версия 23.03.2019

Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 5.

Тензоры билинейных функций и линейных отображений.

§1. Тензорное произведение двух линейных пространств.

Пусть L_1 и L_2 — линейные пространства над полем K .

Простым тензором назовем символ вида $u \otimes v$, где $u \in L_1$, $v \in L_2$.

Простые тензоры $(\lambda u) \otimes v$ и $u \otimes (\lambda v)$, где $u \in L_1$, $v \in L_2$, $\lambda \in K$, будем считать равными.

В связи с этим произведение $\lambda \cdot (u \otimes v)$ простого тензора $u \otimes v$ на число $\lambda \in K$ определяется как простой тензор $(\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v)$: $\lambda \cdot (u \otimes v) = (\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v)$.

Из этого отождествления простых тензоров вытекает, что для любых $u \in L_1$, $v \in L_2$

$$\vec{0} \otimes v = (0 \cdot \vec{0}) \otimes v = \vec{0} \otimes (0 \cdot v) = \vec{0} \otimes \vec{0}$$

и

$$u \otimes \vec{0} = u \otimes (0 \cdot \vec{0}) = (0 \cdot u) \otimes \vec{0} = \vec{0} \otimes \vec{0}.$$

Тензорное произведение $L_1 \otimes L_2$ линейных пространств L_1 и L_2 состоит из формальных сумм t простых тензоров $u \otimes v$, где $u \in L_1$, $v \in L_2$:

$$t = u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \cdots + u_k \otimes v_k.$$

При этом две такие суммы считаются равными, если одна из них получается из другой

- 1) перестановкой слагаемых,
- 2) заменой слагаемого $(u_1 + u_2) \otimes v$ на сумму $u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$ или заменой суммы $u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$ на слагаемое $(u_1 + u_2) \otimes v$,
- 3) заменой слагаемого $u \otimes (v_1 + v_2)$ на сумму $u \otimes v_1 + u \otimes v_2$, заменой суммы $u \otimes v_1 + u \otimes v_2$, на слагаемое $u \otimes (v_1 + v_2)$,
- 4) композицией шагов 1), 2), 3).

В этом множестве определены операции сложения (одна формальная сумма приписывается к другой через знак $+$) и умножения на числа из K (каждое слагаемое, являющееся простым тензором, умножается на это число по указанному выше правилу).

Как легко видеть, тензорное произведение $L_1 \otimes L_2$ с указанными операциями является линейным пространством. Роль нуля играет простой тензор $\vec{0} \otimes \vec{0}$ и $t + (-1)t = \vec{0} \otimes \vec{0}$ для любой такой суммы t .

Элементы тензорного произведения называются *тензорами*.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ — базис пространства L_1 , $f_1, f_2, \dots, f_n$ — базис пространства L_2

Любой вектор u из L_1 разлагается по базису $e_1, e_2, \dots, e_m$:

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^m e_m.$$

Любой вектор v из L_2 разлагается по базису $f_1, f_2, \dots, f_n$

$$v = y^1 f_1 + y^2 f_2 + \dots + y^n f_n.$$

Разлагая простой тензор в соответствии с 1) – 4) получаем:

$$\begin{aligned} u \otimes v = & x^1 y^1 e_1 \otimes f_1 + x^1 y^2 e_1 \otimes f_2 + \dots + x^1 y^n e_1 \otimes f_n + \\ & + x^2 y^1 e_2 \otimes f_1 + x^2 y^2 e_2 \otimes f_2 + \dots + x^2 y^n e_2 \otimes f_n + \dots + \\ & + x^m y^1 e_m \otimes f_1 + x^m y^2 e_m \otimes f_2 + \dots + x^m y^n e_m \otimes f_n. \end{aligned}$$

Таким образом любой простой тензор $u \otimes v$ принадлежит линейной оболочке $L(e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_n, \dots, e_m \otimes f_1, e_m \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_n)$ простых тензоров $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_n, \dots, e_m \otimes f_1, e_m \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_n$. Но так как любой тензор есть линейная комбинация простых, то

$$L_1 \otimes L_2 = L(e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_n, \dots, e_m \otimes f_1, e_m \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_n).$$

§2. Пространство билинейных функций как тензорное произведение сопряженных пространств.

