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k \in L$ положим:

$G(u_1, u_2, \dots, u_k) =$

$$\begin{vmatrix} a(u_1, u_1) & a(u_1, u_2) & \dots & a(u_1, u_k) \\ a(u_2, u_1) & a(u_2, u_2) & \dots & a(u_2, u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(u_k, u_1) & a(u_k, u_2) & \dots & a(u_k, u_k) \end{vmatrix}$$

(*Определитель Грама системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$*).

Заметим, что

Лемма 3.3. *Определитель $G(u_1, u_2, \dots, u_k)$ не меняется при элементарном преобразовании системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$.*

Доказательство. При элементарном преобразовании, меняющем вектор u_i на вектор

$$u = u_i + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + \lambda_{i+1} u_{i+1} + \dots + \lambda_k u_k,$$

в обозначениях предыдущих рассуждений получаем требуемое из лемм 3.2 и 3.2':

$$\begin{aligned}
& G(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \dots, u_k) = \\
& = A(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \dots, u_k; u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \dots, u_k) = \\
& = A(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \dots, u_k; u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1} \dots, u_k) = \\
& = A(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1} \dots, u_k; u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1} \dots, u_k) = \\
& = G(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1} \dots, u_k).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перейдем к основной теме параграфа.

Приводимое ниже построение носит название *процесс ортогонализации*, когда в качестве билинейной функции $a(u, v)$ берется скалярное произведение (см. ниже §9.7.).

Пусть на векторном пространстве L определена билинейная симметрическая функция $a(u, v)$.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L . Мы построим новый базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ из L , полагая $f_1 = e_1$ и при $i > 1$ заменяя вектор e_i на вектор $f_i = e_i + u_i$, где $u_i \in L(e_1, e_2, \dots, e_{i-1})$, следя за выполнением условия

$$(1) \quad a(f_i, f_j) = 0 \quad \text{при} \quad j < i.$$

Обратим внимание, что построение базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ будет состоять из цепочки элементарных преобразований первоначального базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, а поэтому при каждом $i \leq n$ линейные оболочки систем $e_1, e_2, \dots, e_i$ и $f_1, f_2, \dots, f_i$ будут совпадать: $L(e_1, e_2, \dots, e_i) = L(f_1, f_2, \dots, f_i)$.

Мы покажем, что это возможно в предположении, что угловые миноры $\Delta_1 = a(e_1, e_1)$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a(e_1, e_1) & a(e_1, e_2) \\ a(e_2, e_1) & a(e_2, e_2) \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a(e_1, e_1) & a(e_1, e_2) & a(e_1, e_3) \\ a(e_2, e_1) & a(e_2, e_2) & a(e_2, e_3) \\ a(e_3, e_1) & a(e_3, e_2) & a(e_3, e_3) \end{vmatrix}, \dots$$

матрицы

$$\begin{pmatrix} a(e_1, e_1) & a(e_1, e_2) & \dots & a(e_1, e_n) \\ a(e_2, e_1) & a(e_2, e_2) & \dots & a(e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(e_n, e_1) & a(e_n, e_2) & \dots & a(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

отличны от нуля.

Будем искать векторы $f_1, f_2, \dots, f_k$ в виде

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_2 + p_{21}f_1 \\ \dots \\ f_i = e_i + p_{i1}f_1 + p_{i2}f_2 + \dots + p_{ii-1}f_{i-1} \\ \dots \\ f_k = e_k + p_{k1}f_1 + p_{k2}f_2 + \dots + p_{kk-1}f_{k-1}. \end{cases}$$

Будем “вычислять” векторы $f_2, \dots, f_k$ последовательно, обеспечивая на каждом шаге построения выполнение условия (1). Напомним:

$f_1 = e_1$.

Пусть указаны векторы $f_1, f_2, \dots, f_{i-1}$.

