Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 7.

Жорданова форма матрицы линейного оператора.

§1. Нильпотентные операторы.

Линейный оператор $\varphi : L \rightarrow L$ называется *нильпотентным*, если для некоторого натурального p мы имеем: $\varphi^p \equiv \vec{0}$. Наименьшее из таких p называется *высотой* оператора φ . Равенство нулю высоты оператора равносильно тому, что он тождественно равен нулю.

Серией называется конечная последовательность $u_1, u_2, \dots, u_k$ ненулевых векторов пространства L , для которых $u_2 = \varphi(u_1)$, $u_3 = \varphi(u_2)$, $\dots$, $u_k = \varphi(u_{k-1})$, $\varphi(u_k) = \vec{0}$. При этом вектор u_1 называется *первым* членом серии, u_k — *последним* членом серии, k — *длиной* серии. Серия может состоять из одного элемента. Тогда последний член серии совпадает с первым, а длина серии равна единице.

Ясно, что если есть серия длины k , то оператор φ^{k-1} не является нулевым и поэтому высота оператора строго больше $(k-1)$ и, следовательно, больше или равна k .

С другой стороны, если p — высота оператора, то оператор φ^{p-1} не является нулевым и поэтому найдется такой вектор u_1 , для которого $\varphi^{p-1}(u_1) \neq \vec{0}$. Полагая $u_2 = \varphi(u_1)$, $u_3 = \varphi(u_2) = \varphi^2(u_1)$, $\dots$, $u_p = \varphi(u_{p-1}) = \varphi^{p-1}(u_1)$, получаем серию длиной p ($\varphi(u_k) = \varphi^p(u_1) = \vec{0}$), ибо оператор φ^p является нулевым.

Таким образом, *высота оператора равна наибольшей из длин серий*.

Покажем, что *векторы, составляющие серию, линейно независимы*.
Доказательство поведем индукцией по длине серии.

Если длина серии равна единице, то серия состоит из одного ненулевого вектора. Система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима.

Пусть утверждение доказано для $k - 1 \geq 1$. Докажем его для k . Пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ — серия. Пусть линейная комбинация

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_k u_k$$

равна $\vec{0}$. Подействовав на нее оператором φ , получаем:

$$\lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2) + \dots + \lambda_{k-1} \varphi(u_{k-1}) + \lambda_k \varphi(u_k) = \varphi(\vec{0}),$$

$$\lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_3 + \dots + \lambda_{k-1} u_k = \vec{0}.$$

По предположению индукции векторы $u_2, \dots, u_k$ линейно независимы, поэтому

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$$

и равенство нулю исходной линейной комбинации превращается в равенство $\lambda_k u_k = \vec{0}$. Так как вектор u_k — ненулевой, то $\lambda_k = 0$ и таким образом исходная линейная комбинация является тривиальной. Это означает линейную независимость серии $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Обобщим только что сделанное наблюдение.

Лемма 1.1. *Пусть система векторов распадается в серии. Она линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система последних векторов этих серий.*

Доказательство. Пусть наша система векторов состоит из серий $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k_1}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k_2}, \dots, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik_i}$.

I. Если эта система линейно независима, то линейно независима и ее часть, состоящая из последних векторов $u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i}$.

II. Доказательство обратной импликации поведем индукцией по максимальной длине серий, входящих в систему. Если эта длина равна единице, то вся исходная система совпадает с системой последних векторов этих серий, что и дает требуемое в этом случае.

Пусть утверждение доказано для максимальной длины серий $k - 1 \geq 1$. Докажем его для k . Пусть линейная комбинация

$$\lambda_{11}u_{11} + \lambda_{12}u_{12} + \dots + \lambda_{1k_1}u_{1k_1} + \lambda_{21}u_{21} + \lambda_{22}u_{22} + \\ + \dots + \lambda_{2k_2}u_{2k_2} + \dots + \lambda_{i1}u_{i1} + \lambda_{i2}u_{i2} + \dots + \lambda_{ik_i}u_{ik_i}$$