Пусть L_1 и L_2 — линейные пространства над полем K , L_1^* и L_2^* — сопряженные им пространства, B — пространство билинейных функций $L_1 \times L_2 \rightarrow K$.

Произведение $f \times g : L_1 \times L_2 \rightarrow K$ функционалов $f \in L_1^*$ и $g \in L_2^*$ определим по формуле $f \times g(u, v) = f(u)g(v)$. Произведение $f \times g$ является билинейной функцией, то есть, принадлежит пространству B .

Обычно, когда говорят о произведении двух функций, говорят о функциях с общей областью определения и область определения произведения совпадает с общей областью определения функций-сомножителей. Здесь каждый сомножитель сохраняет свою область определения. В частности, из-за этого это произведение некоммукативно.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ — базис пространства L_1 , $f_1, f_2, \dots, f_n$ — базис пространства L_2 , $e^1, e^2, \dots, e^m$, $f^1, f^2, \dots, f^n$ — взаимные базисы пространств L_1^* и L_2^* , соответственно.

Лемма 2.1. *Билинейные функции $e^i \times f^j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ составляют базис пространства B .*

Доказательство. I. Пусть $a(u, v)$ билинейная функция из B .

Пусть

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^m e_m.$$

— вектор из L_1 ,

$$v = y^1 f_1 + y^2 f_2 + \dots + y^n f_n.$$

— вектор из L_2 . Тогда

$$\begin{aligned} a(u, v) &= x^1 y^1 a(e_1, f_1) + x^1 y^2 a(e_1, f_2) + \dots + x^1 y^n a(e_1, f_n) + \\ &+ x^2 y^1 a(e_2, f_1) + x^2 y^2 a(e_2, f_2) + \dots + x^2 y^n a(e_2, f_n) + \dots + \end{aligned}$$

$$+x^m y^1 a(e_m, f_1) + x^m y^2 a(e_m, f_2) + \dots + x^m y^n a(e_m, f_n).$$

Но для $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ и конкретной билинейной функции $a(u, v)$ символ $a(e_i, f_j)$ обозначает конкретное число, обозначим его a_{ij} , а x^i и y^j мы можем записать как $x^i = e^i(u)$, $y^j = f^j(v)$. Поэтому наше представление $a(u, v)$ может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a_{11}e^1(u)f^1(v) + a_{12}e^1(u)f^2(v) + \dots + a_{1n}e^1(u)f^n(v) + \\ &+ a_{21}e^2(u)f^1(v) + a_{22}e^2(u)f^2(v) + \dots + a_{2n}e^2(u)f^n(v) + \dots + \\ &+ a_{m1}e^m(u)f^1(v) + a_{m2}e^m(u)f^2(v) + \dots + a_{mn}e^m(u)f^n(v) = \\ &= a_{11}e^1 \times f^1(u, v) + a_{12}e^1 \times f^2(u, v) + \dots + a_{1n}e^1 \times f^n(u, v) + \\ &+ a_{21}e^2 \times f^1(u, v) + a_{22}e^2 \times f^2(u, v) + \dots + a_{2n}e^2 \times f^n(u, v) + \dots + \\ &+ a_{m1}e^m \times f^1(u, v) + a_{m2}e^m \times f^2(u, v) + \dots + a_{mn}e^m \times f^n(u, v). \end{aligned}$$

Равенство

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a_{11}e^1 \times f^1(u, v) + a_{12}e^1 \times f^2(u, v) + \dots + a_{1n}e^1 \times f^n(u, v) + \\ &+ a_{21}e^2 \times f^1(u, v) + a_{22}e^2 \times f^2(u, v) + \dots + a_{2n}e^2 \times f^n(u, v) + \dots + \\ &+ a_{m1}e^m \times f^1(u, v) + a_{m2}e^m \times f^2(u, v) + \dots + a_{mn}e^m \times f^n(u, v) \end{aligned}$$

справедливо для любой пары аргументов $u \in L_1$ и $v \in L_2$. Поэтому оно справедливо для фигурирующих в нем функций как для элементов пространства B . То есть,

$$\begin{aligned} a &= a_{11}e^1 \times f^1 + a_{12}e^1 \times f^2 + \dots + a_{1n}e^1 \times f^n + \\ &+ a_{21}e^2 \times f^1 + a_{22}e^2 \times f^2 + \dots + a_{2n}e^2 \times f^n + \dots + \\ &+ a_{m1}e^m \times f^1 + a_{m2}e^m \times f^2 + \dots + a_{mn}e^m \times f^n \end{aligned}$$

в пространстве B .