По лемме 3.3

$$\begin{aligned} G(f_1, f_2, \dots, f_{i-2}, f_{i-1}) &= \\ &= G(f_1, f_2, \dots, f_{i-2}, e_{i-1}) = \\ &= G(f_1, f_2, \dots, e_{i-2}, e_{i-1}) = \dots = \\ &= G(f_1, e_2, \dots, e_{i-2}, e_{i-1}) = \\ &= G(e_1, e_2, \dots, e_{i-2}, e_{i-1}) \neq 0. \end{aligned}$$

В силу (1) определитель $G(f_1, f_2, \dots, f_{i-2}, f_{i-1})$ имеет диагональный вид и $G(f_1, f_2, \dots, f_{i-2}, f_{i-1}) =$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a(f_1, f_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a(f_2, f_2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a(f_{i-2}, f_{i-2}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a(f_{i-1}, f_{i-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= a(f_1, f_1) \cdot a(f_2, f_2) \cdot \dots \cdot a(f_{i-2}, f_{i-2}) \cdot a(f_{i-1}, f_{i-1}),$$

а раз

$$G(e_1, e_2, \dots, e_{i-2}, e_{i-1}) \neq 0,$$

то все числа $a(f_1, f_1), a(f_2, f_2), \dots, a(f_{i-2}, f_{i-2}), a(f_{i-1}, f_{i-1})$ отличны от нуля.

Из формулы (2) следует также, что

$$(3) \quad a(f_{i-1}, f_{i-1}) = \frac{G(e_1, e_2, \dots, e_{i-2}, e_{i-1})}{G(e_1, e_2, \dots, e_{i-2})} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-2}}$$

при $i > 2$.

Теперь мы можем указать вектор f_i . Имеем систему

$$\begin{cases} a(f_i, f_1) = a(e_i, f_1) + p_{i1}a(f_1, f_1) + p_{i2}a(f_2, f_1) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-1}, f_1) \\ a(f_i, f_2) = a(e_i, f_2) + p_{i1}a(f_1, f_2) + p_{i2}a(f_2, f_2) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-1}, f_2) \\ \dots \\ a(f_i, f_{i-1}) = a(e_i, f_{i-1}) + p_{i1}a(f_1, f_{i-1}) + p_{i2}a(f_2, f_{i-1}) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-1}, f_{i-1}). \end{cases}$$

для вычисления коэффициентов p_{ij} .

Так как вектор f_i также должен удовлетворять условию (1), то система имеет вид:

$$\begin{cases} a(e_i, f_1) + p_{i1}a(f_1, f_1) + p_{i2}a(f_2, f_1) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-1}, f_1) = 0 \\ a(e_i, f_2) + p_{i1}a(f_1, f_2) + p_{i2}a(f_2, f_2) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-2}, f_2) = 0 \\ \dots \\ a(e_i, f_{i-1}) + p_{i1}a(f_1, f_{i-1}) + p_{i2}a(f_2, f_{i-1}) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-1}, f_{i-1}) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} p_{i1}a(f_1, f_1) + p_{i2}a(f_2, f_1) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-1}, f_1) = -a(e_i, f_1) \\ p_{i1}a(f_1, f_2) + p_{i2}a(f_2, f_2) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-2}, f_2) = -a(e_i, f_2) \\ \dots \\ p_{i1}a(f_1, f_{i-1}) + p_{i2}a(f_2, f_{i-1}) + \dots + p_{ii-1}a(f_{i-1}, f_{i-1}) = -a(e_i, f_{i-1}). \end{cases}$$

Ее определитель

$$G(f_1, f_2, \dots, f_{i-2}, f_{i-1}) = G(e_1, e_2, \dots, e_{i-2}, e_{i-1}) = \Delta_{i-1}$$

отличен от нуля и поэтому система имеет решение.