равна $\vec{0}$. Подействовав на нее оператором φ , получаем:

$$\lambda_{11}\varphi(u_{11}) + \lambda_{12}\varphi(u_{12}) + \dots + \lambda_{1k_1}\varphi(u_{1k_1}) + \lambda_{21}\varphi(u_{21}) + \lambda_{22}\varphi(u_{22}) + \\ + \dots + \lambda_{2k_2}\varphi(u_{2k_2}) + \dots + \lambda_{i1}\varphi(u_{i1}) + \lambda_{i2}\varphi(u_{i2}) + \dots + \lambda_{ik_i}\varphi(u_{ik_i}) = \varphi(\vec{0}), \\ \lambda_{11}u_{12} + \lambda_{12}u_{13} + \dots + \lambda_{1k_1-1}u_{1k_1} + \lambda_{21}u_{22} + \lambda_{22}\varphi(u_{23}) + \\ + \dots + \lambda_{2k_2-1}u_{2k_2} + \dots + \lambda_{i1}u_{i2} + \lambda_{i2}u_{i3} + \dots + \lambda_{ik_i-1}u_{ik_i} = \vec{0}.$$

Каждая серия укоротилась на один член. Поэтому по предположению индукции векторы $u_{12}, \dots, u_{1k_1}, u_{22}, \dots, u_{2k_2}, \dots, u_{i2}, \dots, u_{ik_i}$ линейно независимы. Поэтому

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{1k_1-1} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \\ = \lambda_{2k_2-1} = \dots = \lambda_{i1} = \lambda_{i2} = \dots = \lambda_{ik_i-1} = 0$$

и равенство нулю исходной линейной комбинации превращается в равенство

$$\lambda_{1k_1}u_{1k_1} + \lambda_{2k_2}u_{2k_2} + \dots + \lambda_{ik_i}u_{ik_i} = \vec{0}.$$

Так как система $u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i}$ линейно независима, то

$$\lambda_{1k_1} = \lambda_{2k_2} = \dots = \lambda_{ik_i} = 0$$

и таким образом исходная линейная комбинация является тривиальной. Это означает линейную независимость системы $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k_1}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k_2}, \dots, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik_i}$. Лемма доказана.

§2. Существование канонического базиса нильпотентного оператора.

Каноническим называется базис нильпотентного оператора, распадающийся в серии.

Теорема 2.1. *Каждый нильпотентный оператор обладает каноническим базисом.*

Доказательство поведем индукцией по высоте оператора.

Если высота оператора равна единице, то, как было выше отмечено, он является нулевым и для него каноническим будет любой базис.

Пусть утверждение доказано для операторов высоты $k - 1 \geq 1$. Докажем его для операторов высоты k .

Пусть $\varphi : L \rightarrow L$ — оператор высоты k . Подпространство $L_1 = \varphi(L) = \text{Im } \varphi$ является инвариантным: так как $L_1 \subseteq L$, то $\varphi(L_1) \subseteq \varphi(L) = L_1$.

Высота ограничения φ_1 оператора φ на подпространство L_1 ровно на единицу меньше высоты оператора φ : каждая серия укорачивается на один член. По предположению индукции оператор $\varphi_1 : L_1 \rightarrow L_1$ обладает каноническим базисом A : $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k_1}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k_2}, \dots, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik_i}$.

Векторы $u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i}$ составляют базис пересечения $L_1 \cap \ker \varphi$: если в разложении какого-то вектора u по базису A коэффициент λ при u_{lm} , $m < k_l$, то в разложении его образа по базису A коэффициент при u_{lm+1} будет так же равен λ и, следовательно, будет отличен от нуля. Поэтому, если вектор $u \in L_1$ не принадлежит линейной оболочке $L(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i})$ векторов $u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i}$, то он не принадлежит и ядру оператора φ . С другой стороны, векторы $u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i}$ являясь последними векторами в своих сериях, принадлежат ядру оператора φ . Поэтому пересечение $L_1 \cap \ker \varphi$ совпадает с линейной оболочкой $L(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i})$ векторов $u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i}$, что и дает требуемое.

Дополним линейно независимую систему векторов $u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{ik_i}$ до базиса в $\ker \varphi$, добавив векторы $v_1, v_2, \dots, v_l$.

Первые члены $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{i1}$ наших серий принадлежат образу оператора φ , то есть, каждый из них является образом какого-то вектора из L . Пусть $u_{11} = \varphi(u_{10}), u_{21} = \varphi(u_{20}), \dots, u_{i1} = \varphi(u_{i0})$.

Мы имеем семейство серий: $v_1, v_2, \dots, v_l, u_{10}, u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k_1}, u_{20}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k_2}, \dots, u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik_i}$.

По лемме 1.1 векторы этого семейства линейно независимы. Доказательство теоремы будет завершено, если мы покажем, что любой вектор пространства L представим в виде их линейной комбинации.