Мы показали, что любой элемент пространства B представим в виде линейной комбинации произведений $e^i \times f^j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

II. Покажем, что произведения $e^i \times f^j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ линейно независимы в пространстве B . То есть, если линейная комбинация

$$\begin{aligned} a &= a_{11}e^1 \times f^1 + a_{12}e^1 \times f^2 + \dots + a_{1n}e^1 \times f^n + \\ &+ a_{21}e^2 \times f^1 + a_{22}e^2 \times f^2 + \dots + a_{2n}e^2 \times f^n + \dots + \\ &+ a_{m1}e^m \times f^1 + a_{m2}e^m \times f^2 + \dots + a_{mn}e^m \times f^n \end{aligned}$$

равна нулю в пространстве B , то $a_{ij} = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$.

Имеем $a(u, v) = 0$ для любых $u \in L_1$ и $v \in L_2$.

При $i_0 \neq i$ или $j_0 \neq j$

$$e^{i_0} \times f^{j_0}(e_i, f_j) = e^{i_0}(e_i)f^{j_0}(f_j) = 0.$$

С другой стороны,

$$e^i \times f^j(e_i, f_j) = e^i(e_i)f^j(f_j) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Поэтому

$$a(e_i, f_j) = a_{ij}$$

и $a_{ij} = 0$. Таким образом, наша линейная комбинация оказалась тривиальной. Лемма доказана.

Введенное нами выше произведение $f \times g$ линейных функционалов $f \in L_1^*$ и $g \in L_2^*$ обладает следующим свойством:

для любого числа $\lambda \in K$ $\lambda f \times g = f \times \lambda g$, поэтому соответствие $f \otimes g \rightarrow f \times g$ корректно определяет отображение множества простых тензоров тензорного произведения $L_1^* \otimes L_2^*$ в пространство B .

Мы докажем, что определенное таким образом соответствие корректно продолжается по линейности до линейного отображения $L_1^* \otimes L_2^* \rightarrow B$, если покажем, что образ элемента из $L_1^* \otimes L_2^*$ не меняется при преобразованиях 1) – 4) из §1.

Он не меняется при перестановки слагаемых, потому, что сложение в B коммутативно.

Сравним образы $(f_1 + f_2) \otimes g$ и $f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$. Для $u \in L_1$ и $v \in L_2$ имеем:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2) \times g(u, v) &= (f_1 + f_2)(u)g(v) = (f_1(u) + f_2(u))g(v) = \\ &= f_1(u)g(v) + f_2(u)g(v) = f_1 \times g(u, v) + f_2 \times g(u, v). \end{aligned}$$

То есть,

$$(f_1 + f_2) \times g = f_1 \times g + f_2 \times g.$$

Аналогично показывается, что $f \times (g_1 + g_2) = f \times g_1 + f \times g_2$.

Этим мы показали корректность нашего определения линейного отображения $L_1^* \otimes L_2^* \rightarrow B$.

Любой элемент t из $L_1^* \otimes L_2^*$ представим в виде линейной комбинации

$$\begin{aligned} t &= a_{11}e^1 \otimes f^1 + a_{12}e^1 \otimes f^2 + \dots + a_{1n}e^1 \otimes f^n + \\ &+ a_{21}e^2 \otimes f^1 + a_{22}e^2 \otimes f^2 + \dots + a_{2n}e^2 \otimes f^n + \dots + \\ &+ a_{m1}e^m \otimes f^1 + a_{m2}e^m \otimes f^2 + \dots + a_{mn}e^m \otimes f^n. \end{aligned}$$

При определенном нами линейном отображении он переходит в билинейную функцию

$$\begin{aligned} a &= a_{11}e^1 \times f^1 + a_{12}e^1 \times f^2 + \dots + a_{1n}e^1 \times f^n + \\ &+ a_{21}e^2 \times f^1 + a_{22}e^2 \times f^2 + \dots + a_{2n}e^2 \times f^n + \dots + \\ &+ a_{m1}e^m \times f^1 + a_{m2}e^m \times f^2 + \dots + a_{mn}e^m \times f^n. \end{aligned}$$

В силу того, что функции $e^i \times f^j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ составляют базис пространства B и поэтому представление любого элемента B в виде их линейной комбинации единственно, наше отображение является изоморфизмом, а простые тензоры $e^i \otimes f^j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ составляют базис тензорного произведения $L_1^* \otimes L_2^*$.