Итак, мы построили систему векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$. Так как

$$G(f_1, f_2, \dots, f_n) = G(e_1, e_2, \dots, e_n) = \Delta_n \neq 0,$$

то из следствия леммы 3.1 вытекает линейная независимость векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Поэтому векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$ составляют базис пространства L . В силу (1) и (3) матрица билинейной функции $a(u, v)$ в этом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Мы получили требуемое.

§4. Закон инерции.

Будем рассматривать действительное линейное пространство L .

Как было установлено предыдущими рассмотрениями, любую квадратичную функцию можно привести к нормальному виду:

$$f(u) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Число r в этой формуле равно рангу матрицы квадратичной функции и не меняется при переходе к другому базису. Сейчас мы покажем, что число k (*положительный индекс инерции*) квадратичной функции также не меняется при переходе к другому базису (*закон инерции*).

Рассмотрим два базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$ пространства L .

Пусть в первом базисе наша квадратичная функция f представлена формой

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_r^2,$$

а во втором базисе — формой

$$y_1^2 + \dots + y_l^2 - y_{l+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

Нам понадобятся члены взаимных базисов $e^1, e^2, \dots, e^n$ и $f^1, f^2, \dots, f^n$ пространства L^* .

Предположим, что $k > l$.

Рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} f^1(u) = 0 \\ f^2(u) = 0 \\ \dots \\ f^l(u) = 0 \\ e^{k+1}(u) = 0 \\ e^{k+2}(u) = 0 \\ \dots \\ e^r(u) = 0 \\ e^{r+1}(u) = 0 \\ \dots \\ e^n(u) = 0. \end{array} \right.$$

Число уравнений в ней $l + (n - k) = n - (k - l)$ строго меньше n . Поэтому система задает подпространство размерности не меньше $k - l > 0$. Пусть u — ненулевое решение этой системы. Его координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ равны нулю, начиная, по крайней мере, с $(k + 1)$ -ой:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{k+1}(u) = 0 \\ e^{k+2}(u) = 0 \\ \dots \\ e^r(u) = 0 \\ e^{r+1}(u) = 0 \\ \dots \\ e^n(u) = 0. \end{array} \right.$$

Раз вектор u ненулевой, то одно из чисел $x_1, x_2, \dots, x_k$ отлично от нуля и, вспоминая вид формы в этом базисе

$$f(u) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_r^2,$$

получаем: $f(u) > 0$.

Координаты $y_1, y_2, \dots, y_n$ в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ равны нулю, по крайней мере, до l -ой включительно:

$$\begin{cases} f^1(u) = 0 \\ f^2(u) = 0 \\ \dots \\ f^l(u) = 0. \end{cases}$$

То есть, $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_l = 0$ и, вспоминая вид формы в этом базисе

$$f(u) = y_1^2 + \dots + y_l^2 - y_{l+1}^2 - \dots - y_r^2,$$

получаем:

$$f(u) = -y_{l+1}^2 - \dots - y_r^2 \leq 0.$$

Таким образом, одновременно $f(u) > 0$ и $f(u) \leq 0$, что невозможно. Таким образом, сделанное нами допущение, что $k > l$ привело нас к противоречию. Мы доказали, что $k \leq l$. По аналогичным соображениям $l \leq k$. Вместе это означает равенство $k = l$, что и требовалось.

§5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа (выделение полных квадратов).

Индукцией по n докажем, что при помощи невырожденных замен переменных квадратичную форму

$$f(u) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n +$$

$$+a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

можно привести к каноническому виду. При этом невырожденные замены переменных всегда можно понимать, как формулы преобразования координат при переходе к новому базису.

При $n = 1$ форма уже имеет канонический вид и утверждение справедливо.

Пусть утверждение доказано для $n - 1 \geq 1$. Докажем его для n .

I. Прежде всего рассмотрим случай, когда по крайней мере одно из чисел a_{ii} отлично от нуля. Для простоты обозначений положим $a_{11} \neq 0$. В противном случае переставим базисные векторы так, чтобы это условие выполнялось.

Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = x_2 \\ \cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

и отметим, что разность $f(u) - \frac{1}{a_{11}}y_1^2$ есть форма $g(x_2, \dots, x_n)$, не зависящая от x_1 : все члены с x_1 после подстановок сокращаются.

Поэтому

$$f(u) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n).$$

По предположению индукции существует такая замена переменных

$$\begin{cases} y_2 = b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n \\ \cdots \\ y_n = b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nn}z_n, \end{cases}$$

которая приводит форму $g(y_2, \dots, y_n)$ к каноническому виду. Тогда замена переменных

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n \\ \cdots \\ y_n = b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nn}z_n \end{cases}$$

приводит форму

$$f(u) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n)$$

к каноническому виду.

II. Рассмотрим случай, когда все числа a_{ii} равны нулю. Если квадратичная форма нулевая, она уже имеет канонический вид и доказываемое имеет место. В противном случае по крайней мере одно из чисел a_{ij} , $i \neq j$, отлично от нуля. Для простоты обозначений положим $a_{12} \neq 0$. В противном случае переставим базисные векторы так, чтобы это условие выполнялось.

Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = & y_3 \\ \dots \\ x_n = & y_n. \end{cases}$$

После нее в нашей квадратичной форме появятся слагаемые $a_{12}y_1^2 - a_{12}y_2^2$. В соответствии с I наша форма приводится к каноническому виду.

§6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.

Вернем к идее, использованной в §3.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица билинейной симметрической функции a в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L .

Положим: $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a_{11}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Наши дальнейшие рассуждения мы будем проводить в предположении, что все числа $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ отличны от нуля (аналогичное мы предполагали в §3).

Новый базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ будем искать в виде

$$\begin{cases} f_1 = p_{11}e_1 \\ f_2 = p_{21}e_1 + p_{22}e_2 \\ \dots \\ f_n = p_{n1}e_1 + p_{n2}e_2 + \dots + p_{nn}e_n. \end{cases}$$

Коэффициенты p_{ij} в этих представлениях будем искать прежде всего из условия, что $a(f_i, e_j) = 0$. (Как и в §3 построение базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ состоит из цепочки элементарных преобразований первоначального базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, а поэтому при каждом $i \leq n$ линейные оболочки систем $e_1, e_2, \dots, e_i$ и $f_1, f_2, \dots, f_i$ будут совпадать: $L(e_1, e_2, \dots, e_i) = L(f_1, f_2, \dots, f_i)$, поэтому условие $a(f_i, e_j) = 0$ равносильно условию (1) из §3).

Перебирая $j = 1, 2, \dots, i - 1$ получаем систему

$$\begin{cases} a(f_i, e_1) = 0 \\ a(f_i, e_2) = 0 \\ \dots \\ a(f_i, e_{i-1}) = 0 \end{cases}$$

для нахождения коэффициентов $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ii}$. Неизвестных — i , уравнений $(i - 1)$. Добавим еще одно уравнение

$$a(f_i, e_i) = 1.$$

При $i = 1$ мы имеем только одно, добавленное последним, уравнение

$$a(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1) = 1$$

или

$$p_{11}a(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1.$$

Получаем

$$p_{11} = \frac{1}{a(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}.$$

При $i > 1$ мы имеем систему

$$\begin{cases} a_{11}p_{i1} + a_{12}p_{i2} + \cdots + a_{1i}p_{ii} = 0 \\ a_{21}p_{i1} + a_{22}p_{i2} + \cdots + a_{2i}p_{ii} = 0 \\ \dots \\ a_{i-11}p_{i1} + a_{i-12}p_{i2} + \cdots + a_{i-1i}p_{ii} = 0 \\ a_{i1}p_{i1} + a_{i2}p_{i2} + \cdots + a_{ii}p_{ii} = 1. \end{cases}$$