Возьмем любой вектор w пространства L . Его образ $\varphi(w)$ принадлежит L_1 и потому разлагается по базису A :

$$\begin{aligned} \varphi(w) = & \lambda_{11}u_{11} + \lambda_{12}u_{12} + \dots + \lambda_{1k_1}u_{1k_1} + \lambda_{21}u_{21} + \lambda_{22}u_{22} + \\ & + \dots + \lambda_{2k_2}u_{2k_2} + \dots + \lambda_{i1}u_{i1} + \lambda_{i2}u_{i2} + \dots + \lambda_{ik_i}u_{ik_i} \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор

$$\begin{aligned} w_1 = & \lambda_{11}u_{10} + \lambda_{12}u_{11} + \dots + \lambda_{1k_1}u_{1k_1-1} + \lambda_{21}u_{20} + \lambda_{22}u_{21} + \\ & + \dots + \lambda_{2k_2}u_{2k_2-1} + \dots + \lambda_{i1}u_{i0} + \lambda_{i2}u_{i1} + \dots + \lambda_{ik_i}u_{ik_i-1}. \end{aligned}$$

Как легко видеть, $\varphi(w) = \varphi(w_1)$. Поэтому $\varphi(w - w_1) = \vec{0}$ и вектор $w_2 = w - w_1$ принадлежит ядру $\ker \varphi$ оператора φ .

Имеем: $w = w_1 + w_2$ и векторы w_1 и w_2 представимы в виде линейных комбинаций векторов $v_1, v_2, \dots, v_l, u_{10}, u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k_1}, u_{20}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k_2}, \dots, u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik_i}$. Поэтому и вектор w представим в виде линейной комбинации этих векторов. Теорема доказана.

§3. Инварианты канонического базиса нильпотентного оператора.

Канонический базис nilьпотентного оператора не определен однозначно. В этом можно убедиться уже на примере nilьпотентного оператора высоты 1: для него любой базис является каноническим.

Постараемся найти характеристики канонического базиса, которые не зависят от того, какой конкретно базис рассматривается.

Пусть m_i — число серий в каноническом базисе, длина которых равна i , p — высота оператора.

Тогда, как мы видели, базис ядра оператора φ составляют последние члены серий. Их столько, сколько серий вообще. То есть,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = \dim \ker \varphi.$$

Повторяя это рассуждение уже для ядра оператора φ^2 , получаем, что базис ядра оператора φ^2 составляют предпоследние члены серий. Их столько, сколько серий длины ≥ 2 . То есть,

$$m_2 + \dots + m_p = \dim \ker \varphi^2.$$

Повторяя это рассуждение для ядра оператора φ^l , получаем, что базис ядра оператора φ^l составляют члены серий, имеющие при счете с конца номер l . Их столько, сколько серий длины $\geq l$. То есть,

$$m_l + \dots + m_p = \dim \ker \varphi^l.$$

Для $l = p$ имеем: $m_p = \dim \ker \varphi^p$. Для $l < p$ имеем: $m_l = \dim \ker \varphi^l - \dim \ker \varphi^{l+1}$. Так как размерности ядер $\dim \ker \varphi^l$ не зависят от выбора базиса, то и числа m_l не зависят от выбора базиса.

§4. Матрица нильпотентного оператора в каноническом базисе.

Начнем со случая, когда базис состоит из одной серии.

Пусть $u_1, u_2 = \varphi(u_1), u_3 = \varphi(u_2), \dots, u_k = \varphi(u_{k-1})$ с $\varphi(u_k) = \vec{0}$ — серия, составляющая базис. В связи со связями, которые мы будем обсуждать позже, нам удобно расположить базисные векторы в обратном порядке: $v_1 = u_k, v_2 = u_{k-1}, v_3 = u_{k-2}, \dots, v_k = u_1$. Как легко видеть, в этом базисе матрица оператора имеет вид:

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае, когда базис состоит из нескольких серий, в соответствии с ранее сделанными замечаниями каждой серии A_i базисных векторов соответствует инвариантное подпространство $L_i = L(A_i)$, $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$. Наш базис есть объединение этих серий: $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$. В соответствии с этим матрица рассматриваемого оператора в базисе A устроена следующим образом: вдоль диагонали стоят последовательно матрицы $J_i(0)$, а на всех остальных позициях стоят нули. Верно и обратное: если матрица оператора имеет указанный вид, то наш оператор нильпотентен, а соответствующие базисные векторы выстраиваются в серии.