Но определение тензорного произведения было дано независимо от того, что мы рассматривали пространства L_1^* и L_2^* , а не L_1 и L_2 . Все чисто алгебраические свойства тензорного произведения

не зависят, от того, что мы обсуждали линейные функционалы и билинейные функции. Поэтому *простые тензоры* $e_i \otimes f_j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ составляют базис тензорного произведения $L_1 \otimes L_2$.

§3. Свертка.

$L_1 \otimes L_2$ и $L_1^* \otimes L_2^*$ как сопряженные пространства.

Сохраним обозначения предыдущего параграфа.

Так как для билинейной функции $a \in B$, векторов $u \in L_1$, $v \in L_2$ и числа $\lambda \in K$ имеет место равенство $a(\lambda u, v) = a(u, \lambda v)$, то на множестве простых тензоров корректно определена функция $\xi_a(u \otimes v) = a(u, v)$. Причем

$$\xi_a((u_1+u_2) \otimes v) = a(u_1+u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v) = \xi_a(u_1 \otimes v) + \xi_a(u_2 \otimes v)$$

и

$$\xi_a(u \otimes (v_1+v_2)) = a(u, v_1+v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2) = \xi_a(u \otimes v_1) + \xi_a(u \otimes v_2)$$

Поэтому, если мы продолжим по линейности функцию ξ_a на формальные суммы простых тензоров, то окажется, что элементарные преобразования 1)–4) из §1 таких сумм не меняют значение продолженной функции ξ_a и, тем самым, она оказывается корректно определенной на тензорном произведении $L_1 \otimes L_2$.

По своему определению как линейного продолжения продолженная функция ξ_a оказывается линейной.

Сопоставляя элементу t тензорного произведения $L_1^* \otimes L_2^*$, билинейную функцию $a \in B$, а ей — линейную функцию $\xi_a : L_1 \otimes L_2 \rightarrow K$, мы задаем отображение $\Xi : L_1^* \otimes L_2^* \rightarrow (L_1 \otimes L_2)^*$, $\Xi(t) = \xi_a$.

Докажем линейность отображения Ξ .

Для начала отметим, что

$$\xi_{(a+b)}(u \otimes v) = (a+b)(u \otimes v) = a(u, v) + b(u, v) = \xi_a(u \otimes v) + \xi_b(u \otimes v)$$

и

$$\xi_{(\lambda a)}(u \otimes v) = (\lambda a)(u, v) = \lambda a(u, v) = \lambda \xi_a(u \otimes v)$$

и при замене в этих равенствах аргумента $u \otimes v$ на сумму $t = u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \dots + u_k \otimes v_k$ мы получаем:

$$\begin{aligned} & \xi_{(a+b)}(u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \dots + u_k \otimes v_k) = \\ & = \xi_{(a+b)}(u_1 \otimes v_1) + \xi_{(a+b)}(u_2 \otimes v_2) + \dots + \xi_{(a+b)}(u_k \otimes v_k) = \\ & = \xi_a(u_1 \otimes v_1) + \xi_a(u_2 \otimes v_2) + \dots + \xi_a(u_k \otimes v_k) + \xi_b(u_1 \otimes v_1) + \xi_b(u_2 \otimes v_2) + \dots + \xi_b(u_k \otimes v_k) = \\ & = \xi_a(u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \dots + u_k \otimes v_k) + \xi_b(u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \dots + u_k \otimes v_k) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \xi_{(\lambda a)}(u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \dots + u_k \otimes v_k) = \\ & = \xi_{(\lambda a)}(u_1 \otimes v_1) + \xi_{(\lambda a)}(u_2 \otimes v_2) + \dots + \xi_{(\lambda a)}(u_k \otimes v_k) = \\ & = \lambda \xi_a(u_1 \otimes v_1) + \lambda \xi_a(u_2 \otimes v_2) + \dots + \lambda \xi_a(u_k \otimes v_k) = \\ & = \lambda \xi_a(u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 + \dots + u_k \otimes v_k). \end{aligned}$$

То есть,

$$\xi_{(a+b)} = \xi_a + \xi_b$$

и

$$\xi_{(\lambda a)} = \lambda \xi_a.$$

Мы доказали линейность отображения Ξ .