В этой системе нас на самом деле интересует только p_{ii} . Находя его по правилу Крамера, получаем

$$p_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.$$

Теперь заполним матрицу нашей билинейной симметрической функции в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$.

$$\begin{aligned} b_{ii} &= a(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i) = \\ &= p_{i1}a(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_1) + p_{i2}a(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_2) + \cdots + p_{i,i-1}a(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_{i-1}) + p_{ii}a(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_i) = \\ &= p_{i1} \cdot 0 + p_{i2} \cdot 0 + \cdots + p_{i,i-1} \cdot 0 + p_{ii} \cdot 1 = p_{ii}. \end{aligned}$$

При $j < i$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = p_{j1}a(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_1) + p_{j2}a(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_2) + \cdots + p_{ji}a(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_i) = \\ &= p_{i1} \cdot 0 + p_{i2} \cdot 0 + \cdots + p_{ii} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица билинейной симметрической функции a в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}.$$

§7. Положительно определенные квадратичные функции.

Будем рассматривать действительное линейное пространство L .

Для любой квадратичной функции $f(u) = a(u, u)$ имеем $f(\vec{0}) = a(\vec{0}, \vec{0}) = 0$.

Квадратичная функция $f(u)$ называется *положительно определенной*, если $f(u) > 0$ для любого ненулевого вектора u .

Приведем квадратичную функцию $f(u)$ к нормальному виду

$$f(u) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Как легко видеть, если функция $f(u)$ положительно определена, то в нормальном виде нет отрицательных слагаемых и r совпадает с размерностью n рассматриваемого пространства L . То есть, наша форма имеет вид:

$$f(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Определитель ее матрицы равен единице, то есть, положителен.

Как мы видели, при переходе к новому базису матрица квадратичной формы меняется по правилу

$$B = C^T A C.$$

Для определителей имеем:

$$\det B = \det C^T \cdot \det A \cdot \det C = \det C \cdot \det A \cdot \det C = \det A \cdot (\det C)^2.$$

Отсюда следует, что *знак определителя матрицы квадратичной формы не меняется при переходе к новому базису.*

Соответственно, *определитель матрицы положительно определенной квадратичной формы в любом базисе положителен.*

§8. Определитель Грама. Неравенство Коши-Буняковского.

Будем рассматривать действительное векторное n -мерное пространство L .

Пусть квадратичная форма $f(u) = a(u, u)$ положительно определена, векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ принадлежат пространству L . *Определителем Грама* $G(u_1, u_2, \dots, u_k)$ системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ называется определитель

$$G(u_1, u_2, \dots, u_k) = \tilde{G}(u_1, \dots, u_k; u_1, \dots, u_k) =$$

$$= \begin{vmatrix} a(u_1, u_1) & a(u_1, u_2) & \dots & a(u_1, u_k) \\ a(u_2, u_1) & a(u_2, u_2) & \dots & a(u_2, u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(u_k, u_1) & a(u_k, u_2) & \dots & a(u_k, u_k) \end{vmatrix},$$

см. также §3.

По следствию леммы 3.3

Если система векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависима, то $G(u_1, u_2, \dots, u_k) = 0$.

Покажем, что если векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы, то $G(u_1, u_2, \dots, u_k) > 0$.

Для этого рассмотрим линейную оболочку $L_1 = L(u_1, u_2, \dots, u_k)$ векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$. Векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы, поэтому составляют базис пространства L_1 . Ограничение билинейной функции $a(u, v)$ на подпространство L_1 положительно определено, а определитель Грама $G(u_1, u_2, \dots, u_k)$ является определителем матрицы соответствующей квадратичной формы в базисе $u_1, u_2, \dots, u_k$. В предыдущем параграфе мы доказали, что он положителен.