§5. Представление вырожденного оператора в виде прямой суммы нильпотентного и невырожденного.

Для оператора $\varphi : L \rightarrow L$ рассмотрим последовательность подпространств $L \supseteq \text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \varphi^2 \supseteq \dots \text{Im } \varphi^i \supseteq \dots$

Если $\text{Im } \varphi^i \neq \text{Im } \varphi^{i+1}$, то размерность $\text{Im } \varphi^{i+1}$ по крайней мере на единицу меньше размерности $\text{Im } \varphi^i$. Так как размерность пространства L конечна, то обязательно при некотором i $\text{Im } \varphi^i = \text{Im } \varphi^{i+1}$.

Тогда $\text{Im } \varphi^i = \text{Im } \varphi^{i+1}$ и ограничение оператора φ на подпространство $L_i = \text{Im } \varphi^i$ изоморфно отображает L_i на себя. Но тогда

$$L_i = \varphi(L_i) = \text{Im } \varphi^{i+1} = \varphi^2(L_i) = \text{Im } \varphi^{i+2} = \varphi^3(L_i) = \text{Im } \varphi^{i+3} = \dots$$

Пусть $M_i = \ker \varphi^i$.

Если $u \in L_i \cap M_i$, то в силу того, что $u \in M_i$ имеем: $\varphi^i(u) = \vec{0}$. В силу того, что ограничение оператора φ^i на L_i является изоморфизмом из равенства $\varphi^i(u) = \vec{0}$ следует, что $u = \vec{0}$. Поэтому сумма $L_i + M_i$ является прямой. Так как сумма размерностей ядра и образа оператора φ^i равна размерности пространства L , то $L = L_i \oplus M_i$. Ограничение оператора φ на L_i невырождено по выбору i . Ограничение оператора φ на M_i является нильпотентным оператором высоты i .

Правда, в этом построении возможно, что $L_i = \{\vec{0}\}$. Это имеет место тогда и только тогда, когда оператор φ нильпотентен.

Возможно также, что $L = \text{Im } \varphi$. Это имеет место тогда и только тогда, когда оператор φ невырожден.

Во всех остальных случаях мы имеем представление оператора φ в виде прямой суммы нильпотентного и невырожденного (мы допускаем “вольность речи” — надо было бы сказать, что пространство L представлено в виде прямой суммы двух своих подпространств, ограничение на одно из которых оператора φ нильпотентно, а на другое — невырожденно).

§6. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.

Характеристический многочлен клетки

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

имеет вид:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^k.$$

В общем случае матрица нильпотентного оператора состоит из таких клеток, выстроенных вдоль диагонали. На остальных местах стоят нули. Соответственно, характеристический многочлен оказывается произведением многочленов указанного вида и, следовательно, имеет вид $\chi(\lambda) = (-\lambda)^n$.

Покажем, что верно и обратное: *если характеристический многочлен оператора имеет вид $\chi(\lambda) = (-\lambda)^n$, то он является нильпотентным.*

Рассмотрим разложение нашего оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного. То есть, пусть $L = L_1 \oplus L_2$ и наш оператор нильпотентен на L_1 и невырожден на L_2 . Тогда характеристический многочлен нашего оператора разлагается в произведение $\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) \cdot \chi_2(\lambda)$, где $\chi_1(\lambda)$ есть характеристический многочлен ограничения нашего оператора на L_1 , $\chi_2(\lambda)$ — характеристический многочлен ограничения φ_2 нашего оператора на L_2 . Если наш оператор не является нильпотентным, то размерность L_2 не меньше единицы. Соответственно, степень многочлена $\chi_2(\lambda)$ не меньше единицы. Так как оператор φ_2 невырожден, то число ноль не является его собственным значением, то есть, не является корнем многочлена $\chi_2(\lambda)$. Поэтому кратность корня ноль $\chi(\lambda)$ строго меньше n и многочлен не может иметь вид $\chi(\lambda) = (-\lambda)^k$.

§7. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

Жордановой клеткой называется матрица

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi : L \rightarrow L$ — линейный оператор. *Жордановой формой* матрицы линейного оператора $\varphi : L \rightarrow L$ называется его матрица (в некотором соответствующем базисе), в которой вдоль диагонали стоят жордановы клетки $J_k(\lambda_i)$, а на остальных местах стоят нули. Ясно, что тогда характеристический многочлен χ оператора φ имеет вид:

$$\chi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_l - \lambda)^{m_l},$$

а числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ являются корнями характеристического многочлена χ .