Простые тензоры $e^i \otimes f^j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ составляют базис тензорного произведения $L_1^* \otimes L_2^*$.

Под действием отображения Ξ тензор $e^{i_0} \otimes f^{j_0}$ переходит в линейный функционал, значение которого на базисном тензоре $e_i \otimes f_j$ произведения $L_1 \otimes L_2$ равно единице тогда и только тогда, когда $i = i_0$ и $j = j_0$ и нулю во всех остальных случаях:

$$e^{i_0} \otimes f^{j_0}(e_i, f_j) = e^{i_0}(e_i) f^{j_0}(f_j).$$

То есть, отображение Ξ переводит базис пространства $L_1^* \otimes L_2^*$ в базис пространства $(L_1 \otimes L_2)^*$ и, следовательно, линейное отображение Ξ является изоморфизмом.

Таким образом, линейное отображение Ξ устанавливает взаимно однозначное соответствие между билинейными функциями на $L_1 \times$

L_2 и линейными функциями на $(L_1 \otimes L_2)$. Связанные этим соответствием функции характеризуются тем, что они совпадают на простых тензорах.

Свертка пары сопряженных пространств.

Пусть линейные пространства L_1 и L_2 над полем K сопряжены, $a(u, v)$ — их свертка.

Базис тензорного произведения $L_1 \otimes L_2$ составляют простые тензоры $e_i \otimes e^j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Для них $a(e_i, e^j) = 1$, если $i = j$, и $a(e_i, e^j) = 0$, если $i \neq j$.

При соответствии Ξ свертка a переходит в линейное отображение $A : L_1 \otimes L_2 \rightarrow K$, для которого $A(e_i \otimes e^j) = 1$, если $i = j$, и $A(e_i \otimes e^j) = 0$, если $i \neq j$.

Именно применительно к отображению A чаще всего применяется название “свертка”.

Рассмотрим любой элемент

$$\begin{aligned} t = & a_{11}e_1 \times e^1 + a_{12}e_1 \times e^2 + \dots + a_{1n}e_1 \times e^n + \\ & + a_{21}e_2 \times e^1 + a_{22}e_2 \times e^2 + \dots + a_{2n}e_2 \times e^n + \dots + \\ & + a_{n1}e_n \times e^1 + a_{n2}e_n \times e^2 + \dots + a_{nn}e_n \times e^n \end{aligned}$$

тензорного произведения $L_1 \otimes L_2$. Для него

$$\begin{aligned} A(t) = & a_{11}A(e_1 \times e^1) + a_{12}A(e_1 \times e^2) + \dots + a_{1n}A(e_1 \times e^n) + \\ & + a_{21}A(e_2 \times e^1) + a_{22}A(e_2 \times e^2) + \dots + a_{2n}A(e_2 \times e^n) + \dots + \\ & + a_{n1}A(e_n \times e^1) + a_{n2}A(e_n \times e^2) + \dots + a_{nn}A(e_n \times e^n) = \\ & = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + \dots + a_{1n} \cdot 0 + \\ & + a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 + \dots + a_{2n} \cdot 0 + \dots + \\ & + a_{n1} \cdot 0 + a_{n2} \cdot 0 + \dots + a_{nn} \cdot 1 = \\ & = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}. \end{aligned}$$

§4. Тензоры линейных отображений.

Продолжим обсуждение связи линейных отображений и билинейных функций, начатое в §3.3.

Напомним проведенные там построения. Пусть L_1 и L_2 — линейные пространства.

Пусть $a : L_1 \times L_2 \rightarrow K$ билинейная функция.

Для любого $v \in L_2$ функция $\varphi_v : L_1 \rightarrow K$, $\varphi_v(u) = a(u, v)$ является линейной и мы имеем отображение $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$, сопоставляющее вектору v функционал φ_v .