Когда системы векторов состоит из двух членов, доказанное принимает следующий вид (*неравенство Коши-Буняковского*):

$$G(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} a(u_1, u_1) & a(u_1, u_2) \\ a(u_2, u_1) & a(u_2, u_2) \end{vmatrix} \geq 0,$$

Причем $G(u_1, u_2) > 0$, если векторы u_1, u_2 , линейно независимы, и $G(u_1, u_2) = 0$, если векторы u_1, u_2 , линейно зависимы.

Так как

$$G(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} a(u_1, u_1) & a(u_1, u_2) \\ a(u_2, u_1) & a(u_2, u_2) \end{vmatrix} = a(u_1, u_1)a(u_2, u_2) - (a(u_1, u_2))^2,$$

то неравенство Коши-Буняковского может быть записано в виде

$$(a(u_1, u_2))^2 < a(u_1, u_1)a(u_2, u_2)$$

в случае линейно независимых векторов u_1, u_2 , и в виде равенства

$$(a(u_1, u_2))^2 = a(u_1, u_1)a(u_2, u_2)$$

для линейно зависимых векторов u_1 и u_2 .

§9. Критерий Сильвестра.

Будем рассматривать действительное линейное пространство L .

Критерий Сильвестра состоит в следующем: *для положительной определенности квадратичной функции*

$$\begin{aligned} f(u) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

необходимо и достаточно, чтобы миноры

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

нашей квадратичной функции были положительны.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис рассматриваемого пространства L , в котором выписана наша форма. Минор

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

есть определитель Грама системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$. Если наша форма положительно определена, то по доказанному в предыдущем параграфе он положителен.

Обратная импликация: если все главные миноры матрицы формы положительны, то мы находимся в предположениях приведения квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби и наша форма получает вид

$$\frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2.$$

Все коэффициенты здесь положительны и поэтому форма положительно определена.

Если вместо метода Якоби использовать построение, проведенное в §3, мы приведем нашу форму к виду

$$\Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2.$$

Как и в предыдущем случае, все коэффициенты здесь положительны и поэтому форма положительно определена.

§10. Нулевое подпространство и нулевой конус

квадратичной формы.

Продолжая рассуждения §5.6 и учитывая, что сейчас рассматриваемая нами билинейная функция симметрична, получаем совпадение левого N_l и правого N_p нулевых подпространств.

Они задаются системой

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Пространство решений этой системы имеет размерность $n - r$, где n — размерность рассматриваемого пространства L , r — ранг матрицы системы, то есть, ранг матрицы нашей квадратичной формы.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L и его последние векторы $e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n$ — базис нулевого подпространства нашей билинейной функции.

В соответствии с замечаниями §5.6 и с учетом симметричности матрицы, в этом базисе матрица нашей билинейной функции имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где, напоминаем, r — ранг нашей квадратичной функции и в силу этого

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нулевым конусом квадратичной формы

$$f(u) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

называется множеством решений уравнения $f(u) = 0$, то есть,

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n = 0.$$

Если вектор $u = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ принадлежит нулевому подпространству, то как было сказано выше

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение системы на x_1 , второе — на x_2 и т.д. и складывая их с учетом равенств $a_{ij} = a_{ji}$, получаем:

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n)x_1 + \\ + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n)x_2 + \cdots + \\ + (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)x_n = \\ = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n = 0.$$

То есть, всякий вектор, принадлежащий нулевому подпространству, принадлежит и нулевому конусу. То есть, *нулевое подпространство лежит в нулевом конусе*.

Впрочем, это можно пояснить и проще. Вектор u принадлежит нулевому подпространству тогда и только тогда, когда $a(u, v) = 0$ для любого вектора v . Вектор u принадлежит нулевому конусу тогда и только тогда, когда $f(u) = a(u, u) = 0$. Ясно, что из первого следует второе.

На самом деле мы с подобными связями уже встречались в курсе аналитической геометрии при рассмотрении кривых и поверхностей второго порядка: *всякий вектор особого направления является вектором асимптотического направления*.