Теорема 7.1. Пусть сумма кратностей корней характеристического многочлена χ рассматриваемого оператора $\varphi : L \rightarrow L$ равна размерности n пространства L . Тогда оператор φ обладает матрицей жордановой формы.

В комплексном случае условие “сумма кратностей корней характеристического многочлена равна размерности пространства L ” выполняется автоматически. В действительном случае оно означает, что все корни характеристического многочлена действительны.

Доказательство начнем со следующего замечания.

I. Если матрица оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$ имеет вид клетки

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то матрица оператора φ имеет вид клетки

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Поэтому если оператор $\varphi - \lambda\varepsilon$ нильпотентен, то оператор φ обладает матрицей жордановой формы с клетками $J_k(\lambda)$ (в том же базисе).

II. В общем случае доказательство поведем индукцией по размерности n пространства L .

При $n = 1$ любая матрица имеет жорданову форму и доказываемое очевидно.

Пусть утверждение доказано для всех размерностей от 1 до $n - 1$. Докажем его для n .

Возьмем любой корень λ_i характеристического многочлена. Оператор $\varphi - \lambda_i\varepsilon$ является вырожденным. Пространство L представляется

в виде суммы двух инвариантных подпространств L_1 и L_2 , причем оператор φ нильпотентен на L_1 и невырожден на L_2 . Размерность L_1 положительна (то есть, ≥ 1).

Если размерность L_1 равна n , то мы имеем требуемое из I.

Если размерность L_1 строго меньше n , то размерность L_2 положительна, но меньше n .

По предположению индукции в L_1 и L_2 мы можем выбрать базисы, в которых матрицы ограничений оператора φ имеют жорданову форму. Объединяя эти базисы в базис пространства L мы получаем матрицу жордановой формы для оператора $\varphi : L \rightarrow L$.

§8. Единственность жордановой формы.

Уже на примере нильпотентного оператора мы видели, что базис, в котором матрица оператора имеет жорданову форму, определен не однозначно. Сейчас мы покажем, что сама форма все же определена однозначно в том смысле, если в двух базисах матрицы оператора имеют жорданову форму, то наборы жордановых клеток $J_k(\lambda)$ в этих матрицах совпадают.

В случае нильпотентного оператора вопрос практически исчерпан в §3: число клеток $J_k(0)$ равно числу серий длины k в каноническом базисе, а эти числа, как было показано в §3, определены однозначно.

Перейдем к общему случаю. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ — корни характеристического многочлена χ рассматриваемого оператора φ и сумма их кратностей равна размерности пространства L . Рассмотрим базис A , в котором матрица оператора имеет жорданову форму и пусть A_i — множество векторов базиса, относящихся к клеткам вида $J_k(\lambda_i)$.

При любом $i = 1, 2, \dots, l$ пространство L распадается в прямую сумму $L = L(\lambda_i) \oplus M_i$ инвариантных подпространств, где оператор $\varphi - \lambda_i \varepsilon$ нильпотентен на $L(\lambda_i)$ и невырожден на M_i . Подпространство $L(\lambda_i)$ называется *корневым подпространством оператора φ* , соответствующим собственному значению λ_i .

При переходе от оператора φ к оператору $\varphi - \lambda_i \varepsilon$ из чисел, стоящих на диагонали матрицы оператора φ , вычитается число

λ_i . Других изменений в матрице не происходит. Соответственно, жордановы клетки вида $J_k(\lambda_i)$ переходят в клетки $J_k(0)$ с нулями на диагонали, а жордановы клетки вида $J_k(\lambda_j)$ с $j \neq i$ переходят в клетки $J_k(\lambda_j - \lambda_i)$ с ненулевыми элементами на диагонали. Соответственно, A_i есть базис $L(\lambda_i)$, а $A \setminus A_i$ есть базис M_i . Так как по предыдущему замечанию жорданова форма нильпотентного оператора определена однозначно, то ввиду указанной связи набор клеток жордановой формы оператора φ вида $J_k(\lambda_i)$ определен однозначно. Так как в этом рассуждении число $i = 1, 2, \dots, l$ взято произвольно, то заключение справедливо для всех собственных значений и, следовательно, *набор клеток жордановой формы оператора φ определен однозначно.*

Базис A пространства L распадается в объединение базисов A_i подпространств $L(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$, поэтому

$$L = L(\lambda_1) \oplus L(\lambda_2) \oplus \dots \oplus L(\lambda_l)$$

пространство L является прямой суммой корневых подпространств.