Это позволяет нам определить отображение $\Phi : B \rightarrow H$ пространства B билинейных функций $L_1 \times L_2 \rightarrow K$ в пространство H линейных отображений $L_2 \rightarrow L_1^*$ по формуле $\Phi(a) = \Phi_a$.

В §3.3 мы показали, что отображение Φ является изоморфизмом.

Он переносит тензорную структуру пространства B на пространство H .

Посмотрим, какие связи на H отражает эта тензорная структура.

Рассмотрим простой тензор $f \otimes g$ тензорного произведения $L_1^* \otimes L_2^*$

В пространстве B такому тензору соответствует произведение функционалов $f \times g$. Изоморфизм Φ сопоставляет этой билинейной функции линейное отображение $L_2 \rightarrow L_1^*$, при котором вектору $v \in L_2$ сопоставляется функция $\varphi_v : L_1 \rightarrow K$, $\varphi_v(u) = f(u)g(v)$ аргумента $u \in L_1$. Это равенство соблюдается при всех значениях аргумента $u \in L_1$. Поэтому как равенство, связывающее функции (без указания на аргумент), оно имеет вид: $\varphi_v = g(v) \cdot f$.

Таким образом, простому тензору $f \otimes g$ соответствует линейное отображение $L_2 \rightarrow L_1^* : v \rightarrow f \cdot g(v) \in L_1^*$. То есть, если распространить употребление знака $\otimes$ на умножение вектора на число, то простой тензор $f \otimes g$ соответствует линейному отображению $L_2 \rightarrow L_1^* : v \rightarrow f \otimes g(v)$.

Аналогично, для любого $u \in L_1$ функция $\psi_u : L_2 \rightarrow K$, $\psi_u(v) = a(u, v)$ является линейной и мы имеем отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$, сопоставляющее вектору u функционал ψ_u .

Это позволяет нам определить отображение $\Psi : B \rightarrow H$ пространства B билинейных функций $L_1 \times L_2 \rightarrow K$ в пространство

H линейных отображений $L_1 \rightarrow L_2^*$ по формуле $\Psi(a) = \Psi_a$.

Так же как отображение Φ , отображение Ψ является изоморфизмом.

Рассмотрим простой тензор $f \otimes g$ тензорного произведения $L_1^* \otimes L_2^*$

В пространстве B такому тензору соответствует произведение функционалов $f \times g$. Изоморфизм Ψ сопоставляет этой билинейной функции линейное отображение $L_1 \rightarrow L_2^*$, при котором вектору $u \in L_1$ сопоставляется функция $\psi_u : L_2 \rightarrow K$, $\psi_u(v) = f(u)g(v)$ аргумента $v \in L_2$. Это равенство соблюдается при всех значениях аргумента $v \in L_2$. Поэтому мы можем записать его в виде: $\psi_u = g \cdot f(u)$.

Таким образом, простому тензору $f \otimes g$ соответствует линейное отображение $L_1 \rightarrow L_2^*$: $u \rightarrow f(u) \cdot g \in L_2^*$ или, с использованием знака $\otimes$, — отображению $L_1 \rightarrow L_2^*$: $u \rightarrow f(u) \otimes g$.

§5. Матрицы билинейных функций и линейных отображений и координаты тензоров.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ — базис пространства L_1 , $e^1, e^2, \dots, e^m$ — взаимный базис пространства L_1^* , $f_1, f_2, \dots, f_n$ — базис пространства L_2 . $f^1, f^2, \dots, f^n$ — взаимный базис пространства L_2^* .

Базис тензорного произведения $L_1^* \otimes L_2^*$ составляют простые тензоры $e^i \otimes f^j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Любой элемент t из $L_1^* \otimes L_2^*$ единственным образом представим в виде линейной комбинации

$$\begin{aligned} t = & a_{11}e^1 \otimes f^1 + a_{12}e^1 \otimes f^2 + \dots + a_{1n}e^1 \otimes f^n + \\ & + a_{21}e^2 \otimes f^1 + a_{22}e^2 \otimes f^2 + \dots + a_{2n}e^2 \otimes f^n + \dots + \\ & + a_{m1}e^m \otimes f^1 + a_{m2}e^m \otimes f^2 + \dots + a_{mn}e^m \otimes f^n. \end{aligned}$$

базисных тензоров $e^i \otimes f^j$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ произведения $L_1^* \otimes L_2^*$. Таким образом, числа a_{ij} оказываются координатами тензора t в этом базисе.

Тензору t соответствует билинейная функция

$$\begin{aligned} a &= a_{11}e^1 \times f^1 + a_{12}e^1 \times f^2 + \cdots + a_{1n}e^1 \times f^n + \\ &+ a_{21}e^2 \times f^1 + a_{22}e^2 \times f^2 + \cdots + a_{2n}e^2 \times f^n + \cdots + \\ &+ a_{m1}e^m \times f^1 + a_{m2}e^m \times f^2 + \cdots + a_{mn}e^m \times f^n. \end{aligned}$$

Посчитаем значение этой билинейной функции на паре векторов

$$u = x^1e_1 + x^2e_2 + \cdots + x^me_m$$

из L_1 и

$$v = y^1f_1 + y^2f_2 + \cdots + y^nf_n$$

из L_2 . Учитывая, что $e^i \otimes f^j(u, v) = x^iy^j$, получаем

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + \cdots + a_{1n}x^1y^n + \\ &+ a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2 + \cdots + a_{2n}x^2y^n + \cdots + \\ &+ a_{m1}x^my^1 + a_{m2}x^my^2 + \cdots + a_{mn}x^my^n = \\ &= x^1(a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \cdots + a_{1n}y^n) + \\ &+ x^2(a_{21}y^1 + a_{22}y^2 + \cdots + a_{2n}y^n) + \cdots + \\ &+ x^m(a_{m1}y^1 + a_{m2}y^2 + \cdots + a_{mn}y^n) = \\ &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \cdots & x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \cdots + a_{1n}y^n \\ a_{21}y^1 + a_{22}y^2 + \cdots + a_{2n}y^n \\ \cdots \\ a_{m1}y^1 + a_{m2}y^2 + \cdots + a_{mn}y^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \cdots & x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \cdots \\ y^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу координаты векторов e_i и f_j , получаем $a_{ij} = A(e_i, f_j)$. Впрочем, в свое время эти коэффициенты именно так и возникли. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы a в базисах $e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_n$.

Обратимся к заключительным замечаниям §3.3 и §3.5.

Напомним определение отображения $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$. Для $v \in L_2$ рассматривается функция $\varphi_v : L_1 \rightarrow K$, $\varphi_v(u) = a(u, v)$. Отображение $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$ сопоставляет вектору v функционал φ_v .

Пусть

$$\varphi_v = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x^m e^m.$$

Тогда

$$\varphi_v(u) = x_1 x^1 + x_2 x^2 + \dots + x^m x^m.$$

Но

$$\begin{aligned} \varphi_v(u) = a(u, v) &= x^1(a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \dots + a_{1n}y^n) + \\ &+ x^2(a_{21}y^1 + a_{22}y^2 + \dots + a_{2n}y^n) + \dots + \\ &+ x^m(a_{m1}y^1 + a_{m2}y^2 + \dots + a_{mn}y^n). \end{aligned}$$

Сравнивая эти два представления для φ_a получаем:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \dots + a_{1n}y^n \\ x_2 = a_{21}y^1 + a_{22}y^2 + \dots + a_{2n}y^n \\ \dots \\ x_m = a_{m1}y^1 + a_{m2}y^2 + \dots + a_{mn}y^n, \end{cases}$$

то есть, та же матрица A является матрицей линейного отображения Φ_a в базисах $e^1, e^2, \dots, e^m, f_1, f_2, \dots, f_n$.

Перейдем к отображению $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$. Для $u \in L_1$ рассматривается функция $\psi_u : L_2 \rightarrow K$, $\psi_u(v) = a(u, v)$. Отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$ сопоставляет вектору u функционал ψ_u .

Строку $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ определим равенством

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

и рассмотрим линейный функционал $f = a_1 f^1 + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n$.

Для

$$v = y^1 f_1 + y^2 f_2 + \dots + y^n f_n$$

имеем:

$$\begin{aligned} f(v) &= y^1 f(f_1) + y^2 f(f_2) + \dots + y^n f(f_n) = \\ &= a_1 y^1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

То есть, $f = \psi_u$.

Подведем итог. Произведение матриц

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$$

задает нам билинейную функцию a .

Произведение матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$$

задает линейное отображение Φ_a .

Произведение матриц

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

задает линейное отображение Ψ_a .

При описании линейных отображений координаты векторов принято писать в столбец. Поэтому обычно последнее представление записывают в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

Отображения $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$ и $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$, связанные между собой указанным образом через билинейную функцию a , называются *сопряженными*. Мы установили, что матрицы сопряженных отображений связаны между собой транспонированием.

§6. Нулевые пространства билинейных функций и ядра линейных отображений.

Пусть L_1 и L_2 — линейные пространства. $a : L_1 \times L_2 \rightarrow K$ — билинейная функция, $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$, $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$ — связанные с функцией a линейные отображения, $\varphi_v(u) = a(u, v)$, $\psi_u(v) = a(u, v)$.

Левым нулевым пространством N_l билинейной функции a называется множество тех $u \in L_1$, для которых $a(u, v) = 0$ при любом $v \in L_2$.

То есть, $u \in N_l$ тогда и только тогда, когда $\psi_u(v) = 0$ при любом $v \in L_2$.

То есть, $u \in N_l$ тогда и только тогда, когда $\psi_u = \vec{0}$ в пространстве L_2^* .

То есть, $N_l = \ker \Psi_a$.

Как мы видели в предыдущем параграфе в координатах линейное отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$ задается системой

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x^1 + a_{21}x^2 + \dots + a_{m1}x^m \\ y_2 = a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + \dots + a_{m2}x^m \\ \dots \\ y_n = a_{1n}x^1 + a_{2n}x^2 + \dots + a_{mn}x^m. \end{cases}$$

Соответственно, ядро этого отображения и левое нулевое пространство билинейной функции a задается системой

$$\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{21}x^2 + \dots + a_{m1}x^m = 0 \\ a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + \dots + a_{m2}x^m = 0 \\ \dots \\ a_{1n}x^1 + a_{2n}x^2 + \dots + a_{mn}x^m = 0. \end{cases}$$

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ — базис пространства L_1 и его последние векторы $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_m$ принадлежат левому нулевому пространству N_l нашей билинейной функции или, что то же самое, ядру $\ker \Psi_a$ отображения Ψ_a . Тогда образы векторов $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_m$ при отображении Ψ_a являются нулевыми. Соответственно, нулевыми являются последние $(n - k)$ столбцов матрицы отображения Ψ_a и матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{kn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь от матрицы отображения Ψ_a к матрице билинейной функции, получаем

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— последние $(n-k)$ строк матрицы билинейной функции получаем являются нулевыми.

Правым нулевым пространством N_p билинейной функции a называется множество тех $v \in L_2$, для которых $a(u, v) = 0$ при любом $u \in L_1$.

То есть, $v \in N_p$ тогда и только тогда, когда $\varphi_v(u) = 0$ при любом $u \in L_1$.

То есть, $v \in N_p$ тогда и только тогда, когда $\varphi_u = \vec{0}$ в пространстве L_1^* .

То есть, $N_p = \ker \Phi_a$.

Как мы видели в предыдущем параграфе в координатах линейное отображение $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$ задается системой

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \dots + a_{1n}x^n \\ y_2 = a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + \dots + a_{2n}x^n \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x^1 + a_{m2}x^2 + \dots + a_{mn}x^n. \end{cases}$$

Соответственно, ядро этого отображения и правое нулевое пространство билинейной функции a задается системой

$$\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \dots + a_{1n}x^n = 0 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + \dots + a_{2n}x^n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x^1 + a_{m2}x^2 + \dots + a_{mn}x^n = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $f_1, f_2, \dots, f_n$ — базис пространства L_2 , и его последние векторы $f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n$ принадлежат правому нулевому пространству N_p нашей билинейной функции или, что то же самое, ядру $\ker \Phi_a$ отображения Ψ_a . Тогда образы векторов $f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n$ при отображении Φ_a являются нулевыми. Соответственно, нулевыми являются последние $(n-k)$ столбцов матрицы отображения Ψ_a и, что то же самое, матрицы билинейной функции a , и матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$